OEUVRES
DE M.
D'ALEMBERT

OPUSCULE
P. I ET II

Tomes 1 à V = 25 fr.

Tomes 1 à VIII (Ouvrage complet) = 80 fr.

26. Verm. math. Schriften

No 23

20

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES,

OU

MÉMOIRES sur différens sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, D'OPTIQUE, D'ASTRONOMIE &c.

Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suéde, & de l'Institut de Bologne.

TOME PREMIER.





A PARIS,

Chez DAVID, rue & vis-à-vis la grille des Mathurins.

M. DCC. LXI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.



AVERTISSEMENT.

COMME les différens Mémoires contenus dans ces *Opuscules*, exigent une lecture attentive & suivie, pour se mettre au fait des matieres qui y sont traitées, je me contenterai de donner ici une idée générale de ce qu'ils contiennent.

Dans le premier je fais voir contre M. Daniel Bernoulli, que la solution donnée par M. Taylor du Problême des *Cordes vibrantes*, est insuffisante & imparfaite, même avec l'extension ingénieuse que M. Bernoulli y a donnée; je prouve que la seule vraie solution de ce Problême est celle que j'ai trouvée le premier par une méthode singuliere & nouvelle, & que j'ai publiée dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1747. Je prouve de plus contre M. Euler, que cette solution, quoiqu'aussi générale qu'il est possible, n'est cependant applicable qu'aux cas où la corde

a une certaine figure au commencement de ſon mouvement ; & que dans les autres cas le mouvement de la corde ne peut être repréſenté par aucune formule analytique, ou, ce qui révient au même, ne peut être ſoumis au calcul. Dans un Supplément à ce Mémoire, je réponds à un très-habile Géometre de Turin, M. de la Grange, qui avoit embraſſé l'opinion de M. Euler, & qui l'avoit appuyée par de nouvelles preuves, trouvant celles de M. Euler inſuffiſantes.

Le ſecond Mémoire a pour objet le mouvement d'un corps qui tourne autour d'un axe quelconque, fixe ou variable, avec une viteſſe quelconque, variable ou uniforme, étant animé ou non par des forces accélératrices quelconques. Cet Ecrit n'eſt qu'une application des formules du Problême de la *Préceſſion des Equinoxes*, que j'ai réſolu le premier, à des cas encore plus généraux. De ſavans Géometres ont déja traité le ſujet qui fait l'objet de ce Mémoire ; mais ma ſolution du Problême de la préceſſion des Equinoxes, qui a ouvert la route pour réſoudre ce genre de queſtions, avoit pré-

cédé leur travail, comme ils n'ont pas fait difficulté d'en convenir eux-mêmes.

Dans le troisiéme Mémoire, je développe les loix des oscillations des corps flottans, sur lesquelles j'avois déja donné un Essai dans ma *Théorie de la résistance des fluides*. M. l'Abbé Bossut, Professeur Royal de Mathématique aux Ecoles du Génie, & Correspondant de l'Académie des Sciences, a fait un usage heureux & utile de quelques-unes de mes formules dans son excellente piéce sur l'*Arrimage des Navires*, qui a partagé le prix de l'Académie en 1761. Il a de plus ajouté à ces formules beaucoup de remarques curieuses & importantes qui lui appartiennent, & qui ont rapport au mouvement des Navires.

Le quatriéme Mémoire a pour objet la réduction des loix du mouvement des fluides aux équations analytiques les plus générales qu'il est possible; après avoir donné ces équations, je fais voir qu'il y a très-peu de cas où le mouvement des fluides puisse y être réduit, & par conséquent être déterminé par un calcul rigoureux; d'où il s'ensuit qu'en général les loix de

l'Hydrodynamique, entant qu'on les ſoumet au calcul, ne peuvent être connues qu'à-peu-près.

Le but du cinquiéme Mémoire eſt de rendre plus rigoureuſe & plus ſimple l'ingénieuſe démonſtration du principe de la compoſition des forces, que M. Daniel Bernoulli a donnée dans le premier Volume des Mémoires de Péterſbourg.

Ces cinq Mémoires avoient déja été annoncés dans l'Avertiſſement de la nouvelle Edition de mon *Traité de Dynamique*; ils étoient dèſlors en état de paroître; depuis ce tems je les ai perfectionnés, & augmentés de nouvelles recherches.

Dans le ſixiéme Mémoire, je ſoutiens contre le célébre M. Euler, le même ſentiment que ſoutint autrefois M. Jean Bernoulli contre M. Leibnitz, ſavoir que les *Logarithmes des quantités négatives ne ſont point imaginaires, mais réels*, ou plutôt qu'ils peuvent être ſuppoſés à volonté réels ou imaginaires, & que tout dépend du ſyſtême de Logarithmes qu'on choiſit. Aux preuves que M. Jean Bernoulli a données de ſon ſentiment, & que j'ai développées & expo-

ſées d'une maniere encore plus frappante, j'en ai joint pluſieurs autres ; & j'ai répondu aux objections de MM. Leibnitz & Euler, de maniere à ne laiſſer, ce me ſemble, aucun doute ſur cette queſtion épineuſe & délicate.

Le ſeptiéme Mémoire eſt un ſupplément à ce que j'ai donné dans les Mémoires de Berlin de 1746 & 1748, ſur les intégrations qui dépendent de la rectification des Sections coniques, & de la quadrature des lignes du troiſiéme ordre, & une application de ces intégrations à la quadrature de la ſurface des cônes obliques.

J'ai recueilli dans le huitiéme Mémoire pluſieurs remarques ſur l'attraction, pour éclaircir & développer quelques endroits de mes autres Ouvrages. J'y fais voir ; 1°. qu'en ſuppoſant à la Terre un noyau intérieur d'une denſité différente du reſte du ſphéroïde, la figure extérieure de la Terre dépend moins de la figure de ce noyau, comme l'ont cru quelques ſavans Géometres, que du rapport de ſa denſité avec la denſité du reſte du ſphéroïde. 2°. Que la Terre, même en la ſuppoſant en partie fluide, pourroit

ſubſiſter ſans être un ſolide de révolution, pourvû qu'elle eût un noyau intérieur ſolide, qui ne fût pas un ſolide de révolution, & qui fût d'une denſité différente de la partie fluide. 3°. Enfin j'explique pourquoi un corpuſcule placé ſur une ſurface ſphérique, éprouve une attraction qui n'eſt que la moitié de celle que la même ſurface exerceroit ſur le même corpuſcule, s'il étoit placé à une diſtance infiniment peu plus grande.

Le neuviéme Mémoire contient l'examen des principes qu'on employe communément en Optique, tant par rapport aux loix de la viſion directe, que par rapport à celles de la viſion réfléchie ou réfractée; j'en fais voir le peu de ſolidité, & j'en conclus que dans cette Science preſque tout eſt encore à faire; que les principes qui y ſont le plus généralement reçus, ſont, ou faux, ou tout au moins très-incertains; qu'il eſt très-douteux, par exemple, que les objets ſoient toujours vûs dans la direction du rayon viſuel; que l'on n'eſt pas plus inſtruit ſur les loix de la diſtance & de la grandeur apparente des

des objets dans les miroirs & dans les verres; que les expériences d'Optique qui paroiſſent les plus ſimples, ſont ſujettes à beaucoup d'illuſions & de variétés &c. Je donne auſſi dans ce même Mémoire une méthode que je crois aſſez ſimple & aſſez ſûre pour déterminer la diſtance & la grandeur apparente des objets dans la viſion directe; & je fais à cette occaſion différentes remarques qui pourront, je crois, intéreſſer les Géometres.

Dans le dixiéme Mémoire, j'examine les principes reçus juſqu'ici par les Mathématiciens ſur le calcul des probabilités, & je tâche de montrer que ces principes ſont au moins très-douteux, pour ne rien dire de plus. C'eſt à quoi je parviens en éxaminant un cas ſingulier du Problême des jeux de hazard, ſur la ſolution duquel les Analyſtes paroiſſent s'être vainement exercés juſqu'aujourd'hui, & qui ne peut être ſuſceptible d'une ſolution ſatisfaiſante, qu'en limitant & en modifiant les principes dont ces mêmes Analyſtes ſe ſont ſervis juſqu'à préſent pour réſoudre les queſtions de cette eſpéce.

Le onziéme Mémoire, ſur l'Inoculation de la petite Vérole, a pour objet de prouver que dans les calculs qu'on a faits juſqu'à préſent pour conſtater les avantages de l'inoculation, on n'a point enviſagé la queſtion ſous ſon véritable point de vûe; & qu'il eſt très-difficile, pour ne pas dire impoſſible, d'apprétier ces avantages par le calcul; ce qui n'empêche pas, comme je l'obſerve, que la pratique de l'inoculation ne puiſſe être avantageuſe, quand elle ſera conduite avec les précautions convenables. Comme l'objet de ce Mémoire intéreſſe tous les Citoyens, j'ai tâché de le rendre clair & impartial; il n'eſt perſonne qui avec un peu d'attention ne puiſſe le lire, l'entendre & le juger; les détails Mathématiques ſont rejettés dans des notes très-étendues, que j'ai jointes au Mémoire, & qui contiennent beaucoup d'autres remarques importantes ou curieuſes ſur la théorie de l'inoculation.

Dans le douziéme Mémoire, après avoir montré, contre la prétention d'un ſavant Géometre, que la théorie des perturbations des Cometes eſt contenue dans la ſolution que j'ai donnée

dès 1747 du Problême des trois corps, je perfectionne cette théorie; j'en ſimplifie la pratique par differens moyens que je propoſe pour cet effet; & je parviens à une méthode pour calculer les perturbations des Comètes, plus ſimple, ce me ſemble, plus abrégée & plus facile, que ce qui a été publié juſqu'à préſent ſur cette matiere. L'Académie de Peterſbourg a propoſé ce Problême pour le ſujet du Prix qu'elle doit diſtribuer cette année; & elle exige qu'on y joigne l'application de la théorie à la Comète de 1759. Comme je n'ai eu connoiſſance que fort tard du Programme, je n'ai pas eu le tems néceſſaire pour entreprendre ce calcul, dont la longueur énorme eſt d'ailleurs ſeule capable de rebuter, quand on n'eſt aidé par perſonne. Je me ſuis donc contenté de faire part aux Géometres de ma méthode, dont j'ai expoſé le procédé avec le plus grand détail, & avec toute la clarté qui m'a été poſſible: & je me flatte qu'il n'y aura point de Calculateur tant ſoit peu intelligent, qui ſur cet expoſé ne puiſſe entreprendre de déterminer les altérations du mouvement des Comètes; puiſ-

que j'ai eu ſoin de lui mettre ſous les yeux la ſuite des opérations qu'il doit faire, & qu'il n'y a plus abſolument qu'à ſubſtituer aux quantités algébriques les nombres qui conviennent à chaque Comète en particulier.

J'examine dans le treiziéme Mémoire, la diſpute qui s'eſt élevée entre les Géometres au ſujet de la différence d'un mois qui s'eſt trouvée entre la prédiction du retour de la Comète de 1682, & l'obſervation de ce même retour. Je prouve que cette différence ne doit point être comparée (comme on l'a prétendu) à la période entiere, encore moins à la ſomme de deux périodes conſécutives, mais ſeulement à la différence de ces deux périodes, qui n'eſt que de 18 mois; & qu'ainſi la différence entre le calcul & l'obſervation, eſt au moins d'un dix-huitiéme, & non pas de $\frac{1}{1800}$. Je prouve même, qu'en faiſant la répartition la plus vraiſemblable & la plus naturelle des erreurs commiſes dans les différens réſultats, l'erreur du dernier réſultat a dû être vraiſemblablement un cinquiéme du total; ce qui doit être uniquement

imputé à la nature des circonſtances du Problême, qui n'a pas permis une plus grande préciſion dans les calculs.

Le quatorziéme Mémoire eſt deſtiné à défendre ma ſolution du Problême des trois corps contre les objections qu'on y a faites, & à montrer les avantages de cette ſolution ſur celles qui ont été données du même Problême.

Ce Mémoire eſt ſuivi de nouvelles Tables de la Lune, d'une forme très-commode & très-ſimple. J'ai d'autant plus lieu d'eſpérer que les Aſtronomes en feront uſage, que je les crois d'ailleurs aſſez éxactes. M. Couſin, habile Mathématicien, qui a bien voulu m'aider dans le calcul de ces Tables, s'en étant ſervi pour déterminer pluſieurs lieux de la Lune, n'a jamais trouvé une minute de différence entre le calcul & l'obſervation.

Enfin, dans le quinziéme Mémoire, j'applique à la Lune, regardée comme un ſphéroïde dont les Méridiens & l'Equateur ſeroient des ellipſes, la théorie que j'ai donnée dans les Mémoires de l'Académie de 1754 ſur la préceſſion

des points équinoxiaux dans de pareils ſphéroïdes. Je joins à cette application différentes remarques ſur la libration de la Lune, ſur les mouvemens que peut avoir ſon axe, & même ſur le Problême de la préceſſion des Equinoxes en général.

Telles ſont les différentes matieres traitées dans ces *Opuſcules*. La plûpart des Mémoires qu'elles contiennent, peuvent fournir le ſujet de pluſieurs autres, comme il eſt aiſé de s'en convaincre en les liſant; & je me propoſe de donner de tems en tems une ſuite à ces deux Volumes, autant que mes autres occupations pourront me le permettre.

Au reſte, je me flatte que les ſavans Géometres, dont j'ai cru pouvoir attaquer les aſſertions, preſque toujours pour ma propre défenſe, ne m'en ſauront pas mauvais gré; en combattant leurs opinions, je ſai tous les égards que je dois à leur perſonne & à leur mérite, & je ne crois pas m'en être écarté.

TABLE
DES MÉMOIRES
Contenus en ce premier Tome.

OPUSCULES



OPUSCULES MATHÉMATIQUES.

PREMIER MÉMOIRE.

Recherches sur les vibrations des Cordes sonores.



J'AI donné, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Prusse pour l'année 1747, des recherches sur les vibrations des cordes sonores, qui ont été attaquées par Messieurs Bernoulli & Euler, dans les Mémoires de la même Académie pour l'année 1753. La lecture de leurs Mémoires & des miens suffiroit peut-être pour me mettre à couvert de leurs attaques ; car chacun de ces grands Géometres, pris séparé-

ment, ſemble m'accorder ce que l'autre me nie. Néanmoins la difficulté de la queſtion, qui ne peut avoir que très-peu de Juges, & le nom de mes deux Adverſaires, m'engagent à ſoumettre au jugement des Savans les objets de notre conteſtation. Je donnerai d'abord une ſolution nouvelle du Problême des cordes vibrantes, encore plus ſimple que celle que j'ai déja donnée dans les Mémoires déja cités; j'y joindrai quelques remarques relatives à cette ſolution, & l'application de ma méthode à différens Problêmes ſur les vibrations des cordes ſonores; je répondrai enſuite aux objections de Meſſieurs Euler & Bernoulli.

§ I. Soit AMB (*Fig.* 1.) une corde en vibration, $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; on ſuppoſe que les vibrations ſont fort petites; ainſi on peut faire $Mm = dx$. L'ordonnée PM ne peut être qu'une fonction de l'abſciſſe x, & du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; & ſi on imagine que la corde ſe meuve de P vers M, & qu'on nomme F la force retardatrice du point M, p la peſanteur, θ le tems qu'un corps peſant mettroit à parcourir l'eſpace quelconque e, on aura $-\frac{ddy}{dt^2} = \frac{F \times 2e}{p\,\theta^2}$, équation dont le premier membre exprime le coëfficient de dt^2, lorſqu'on prend la différence ſeconde de y, en ne faiſant varier que t & en ſuppoſant dt conſtant.

Or la force retardatrice F eſt égale à la force de tenſion multipliée par l'angle de contingence en M, & di-

viſée par la petite maſſe à mouvoir Mm ou dx. La force de tenſion peut être ſuppoſée $= pma$, c'eſt-à-dire, en raiſon de m à 1, avec le poids de la corde pa (a étant la longueur de la corde, & p la gravité); & l'angle de contingence eſt $-\frac{ddy}{dx}$, en ne faiſant varier que x. Donc $F = -\frac{pmaddy}{dx^2}$; donc faiſant la ſubſtitution, & ſuppoſant (ce qui eſt permis) $2ema = \theta^2$, on aura $-\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{ddy}{dx^2}$ ou $\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$; d'où il s'enſuit que ſi on fait $dy = pdt + qdx$, on aura $\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$, & que par conſéquent $pdx + qdt$ ſera une différentielle exacte, auſſi-bien que $pdt + qdx$; donc ſi on fait $du = pdx + qdt$, on aura $dy + du = \overline{p+q}\,.\,\overline{dx+dt}$ & $dy - du = \overline{p-q}\,.\,\overline{dt-dx}$; donc $y + u = \varphi\,(x+t)$ & $y - u = \Delta\,(x-t)$; donc $y = \frac{\varphi\,(x+t)}{2} + \frac{\Delta\,(x-t)}{2}$, ou plus ſimplement $y = \varphi\,(x+t) + \Delta\,(x-t)$; c'eſt l'équation générale des cordes vibrantes, attachées ou non par deux points fixes.

Sur cette ſolution ſi ſimple je ferai d'abord une remarque en paſſant. M. Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1753, eſt parvenu à la même équation que moi; mais, ce me ſemble, par une méthode

moins sûre ; de ce que $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$, il paroît en conclure que $\frac{kdy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, k exprimant un nombre constant ; ce qui n'est pas vrai, comme on le peut voir aisément par la seule différentiation de l'équation $y = \varphi(x+t) + \Delta(x-t)$. Il est vrai que l'équation $\frac{kdy}{dx} = \frac{dy}{dt}$ donne $y = \varphi(x+t)$ & $y = \Delta(x-t)$; & qu'il arrive par hasard qu'en réunissant ces deux valeurs de y, on a la valeur générale de y qui répond à l'équation $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$; mais quoique la solution de M. Euler conduise à une conclusion vraie, elle n'en est pas, ce me semble, plus exacte pour cela, puisqu'elle semble appuyée sur l'hypothèse fausse que $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$ donne en général $\frac{dy}{dt} = \frac{kdy}{dx}$; je dis *en général* ; car si l'équation $\frac{dy}{dt} = \frac{kdy}{dx}$ ne convient pas à toutes les quantités auxquelles convient l'équation $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$, comment peut-on être sûr que l'intégration de cette équation $\frac{dy}{dt} = \frac{kdy}{dx}$, donnera la solution générale du Problême ?

La solution que M. Euler a donnée de ce même

Problême, dans les Mémoires de Berlin 1748, eſt plus exacte, mais elle ne differe point, comme il l'a remarqué lui-même, de celle que j'ai donnée dans les Mémoires de la même Académie pour l'année 1747.

Au lieu de l'équation $\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, tirée de l'équation $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$, j'aurois pû écrire celle-ci, en apparence beaucoup plus générale, $\frac{d\left(\frac{dy}{dt} + \xi\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx} + \vartheta\right)}{dx}$, ξ repréſentant une fonction quelconque de x, & ϑ une fonction quelconque de t; mais cette équation donne $p\,dx + d\xi + q\,dt + d\vartheta$ une différentielle complette, & par conſéquent $p\,dx + q\,dt$ pris ſéparément eſt auſſi une différentielle complette; donc l'équation ſubſtituée à $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$, eſt auſſi générale qu'on le peut ſouhaiter.

On pourroit croire au premier coup d'œil, que l'équation $y = \varphi(x+t) + \Delta(x-t)$ n'eſt pas auſſi générale qu'elle le peut être; car l'équation $y = \varphi(x+t) + \Delta(x-t) + Axx + Att + Cx + Dt + E$, qui eſt en apparence plus générale, ſatisfait également à l'équation différentielle $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$. Mais on peut remarquer que $Axx + Att = \frac{A}{2}(x+t)^2 + \frac{A}{2}$

$(x-t)^2$; que $Cx+Dt=F(x+t)+G(x-t)$, en supposant $F+G=C$, & $F-G=D$, ou $F=\frac{C+D}{2}$ & $G=\frac{C-D}{2}$; à l'égard de la constante E, elle est censée entrer dans l'une des deux quantités $\varphi(x+t)$ ou $\Delta(x-t)$; ainsi la valeur de y se réduit dans tous les cas à $\varphi(x+t)+\Delta(x-t)$.

§. II. Lorsque $x=o$, ou doit avoir $y=o$, quel que soit t; donc $\Delta-t=-\varphi t$; donc $\varphi\, t$ & $\Delta-t$ doivent être des fonctions impaires de t, toutes deux semblables & de signe contraire. Donc $y=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)$.

On auroit pû trouver aussi par la méthode précédente $y=\varphi(x+t)-\Delta(t-x)$; & $y=\varphi(x+t)-\varphi(t-x)$; ce qui revient au même que la valeur qu'on vient de trouver; car $-\varphi(t-x)$ est la même chose que $\varphi(x-t)$, lorsque φ désigne une fonction impaire.

La valeur de y doit encore être $=o$, quel que soit t; lorsque $y=AB=a$; donc $\varphi(a+t)+\varphi(a-t)$ doit toujours être $=o$; donc $\varphi\, x$ doit être telle que si on y met successivement $a+t$ & $a-t$ pour x, la somme des deux résultats soit $=o$; or $y=2\,\varphi\, x$ est l'équation de la courbe initiale AMB, lorsque $t=o$; d'où l'on voit que la courbe AMB (*fig.* 2.) doit avoir au-dessous de l'axe AB une branche $B\mu\alpha$ qui lui soit égale & semblable, ainsi qu'une branche Amb de l'autre côté de A, puisque $\varphi\, x$ est impaire. Donc la courbe initiale AMB

doit être telle, qu'elle ait des branches alternatives égales & semblables en sens contraire à l'infini, toutes renfermées dans une même équation. Autrement le Problême ne pourra être résolu, & se refusera à l'analyse. On peut voir dans les Mémoires de Berlin 1747, toutes les autres conséquences que j'ai tirées de cette solution.

§. III. Si la courbe n'étoit pas supposée uniformément épaisse, ensorte que la variable X, qui exprime une fonction donnée de x, désignât son épaisseur variable en chaque point, alors la masse à mouvoir Mm ne feroit plus dx, mais Xdx, & l'on auroit pour équation $\frac{ddy}{X\,dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$. Or si l'on fait $y = Bc^{A\xi + Dt}$, B, A, D étant des constantes indéterminées, & ξ une fonction de x telle que $A^2\left(\frac{dd\xi}{dx^2} + \frac{d\xi^2}{dx^2}\right) = D^2 X$, on trouve que cette valeur de y satisfait à l'équation proposée; donc en général si on suppose $y = Bc^{A\xi + Dt} + B'c^{A'\xi + D't} + B''c^{A''\xi + D''t}$ &c. & ainsi à l'infini, si on le juge à propos; cette valeur de y satisfera à l'équation differentielle ci-dessus, pourvû qu'on ait en général $\frac{A^2}{D^2} = \frac{A'^2}{D'^2} = \frac{A''^2}{D''^2}$ &c.

Supposons, pour rendre le calcul un peu plus facile, que $\xi = o$ quand $x = o$, & que $\xi = \alpha$ quand $x = a$, il faudra que la valeur de y soit telle qu'en mettant o & α à la place de ξ, on ait $y = o$, quel que soit t; il faudra

de plus que $\frac{dy}{dt}$, c'est-à-dire, la viteſſe de chaque point, ſoit $= o$ lorſque $t = o$, quel que ſoit x. Pour ſatisfaire à ces conditions, nous prendrons en général $y = (Bc^{A\xi\sqrt{-1}} - Bc^{-A\xi\sqrt{-1}}) \times (Qc^{Et\sqrt{-1}} + Qc^{-Et\sqrt{-1}}) + (Fc^{2A\xi\sqrt{-1}} - Fc^{-2A\xi\sqrt{-1}}) \times (Hc^{2Et\sqrt{-1}} + Hc^{-2Et\sqrt{-1}})$ &c. & ainſi de ſuite à l'infini, ſi on le juge à propos, $A\xi$ exprimant 180 degrés, lorſque ξ ſera $= a$. Or cette équation revient à cette forme plus ſimple, $y = K$ ſin. $A\xi \times L$ coſ. $Et + M$ ſin. $2A\xi \times N$ coſ. $2Et$ &c.

Au reſte l'équation $y = Bc^{A\xi + Dt} + B'c^{A'\xi + D't}$ &c. à l'infini, n'eſt pas la ſeule intégrale poſſible de l'équation propoſée $\frac{ddy}{Xdx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$; il eſt aiſé de voir que cette équation en a d'autres, quoiqu'il ſoit peut-être très-difficile de trouver une formule générale qui les renferme toutes. Pour le prouver, nous ferons d'abord obſerver une propriété de l'équation différentielle dont il s'agit : voici en quoi cette propriété conſiſte. De ce que $\frac{ddy}{Xdx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$, il s'enſuit que $pdt + qdx$ d'une part, & $qdt + pXdx$ de l'autre, ſont des différentielles complettes; ſoit à préſent $dp = rdt + sdx$, & on aura $\frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dx}$, & $\frac{dq}{dx} = \frac{Xdp}{dt}$; par conſéquent $dq = sdt + rXdx$; qui ſera auſſi une différentielle

tielle complette ; par la même raiſon, ſi on fait $dr = \alpha dt + \beta dx$, on aura $ds = \beta dt + \alpha X dx$, & ainſi à l'infini ; par conſéquent on aura non-ſeulement $\frac{ddy}{Xdx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$; mais encore $\frac{ddp}{Xdx^2} = \frac{ddp}{dt^2}$, $\frac{ddr}{Xdx^2} = \frac{ddr}{dt^2}$; ou, ce qui revient au même, $\frac{d^3y}{dt.Xdx^2} = \frac{d^3y}{dt^3}$; $\frac{d^4y}{dt^2.Xdx^2} = \frac{d^4y}{dt^4}$; &c. Ce qui peut d'ailleurs ſe démontrer directement par le moyen de la ſeule équation primitive $\frac{ddy}{Xdx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$, qui donne à l'infini $\frac{d^ny}{Xdx^2.dt^{n-2}} = \frac{d^ny}{dt^n}$; ou $\frac{d^ny}{dt^{n-2}Xdx^2} = \frac{d^ny}{dt^n}$; car c'eſt la même choſe de différentier d'abord y, $n - 2$ fois en ne faiſant varier que t, & enſuite deux fois en ne faiſant varier que x, ou de le différentier d'abord deux fois en ne faiſant varier que x, & enſuite $n - 2$ fois en faiſant varier ſeulement t.

Donc on aura les différentielles complettes deux à deux

$$dy = pdt + qdx \text{ \& } qdt + pXdx \Big\} \quad dp = rdt + sdx \text{ \& } sdt + rXdx \Big\} \quad dr = \alpha dt + \beta dx \text{ \& } \beta dt + \alpha Xdx;$$

& ainſi à l'infini ; de ſorte que ſi on trouve un ſeul cas d'intégrabilité, on pourra, en remontant, en trouver d'autres à l'infini. Par exemple, on trouve (en faiſant $Xdx = dz$) que ſi $\alpha = A + Bt + Gx$, & $\beta = R + Gt + Bz$, dr & $\beta dt + \alpha Xdx$ ſeront l'une & l'autre

des différentielles complettes ; d'où l'on trouvera en remontant p, y, &c. ce qui donneroit d'autres valeurs de y que celles qui sont renfermées dans l'équation $y =$ $y = B c^{A\xi + Dt} + B' c^{A'\xi + D't}$ &c. Il est vrai que ces valeurs ne satisferoient point au présent Problême, parce qu'elles ne seroient pas $= o$ quand $x = o$ & quand $x = a$, comme il est nécessaire qu'elles le soient, quelque valeur qu'on donne à t ; mais c'en est assez pour faire voir que la solution donnée ci-dessus n'est pas générale.

Si on suppose $\alpha = \theta\,\xi$, $\beta = \theta'\,\xi'$, θ & θ' étant des fonctions de t, & ξ, ξ' des fonctions de x, on trouvera que $\frac{\theta\, d\xi}{dx} = \frac{\xi'\, d\theta'}{dt}$; & $\frac{\theta'\, d\xi'}{X\,dx} = \frac{\xi\, d\theta}{dt}$; d'où l'on tire $\frac{d\xi}{\xi'\, dx} = \frac{d\theta'}{\theta\, dt} = A$, A étant une constante, & $\frac{d\xi'}{\xi\, X\, dx} = \frac{d\theta}{\theta'\, dt} = B$, B étant aussi une constante ; par conséquent $\theta = \frac{d\theta'}{A\,dt}$, & $dd\theta' =$ $AB\,\theta'\,dt^2$; & par la même raison $\xi' = \frac{d\xi}{A\,dx}$ & $dd\xi$ $= AB\,\xi\,X\,dx^2$. Or si ni A ni B n'est $= o$, on tirera de ces équations une valeur de y toute semblable à celle-ci, $y = B c^{A\xi + Dt}$ &c. Si A ou B est $= o$, on trouvera 1°. dans le cas de $A = o$, $d\theta' = o$, $\theta' = G$, $d\theta = BG\,dt$, & $\theta = BG\,t + H$; 2°. dans le cas de $B = o$, $d\theta = o$, $\theta = L$; $d\theta' = AL\,dt$, & $\theta' = AL\,t + M$,

& par la même raiſon, en faiſant $X\,d\,x = d\,z$, on aura dans le premier cas $\xi = N$ & $\xi' = B\,N\,z + P$; & dans le ſecond cas $\xi' = Q$ & $\xi = A\,Q\,z + R$; donc dans le premier cas $\alpha = N\,B\,G\,t + N\,H$, & $\zeta = G\,B\,N\,z + G\,P$; & dans le ſecond cas $\alpha = L\,A\,Q\,z + L\,R$, & $\zeta = A\,L\,Q\,t + Q\,M$; ce qui eſt encore un cas d'une des ſolutions données ci-deſſus. Mais aucune de ces ſolutions n'eſt générale, comme il eſt aiſé de le ſentir. Revenons donc à notre ſujet.

§. IV. Si la courbe vibrante *AMB*, au lieu d'être une corde fléxible & tendue, fixe par ſes deux extrémités *A*, *B*, eſt un reſſort fixé ſeulement en *A* & écarté par quelque puiſſance de la ſituation *AB*; on peut trouver ſon mouvement par la méthode ſuivante.

On conſidérera d'abord que le reſſort dans ſon mouvement tourne ſa convexité vers l'axe *AB*, & non ſa concavité, comme la corde vibrante; on pourra ſuppoſer de plus, au moins dans un très-grand nombre de cas, que la force qui agit ſur chaque point eſt en raiſon de l'angle de courbure, c'eſt-à-dire qu'elle eſt $+\frac{d\,d\,y}{d\,x}$, & non pas, comme dans le Problême précédent, $-\frac{d\,d\,y}{d\,x}$, parce que dans ce Problême la courbe étoit ſuppoſée concave vers *AB*, & qu'ici elle eſt convexe. Ainſi on aura $-\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} = \frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$ pour l'équation de la lame à reſſort vibrante. Or faiſant $t\sqrt{-1} = u$, il

vient $\frac{ddy}{du^2} = \frac{ddy}{dx^2}$; donc $y = \varphi(x+u) + \Delta(x-u)$ ou $y = \varphi(x+t\sqrt{-1}) + \Delta(x-t\sqrt{-1})$; & comme $x = o$ rend toujours $y = o$, il s'ensuit que $y = \varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})$ ou $\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(t\sqrt{-1}-x)$, φx étant une fonction impaire.

Si la fonction φx est telle qu'en substituant à la place de t une certaine valeur donnée ϑ, on ait $\varphi(x+\vartheta\sqrt{-1}) + \varphi(x-\vartheta\sqrt{-1}) = o$, quel que soit x, c'est-à-dire que le coëfficient de chaque terme soit $= o$, alors il est évident qu'au bout du tems ϑ, tous les points de la lame vibrante arriveront en même tems à la situation rectiligne. En ce cas il est aisé de voir que $y = \varphi x$ ne peut exprimer une courbe géométrique, parce que φx renfermera nécessairement une infinité de termes. Car on s'assurera facilement par le calcul, que la condition dont il s'agit, ne peut avoir lieu, si φx est une fonction Algébrique & finie.

La condition dont nous parlons aura lieu, par exemple, si $y = (Ac^{Bx} - Ac^{-Bx}) \times D \text{ cos. } Bt + (Ec^{3Bx} - Ec^{-3Bx}) \times H \text{ cos. } 3Bt +$ &c. & ainsi de suite à l'infini, si on le juge à propos.

Cette équation est donc une de celles que doit avoir la lame vibrante, pour que tous ses points fassent leurs demi-vibrations en même tems.

M. Daniel Bernoulli trouve dans les Mémoires de

Peterſbourg, *Tom.* 13, une équation fort différente de celle-ci pour celle de la lame vibrante, dans le cas où les demi-vibrations de chaque point ſont ſynchrones. Cette équation eſt $d^4 y = A y d x^4$. Je ne nie pas qu'elle ne puiſſe abſolument avoir lieu dans certains cas; mais 1°. M. Bernoulli ſuppoſe que la force accélératrice doit être proportionnelle à l'ordonnée y, comme M. Taylor l'a ſuppoſé dans le Problême des cordes vibrantes. Or la ſuppoſition de M. Taylor eſt trop limitée, comme nous l'avons fait voir dans les Mémoires de Berlin 1747, & il ne paroît pas que l'hypotheſe de M. Bernoulli ſoit plus fondée en raiſon. 2°. M. Bernoulli fait encore cette autre ſuppoſition, que dans un reſſort bandé, l'angle de contingence eſt égal à la ſomme des momens de toutes les puiſſances tendantes. Or cette ſuppoſition ne me paroît pas ſuffiſamment appuyée, quoiqu'elle ſoit le fondement ordinaire ſur lequel on réſout le Problême de la courbe élaſtique; car dans un corps à reſſort, & par conſéquent fléxible, j'avoue que je ne puis me former d'idée nette de ces *momens* dont on parle, & qui ne doivent avoir lieu que dans un corps abſolument infléxible. Un reſſort ne doit être regardé, ni comme un corps parfaitement fléxible, ni comme un corps abſolument infléxible; & j'oſerois aſſurer par cette raiſon, que toutes les ſolutions qu'on donnera du Problême de l'Elaſtique, ſeront très-imparfaites, juſqu'à ce qu'on ait trouvé la véritable loi de la réſiſtance des reſſorts pliés.

Si la lame vibrante n'étoit pas par-tout de la même épaisseur, on auroit $-\frac{ddy}{X dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$, & $y = Bc^{A\xi + Dt\sqrt{-1}} + B'c^{A'\xi + D't\sqrt{-1}}$ &c. comme ci-dessus, avec ces conditions que $A^2\left(\frac{dd\xi}{dx^2} + \frac{d\xi^2}{dx^2}\right) = -D^2 X$, & que $\frac{A^2}{D^2} = \frac{A'^2}{D'^2}$ &c. d'où l'on tire $y = (Bc^{A\xi} - Bc^{-A\xi})\, Q$ cos. $Et + (Fc^{2A\xi} - Fc^{-2A\xi})\, H$ cos. $2Et$ &c. & ainsi de suite à l'infini, si on le juge à propos; & pour le cas où toutes les demi-vibrations doivent être d'égale durée, $y = (Bc^{A\xi} - Bc^{-A\xi})\, Q$ cos. $Et + (Fc^{3A\xi} - Fc^{-3A\xi})\, H$ cos. $3Et +$ &c.

§. V. Je viens présentement à l'examen de la solution de M. Euler, pour le cas de la corde vibrante uniformément épaisse. Nous avons vû ci-dessus que dans l'équation $y = \varphi(x+t) + \varphi(x-t)$, les deux fonctions désignées par φ doivent être impaires & semblables. M. Euler convient de cette assertion. Il dit expressément que les fonctions $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$ doivent être *identiques*, & il ajoute que φx doit être une fonction *impaire*, c'est-à-dire, *ne renfermer que des puissances impaires de x.*

Cependant pour trouver en général la valeur de y, voici la construction qu'il donne. Supposant que AMB (*Fig.* 2.) soit la figure initiale de la corde, il transporte

cette figure alternativement au-dessus & au-dessous de l'axe en Amb, $B\mu\alpha$, & ainsi de suite à l'infini; ensuite pour savoir quelle sera la valeur de y, ou la distance du point M à AB au bout du tems t, il prend $PQ = t$ & $PR = t$, & $y = \frac{QN}{2} + \frac{RS}{2}$, RS étant considérée comme négative, si elle tombe de l'autre côté de l'axe par rapport à PM. J'ai prétendu que cette construction ne pouvoit avoir lieu, que quand les courbes AMB, $B\mu\alpha$, Amb, &c. & ainsi à l'infini, étoient liées par une même équation, & assujetties à la loi de continuité; M. Euler soutient que cette construction est générale, quelle que soit la courbe AMB. C'est le seul point sur lequel nous différons.

§. VI. Je ne conçois pas d'abord pourquoi M. Euler prétend que la courbe AMB peut être telle qu'on voudra; puisqu'il dit lui-même expressément que φx ne doit contenir que des *puissances impaires de* x; ainsi $y = 2\varphi x$, qui est l'équation de la courbe initiale AMB lorsque $t = o$, ne doit contenir que des puissances impaires de x. Par cette seule restriction, il seroit déja obligé d'exclure de sa solution générale tous les cas où l'équation de la courbe AMB renferme quelques puissances paires; ceux, par exemple, où la courbe AMB seroit une Parabole ayant pour équation $y = qax - qxx$, dans laquelle q est supposé un coëfficient fort petit. Mais ce n'est pas tout; M. Euler dit encore que les fonctions $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$ doivent être

identiques; il insiste à plusieurs reprises sur la nécessité absolue de cette identité. Or il est aisé de voir, que si les courbes AMB, Amb, $B\mu\alpha$ &c. ne sont pas assujetties à une même équation, ces deux fonctions ne seront pas identiques, même dans le cas où $\varphi(x)$ seroit une *fonction impaire*. En effet, soit, par exemple, AMB (*Fig.* 3.) une portion de Parabole cubique, telle que $y = a^2 x - x^3$, & soit $PQ = t$, $PQ' = t$, on aura $Q'S'$ ou $\varphi(x+t) = \alpha Q' \times (a^2 - \alpha Q'^2) =$ (à cause de $AQ' = x + t$) $(2a - x - t)(aa - \overline{2a - x - t}^2) = 11 a^2 (x+t) - 6a^3 - 6a(x+t)^2 + (x+t)^3$; & QS ou $\varphi(x-t) = a^2(x-t) - (x-t)^3$; donc $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$ ne sont pas identiques dans la construction de M. Euler, quoique ces deux fonctions doivent l'être, selon lui-même. M. Euler répondra peut-être, que par fonctions identiques, il n'entend pas ici ce qu'on entend d'ordinaire, des fonctions dans lesquelles $x + t$ & $x - t$ entrent de la même maniere; mais seulement des fonctions telles, que si l'on prend $x + t = x' - t$ (les abscisses x & x' étant différentes) on ait $\varphi(x+t) = \varphi(x'-t)$; c'est-à-dire l'ordonnée qui répond à $x + t$ égale à celle qui répond à $x' - t$, sans qu'il soit nécessaire d'ailleurs que $\varphi(x+t)$ soit de la même forme que $\varphi(x'-t)$. Nous prouverons dans la suite que cette réponse ne mettroit pas à couvert la solution de M. Euler. Mais commençons par donner des preuves directes de l'insuffisance de cette solution.

§. VII. Nous allons donc démontrer que la construction

tion de M. Euler ne satisfait point en général à l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$. Pour cela soit pris $AP = x$, (*Fig.* 4.), $PT = t$ sur l'axe AB; donc regardant x comme constante, & faisant $PT' = PT$, $Tt = t\theta = T't' = t'\theta' = dt$, on aura $AT = x + t$, $At = x + t + dt$, $A\theta = x + t + 2\,dt$, $AT' = x - t$, $At' = x - t - dt$, $A\theta' = x - t - 2\,dt$. Or y étant égale, suivant la construction même de M. Euler, à la demie ordonnée TR qui répond à $x + t$, plus à la demie ordonnée $T'R'$ qui répond à $x - t$, il s'ensuit que ddy, en ne faisant varier que t, est $\frac{\theta\varrho - tr - (tr - TR)}{2}$ $+ \frac{\theta'\varrho' - t'r' - (t'r' - T'R')}{2}$; donc $\frac{ddy}{dt^2}$ $= \frac{\theta\varrho + TR - 2\,tr}{2\,Tt^2} + \frac{\theta'\varrho' + T'R' - 2\,t'r'}{2\,Tt^2} =$ (en menant les cordes $R\rho$, $R'\rho'$) $\frac{-ro - r'o'}{Tt^2}$. Maintenant faisons t constante & $= PT$, & x variable; prenons $Pp = p\pi = dx$, & supposons $dx = Tt$, ce qui est évidemment permis, nous aurons 1°. $At = x + t + dx$, $A\theta = x + t + 2\,dx$; 2°. faisant $T't'' = t''\theta'' = Pp = Tt$, nous aurons $At'' = x + dx - t$, $A\theta'' = x + 2\,dx - t$; donc menant la corde $R'\rho''$, on trouvera que ddy, en ne faisant varier que x, est $-ro - r''\omega$; donc $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-ro - r''\omega}{Pp^2}$. Il faut donc, pour que $\frac{ddy}{dx^2}$

ſoit égal à $\frac{ddy}{dt^2}$, que $r'o'$ ſoit $= r''\omega$, ou, ce qui eſt la même choſe, que la courbure au point r'' ſoit la même que la courbure au point r' infiniment proche; donc ſi la figure initiale de la courbe AMB eſt telle, que le rayon oſculateur change bruſquement en quelqu'un des points de cette courbe, la conſtruction de M. Euler n'aura pas lieu. Premier cas où cette conſtruction eſt fautive, quoique ce grand Géometre la prétende générale & ſans exception.

§. VIII. Second cas où cette même conſtruction eſt fautive; c'eſt celui où la courbure en A ne ſera pas infiniment petite; car alors en tranſportant, ſuivant la conſtruction de M. Euler, la courbe AM en AG dans une poſition contraire, on formera une courbe dont la courbure fera un ſaut en A, & qui par conſéquent retombera dans le cas précédent. On dira peut-être que ce cas n'eſt pas le même, parce que la courbure eſt égale aux points Q, Q', quoique les rayons oſculateurs y ſoient dirigés en ſens contraire. Pour répondre à ce ſubterfuge, je remarque qu'à la vérité les petites lignes Qq, $Q'q'$ ſont égales en prenant $AL = Ll = AL' = L'l'$, mais qu'elles doivent être priſes avec des ſignes différens. Car ſoit PT & $PT' = AP$, on a (en ne faiſant varier que t) $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{\theta\varrho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{l's' - 2L'Q'}{2Tt^2} = \frac{-ro + Q'q'}{Tt^2}$, & non pas

$\frac{-ro\ \ Q'q'}{Tt^2}$, parce que $l's' - 2Q'L' = -2Q'q'$, & que $l's'$ & $Q'L'$ doivent être prises négativement par leur position & par la construction de M. Euler. Maintenant, en ne faisant varier que x, on aura $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-ro - Qq}{dt^2}$; donc $\frac{ddy}{dx^2}$ ne sera pas $= \frac{ddy}{dt^2}$, si la courbure n'est pas nulle en *A*. Second cas où la construction de M. Euler n'a pas lieu.

§. IX. Troisiéme cas où elle n'a pas lieu, & par les mêmes raisons, c'est celui où la courbure n'est pas nulle en *B*. Cela se prouve comme dans l'article précédent, en imaginant, si l'on veut, l'origine des x transférée en *B*, pour rendre la démonstration plus simple. Donc en général, toutes les fois que la courbe *AMB* aura des sauts dans sa courbure, ou que la courbure ne sera pas nulle tant en *A* qu'en *B*, la construction de M. Euler n'aura pas lieu.

§. X. Pour rendre les démonstrations précédentes encore plus convaincantes, s'il est possible, je vais démontrer encore d'une autre maniere, que l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$, n'a point lieu dans la construction de M. Euler. Pour cela je considere que dans la solution générale ddy (en ne faisant varier que x) est la différence seconde de trois ordonnées consécutives, dont l'une répond à l'abscisse $x - dx$, l'autre à l'abscisse x, la troisiéme à l'abscisse $x + dx$; en effet le sommet de

l'angle de contingence $\frac{ddy}{dx}$ est supposé (dans la solution générale) à l'extrêmité de l'ordonnée qui répond à l'abscisse x. De plus ddy, en ne faisant varier que t, est la différence seconde (suivant la même solution) de trois ordonnées répondantes à la même x, la premiere pour le tems $t - dt$, la seconde pour le tems t, la derniere pour le tems $t + dt$; ainsi (*Fig.* 5.) faisant $AP = x$, $PT = PT' = t$, $Pp = P\pi = Tt = T\theta$ $= T't' = T'\theta' = dx$, on aura $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-Ro}{Pp^2} - \frac{R'o'}{Pp^2}$; faisons maintenant (*Fig.* 6.) $T\vartheta = T\tau = T'\tau' = T'\vartheta'$ $= dt$, en supposant, ce qui est permis, non plus $dt = dx$, mais dt différent de dx, plus grand ou plus petit à volonté; on aura $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{-R\Omega - R'\omega}{T\vartheta^2}$; d'où il est aisé de voir que $\frac{ddy}{dt^2}$ ne sera point égal à $\frac{ddy}{dx^2}$, si la loi de la courbure n'est pas uniforme. Car si, par exemple, la courbure faisoit des sauts en quelque point de l'arc $\sigma' RS'$ (*Fig.* 7.), on ne pourroit regarder $\frac{R'\omega}{T'\vartheta'^2}$ comme égale à $\frac{R'o'}{T'\theta'^2}$; cela est assez clair par soi-même; car ce n'est que dans un arc de courbure uniforme qu'on a $\frac{R'o'}{T'\theta'^2} = \frac{R'\omega}{T'\vartheta'^2}$. Mais pour le démontrer sans réplique, soient menées les cordes $\sigma'R'$, $\rho'R'$ prolongées jusqu'en L & en Q, il



eſt clair que $S' L = 2 R' \omega$, & $r' V = 2 R' o'$, puiſque (*hyp.*) $T' \tau' = T' \vartheta'$, & $T' t' = T' \theta'$; ainſi il ſuffira de prouver que $\frac{L S'}{T' \vartheta'^2}$ n'eſt point égal à $\frac{V r'}{T' \theta'^2}$ ſi la courbure n'eſt pas uniforme dans l'arc $\sigma' R' S'$. Pour cela, ſuppoſons que le point r' ſoit celui où la courbure fait un ſaut; enſorte que $\sigma' R' r'$, $r' S'$ ſoient deux arcs de cercle contigus, infiniment petits, de différente courbure, & ayant une tangente commune en r'; ſoit tirée la tangente $R' Z$, & ſoit continué l'arc $\sigma' R' r'$ en $r' S''$; ſoit r le rayon de l'arc $\sigma' R' r' S''$; on aura 1°. $Z S'' = r' u \times \frac{T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2}$; 2°. $\frac{V u}{R' V}$ = angl. $V R' u$ $= \frac{R' \varrho'}{2 r}$ & par conſéquent $V u = \frac{R' \varrho'^2}{2 r}$; 3°. $Q Z = \frac{V u . T' \vartheta'}{T' \theta'} = \frac{T' \theta' \times T' \vartheta'}{2 r}$; 4°. $Q L = \frac{K V \times T' \vartheta'}{T' \theta'} = \frac{T' \theta' \times \varrho' \sigma'}{2 r} \times \frac{T' \vartheta'}{T' \theta'} = \frac{T' \vartheta' \times \varrho' \sigma'}{2 r}$; donc $S'' L = \frac{r' u \times T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2} + \frac{V u \times T' \vartheta'}{T' \theta'} + \frac{V u \times K V}{V u}$ $\times \frac{T' \vartheta'}{T' \theta'} = \frac{r' u \times T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2} + V u \times \left(\frac{T' \vartheta'}{T' \theta'} + \frac{T' \vartheta' - T' \theta'}{T' \theta'} \right.$ $\left. \times \frac{T' \vartheta'}{T' \theta'} \right) = (r' u + V u) \frac{T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2} = \frac{V r' \times T' \vartheta'^2}{T' \theta'^2}$; donc $\frac{S'' L}{T' \vartheta'^2}$ eſt égal à $\frac{V r'}{T' \theta'^2}$; donc puiſque $S' L$ $= S'' L + S' S''$, & que $S' S''$ eſt du même ordre d'infiniment petit que $S'' L$, il s'enſuit que $\frac{S' L}{T' \vartheta'^2}$

n'eſt pas égal à $\frac{V\,r'}{T'\,\theta'^2}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

§. XI. Ne nous en tenons pas aux preuves de calcul, & joignons-y des preuves d'un autre genre, plus frappantes pour tous les Lecteurs. Voici la véritable raiſon métaphyſique, ſi je ne me trompe, pourquoi le mouvement de la corde ne peut être ſoumis à aucun calcul analytique, ni repréſenté par aucune conſtruction, quand la courbure fait un ſaut en quelque point *M* (*Fig.* 2.). C'eſt que dans ce cas il y a proprement au point *M* deux rayons oſculateurs différens, quoique coincidens quant à la direction, dont l'un appartient à la portion de courbe *M N*, l'autre à la portion de courbe *M A*. Or la force accélératrice en chaque point de la corde étant en raiſon inverſe du rayon oſculateur, lequel des deux rayons communs au point *M* doit ſervir à déterminer la force en ce point *M*? C'eſt ce qu'il eſt impoſſible de fixer, & il l'eſt par conſéquent auſſi de réſoudre le Problême dans ce cas-là. En effet ſuppoſons que la figure initiale de la corde ſoit compoſée de deux différentes courbes ainſi réunies en *M*; je demande à M. Euler quelle eſt la force accélératrice du point *M*, lorſque la corde commence à ſe mouvoir? Voilà donc la raiſon métaphyſique qui rend fautive la ſolution de M. Euler, lorſque la courbure de la courbe fait quelques ſauts. Voici maintenant pourquoi cette ſolution eſt fautive, lorſque la courbure n'eſt pas nulle, ſoit en *A*, ſoit en *B*. Soit *A B* (*Fig.* 8.) l'axe de la corde, *A M B* la

courbe initiale, PT le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, & tel que le point T soit infiniment proche de B, $Tt = BT$; $B\theta = BT$, $PT' = PT$, $Pt' = Pt$; $PB' = PB$, $P\theta' = P\theta$; soit enfin $Tt = dt$; la construction de M. Euler donne depuis la fin du tems $t - dt$ ou Pt, jusqu'à la fin du tems $t + dt$, la valeur de ddy (prise en ne faisant varier que t) $= \frac{ts - 2TS + B'Q' - 2T'S + t's'}{2}$; ce ddy est l'espace parcouru en vertu de la force accélératrice durant le tems dt, & représente cette force; & dans l'instant suivant le ddy, & par conséquent la force accélératrice est $\frac{TS - \theta\sigma + T'S' - 2B'Q' + \theta'\sigma'}{2}$. Maintenant si la courbure est finie en B, comme on le suppose, imaginons la courbe AMB continuée en $B\Sigma\beta$, ensorte que les parties $B\Sigma\beta$, AMB soient liées par la même équation, il est visible que $\Sigma\sigma$ sera un infiniment petit du second ordre, du même ordre que ddy; il est aisé de voir de plus que les deux ddy consécutifs, qu'on vient d'assigner, différeront de la quantité $\frac{\Sigma\sigma}{2}$, qui est du même ordre qu'eux. Donc la force accélératrice du point M, lorsque $PT = t$, passeroit brusquement & sans degrés, de la valeur qu'elle a en cet instant, à une autre valeur qui différe de cellelà d'une quantité du même ordre; ce qui est choquant, puisque la nature de la force accélératrice est de croître ou de décroître par degrés insensibles, & non brusque-

ment & par ſauts. Envain objecteroit-on que la *loi de continuité* n'eſt pas une loi générale, puiſqu'elle ne s'obſerve pas dans le choc des corps, même des corps élaſtiques. Je le ſais, & je ſuis même, ſi je ne me trompe, le premier qui aye fait cette importante remarque (*); je ſais encore que les loix du choc des corps ſont ſoumiſes au calcul analytique, quoique la loi de continuité n'y ait pas lieu. Mais le cas eſt bien différent; il s'agit ici d'une ſuite de points liés enſemble, dont le mouvement eſt ſuppoſé aſſujetti à une même équation analytique, & par conſéquent ne doit point ſouffrir de ſauts, parce que l'analyſe n'en ſouffre pas. Envain objecteroit-on encore que les ſauts dont il s'agit, doivent être regardés comme nuls, parce qu'ils ne ſe font que dans des parties infiniment petites. Avec un pareil raiſonnement, on ſoutiendroit qu'une courbe peut avoir des ſauts dans ſa courbure, parce que ces ſauts ne ſe faiſant que dans des parties infiniment petites, ils ſont cenſés s'évanouir. Je ne crois pas cependant qu'aucun Géometre voulût admettre une pareille aſſertion. La raiſon en eſt bien ſimple; c'eſt que s'il y avoit un ſaut dans le ddy, il y en auroit un dans le $\frac{ddy}{dx^2}$, qui eſt une quantité finie; ce qui ſeroit abſurde.

§. XII. A cette conſidération, ajoutons-en une nou-

(*) Voyez les Mémoires de Berlin 1751, To. 7, pag. 338, & l'Eloge que j'ai publié de M. Jean Bernoulli en 1748.

velle.

velle. Qu'on se représente la corde au commencement de son mouvement ; si la courbure n'est pas nulle en B, le rayon osculateur y sera donc fini ; par conséquent la force accélératrice y sera aussi finie, & tendra à donner du mouvement au point B ; cependant ce point étant fixement arrêté, est incapable de se mouvoir ; ainsi d'un côté $\frac{ddy}{dx^2}$ est finie lorsque $x = AB$, & lorsque $t = o$; & de l'autre $\frac{ddy}{dt^2}$ est toujours $= o$ au point B quelle que soit la valeur de t ; c'est encore-là une raison convaincante pourquoi la solution ne peut avoir lieu, lorsque la courbure est finie en B. La nature en ce point arrête, pour ainsi dire, brusquement le calcul ; on a deux forces accélératrices voisines & infiniment peu différentes, l'une au point B, l'autre au point infiniment proche de celui-là ; la seconde de ces forces produit un mouvement, la premiere n'en sçauroit produire, quoique par l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$ elle paroisse devoir en produire un, lorsque $\frac{ddy}{dx^2}$ n'est pas $= o$; ainsi la loi du mouvement n'étant pas continue pour tous les points de la courbe, ne peut être représentée avec exactitude par l'équation dont il s'agit. L'état forcé du point B au premier instant influe ensuite sur les points voisins, & ceux-là insensiblement sur tous les autres ; ensorte que le mouvement de tous ces points ne sçauroit être assujetti à une loi uniforme. Or il faut que la loi soit

uniforme pour pouvoir être exprimée & représentée par une équation analytique.

§. XIII. Pour répondre maintenant à la démonstration que M. Euler croit avoir donnée, pag. 212 & suiv. de l'égalité $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$, qu'il prétend être observée dans sa construction, il est bon d'examiner directement en quoi cette démonstration péche. Le voici : M. Euler suppose dans son calcul ce qui n'a pas lieu dans sa construction, savoir que $\varphi\,(x+t)$ & $\varphi\,(x-t)$ sont toujours de même forme. Pour le faire voir bien clairement, je suppose que $z = ax - xx$ soit l'équation de la courbe initiale. Par la construction de M. Euler, on aura (tant que x sera $>$ ou $= t$, & $x + t < a$)

$$y = \frac{a\,(x+t) - \overline{x+t}^2}{2} + \frac{a.\overline{x-t} - \overline{x-t}^2}{2};\&$$

quand x sera $< t$, on aura $y = \frac{a\,(x+t) - \overline{x+t}^2}{2}$ $+ \frac{a.\overline{x-t} + \overline{x-t}^2}{2}$; où l'on voit que ces deux fonctions different en ce que quand x est $> t$, sans que $x + t$ soit $> a$, on a $- \overline{x-t}^2$, & quand x est $< t$, on a $+ \overline{x-t}^2$. Donc si on a $x = t$, & qu'on fasse croître t des quantités dt & $2\,dt$, en ce cas, comme x est $< t + dt$ & $< t + 2\,dt$, on aura, en ne faisant varier que t, & en observant que $x - t = o$, les trois valeurs successives de y répondantes à t, $t + dt$, $t + 2\,dt$,

exprimées en cette sorte; $y = \frac{ax + at - \overline{x+t}^2}{2}$;

$y' = \frac{ax + at + adt - \overline{x+t}^2 - 2dt.\overline{x+t}}{2} - \frac{dt^2}{2}$

$- \frac{adt}{2} + \frac{dt^2}{2}$; $y'' = \frac{ax + at + 2adt}{2} - \frac{\overline{x+t}^2}{2}$

$- \frac{4dt.\overline{x+t}}{2} - \frac{4dt^2}{2} - \frac{2adt}{2} + \frac{4dt^2}{2}$;

donc $\frac{ddy}{dt^2}$, ou $\frac{y'' + y - 2y'}{dt^2} = o$, comme il est aisé de s'en assurer par le calcul. Donc $\frac{ddy}{dt^2} = o$. Maintenant faisons augmenter x de la quantité dx & $2dx$; & comme $x + dx$ & $x + 2dx$ sont $> t$, puisque $x = t$ (hyp.); on aura, en ne faisant varier que x,

$y = \frac{ax + at}{2} - \frac{\overline{x+t}^2}{2}$, $y' = \frac{ax + at + adx}{2}$

$- \frac{\overline{x+t}^2}{2} - \frac{2dx.\overline{x+t}}{2} - \frac{dx^2}{2} + \frac{adx}{2}$

$- \frac{dx^2}{2}$; $y'' = \frac{ax + at}{2} - \frac{\overline{x+t}^2}{2} - \frac{4dx.\overline{x+t}}{2}$

$- \frac{4dx^2}{2} + \frac{2adx}{2} - \frac{4dx^2}{2}$; donc $\frac{ddy}{dx^2}$ ou

$\frac{y'' + y - 2y'}{dx^2} = \frac{-2dx^2}{dx^2} = -2$; donc $\frac{ddy}{dx^2}$ n'est pas $= \frac{ddy}{dt^2}$, même dans la démonstration de M. Euler, parce que la quantité qu'il appelle $\frac{1}{2}\varphi''(x-t)$ est ici $= o$ pour $\frac{ddy}{dt^2}$ & $= -2$ pour $\frac{ddy}{dx^2}$. Voici

en général à quoi tient la méprise de M. Euler ; c'est que quand on exprime par φz, ainsi que ce grand Géometre, une fonction dont la forme n'est pas constante, il peut arriver, comme il arrive en effet ici, que deux valeurs de $\varphi'' z$ (c'est-à-dire de $\frac{d\,\varphi' z}{d z}$ ou $\frac{d\,d\,\varphi z}{d z^2}$) répondantes, l'une à z, l'autre à $z + dz$, different d'une quantité finie ; or, pour que la démonstration de M. Euler ait lieu, il faut que ces deux valeurs ne different jamais qu'infiniment peu ; sans quoi on ne pourroit supposer que $\varphi''(x - t)$ dans $\frac{d\,d\,y}{d x^2}$ est le même que dans $\frac{d\,d\,y}{d t^2}$.

§. XIV. Ainsi la construction de M. Euler n'a pas lieu, toutes les fois que la courbure de la courbe *AMB* fait un saut en quelque point *M*, ou qu'elle n'est pas nulle, tant en *A*, qu'en *B*. Aucun de ces deux inconvéniens n'a lieu dans ma solution ; car lorsque les courbes *AMB* (*Fig. 9.*), *Bμa*, *Amb* &c. sont assujetties à une même loi, 1°. la courbe *AMB* n'a point de sauts dans sa courbure, puisque tous ses points sont assujettis à une même équation ; 2°. la courbure en *A* & en *B* est nulle, puisque la similitude des parties *AMB*, *Bμa*, *Amb* &c. donne à la courbe (supposée continue) un point d'inflexion en *A* & un en *B*, ensorte que la courbure est nulle en ces deux points.

§. XV. Il est donc démontré que la solution de M. Euler n'est pas aussi générale qu'il le prétend ; allons plus

loin, & prouvons que sa construction ne peut jamais avoir lieu que dans les cas où la suite infinie des courbes *AMB*, *B*μ*a*, *Amb* &c. est assujettie à la même équation.

Il est bon de prévenir d'abord une difficulté, dont la solution nous servira à simplifier la question. Quelques Géometres fondés sur le raisonnement suivant, objecteront peut-être, qu'il suffit que les trois seules courbes *ACB* (*Fig. 9*), *A*γ*b*, *B c a* soient assujetties à une même loi, sans s'embarrasser si cette même loi a lieu dans les autres courbes qu'on leur joint à l'infini. Il est certain, dira-t-on, que si les trois courbes sont liées par une même équation, l'équation $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$ subsistera tant que t ne sera pas plus grand que AB; il est certain de plus que quand t sera $= AB$, la corde *ACB* sera parvenue dans une situation $AC'B$ parfaitement semblable à *ACB*, mais seulement dans une position renversée; ensorte que prenant $AP' = BP$, on aura $PM'' = P'M$; cela est aisé à prouver, puisqu'en faisant Pp & $P\pi = AB = t$, ce qui donne $a\pi = Ap$, & par conséquent $\pi\mu = pm$, on aura par la construction de M. Euler & par la nôtre, $PM'' = \frac{\pi\mu + pm}{2} = pm = P'M'$ pris dans un sens contraire. Donc, dira-t-on, après le tems $t = AB$, la corde est dans le même état qu'au commencement du mouvement; donc elle doit recommencer à se mouvoir suivant la même loi qu'auparavant; & on aura en général le

mouvement de la corde, en suivant la construction de M. Euler & la nôtre, pourvû que les trois courbes *ACB*, *Aγb*, *Bca*, soient liées par une même loi, sans s'embarrasser si les autres le sont.

§. XVI. La réponse à cette difficulté est bien simple; c'est que si les trois courbes sont liées par une même loi, toutes les autres à l'infini le seront par cette même loi. En effet, que faut-il pour que les trois courbes soient liées par une même loi? Il faut; 1°. supposant l'origine des x en A, que la valeur de y en x n'ait que des puissances impaires; ce qui rend les courbes *ACB*, *Aγb*, semblables & de position contraire; 2°. faisant $x - a = z$, & mettant par conséquent l'origine des z en B, il faut que la valeur de y en z n'ait aussi que des puissances impaires, afin que les courbes *BCA*, *Bca* soient semblables & de position contraire. Or, puisque la valeur de y en x ne contient que des puissances impaires, & que la valeur de y en x, en faisant $x - a = z$, ne contient aussi que des puissances impaires, il s'ensuit que dans la substitution de $z + a$ à la place de x dans l'équation, tous les termes où z est paire disparoîtront. Or dans tous ces termes, a est élevé à une puissance impaire, puisqu'il n'y a que des puissances impaires de x; donc ces termes disparoîtroient de même, en substituant $z - a$ à la place de x; ou, ce qui revient au même, en faisant $x + a = z$, & en transportant l'origine des z au point b. Donc l'équation de la courbe étant prise du point b, la valeur de y n'aura que des puissances im-

paires. Donc la continuation de la courbe $A\gamma b$ ſera liée par une même loi avec cette courbe, & par conſéquent auſſi avec ACB. On prouvera de même, en prenant l'origine des x & des y, non plus au point A, mais au point B, que la continuation de la courbe Bca au-delà de a ſera liée par une même loi avec les courbes Bca, ACB. Donc &c.

On peut remarquer en paſſant, que ſi les courbes AMB, Amb ſont égales, ſemblables & liées par une même équation, & que la courbe AMB ſoit composée de deux parties égales & ſemblables, la courbe AMB aura encore, comme dans le cas précédent, des branches alternatives & égales à l'infini. Car la valeur de y en x eſt alors toute formée de puiſſances impaires; & ſi on met $\frac{AB}{2} - u$ à la place de x, elle n'aura plus que des puiſſances paires. Donc la même choſe arrivera, ſi on met $\frac{AB}{2} + u$ au lieu de $\frac{AB}{2} - u$; & faiſant $\frac{AB}{2} + u = z$, c'eſt-à-dire, mettant l'origine en B, la fonction de z qui en viendra, n'aura que des puiſſances impaires. Donc &c.

§. XVII. La queſtion ſe réduit donc à prouver que les trois courbes ACB, Bca, Amb doivent être liées par une même équation; ou, ce qui revient au même, que $\varphi\, x$ doit être impaire, ſoit qu'on prenne l'origine des x en A ou en B. Or c'eſt ce que nous prouvons; 1°. par l'aveu même que M. Euler en fait en ter-

mes formels, & qui a été rapporté ci-dessus, §. VI. 2°. par cette considération, que quand $x = o$ ou $= AB$, $\frac{ddy}{dx^2}$ doit être $= o$ quel que soit t, parce que $\frac{ddy}{dt^2}$ est toujours égale à zero, quand $x = o$ ou $= AB$; or, pour que $\frac{ddy}{dx^2}$ soit toujours $= o$ quand $x = o$ ou $= AB$, il faut nécessairement que $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$ soient des fonctions impaires, soit que l'on prenne l'origine des x en A ou en B. M. Euler objectera peut-être en abandonnant sa premiere assertion, qu'il n'est pas nécessaire que φx soit impaire, pour que $\frac{ddy}{dx^2}$ soit $= o$, qu'il suffit que $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$ ne conservent pas toujours la même forme. A cela je répondrai d'abord qu'il a lui-même tacitement supposé cette identité de forme dans la démonstration qu'il a donnée de la conformité de sa construction avec l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$, comme je l'ai démontré plus haut, & qu'ainsi il faut, ou qu'il abandonne sa démonstration, ou qu'il convienne de l'identité de forme des quantités $\varphi(x+t)$ & $\varphi(x-t)$. J'ajoute qu'il est contre toutes les régles de l'analyse, de faire ainsi changer de forme, suivant le besoin qu'on croit en avoir, à l'intégrale d'une équation differentielle; en effet, si l'intégrale $y = \varphi(x+t) + \varphi(x-t)$ de l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$ ne conservoit

servoit pas une forme constante, ne pourroit-on pas dire aussi, par exemple, que l'intégrale de l'équation différentielle $ds = \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$ entre les arcs s d'un cercle & les abscisses x correspondantes, peut être supposée de forme variable, suivant la grandeur des arcs s qui répondent à une même abscisse; ce qui renverseroit la démonstration généralement admise de l'impossibilité de la quadrature indéfinie du cercle?

§. XVIII. Mais pour attaquer l'assertion de M. Euler par une preuve plus directe, j'ajoute que la solution du Problême portera absolument à faux, si on se permet de faire changer de forme à $\varphi(x+t)$ & à $\varphi(x-t)$. Pour le faire voir, considérons de quelle maniere l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$ conduit à l'équation $y = \varphi(x+t) + \Psi(x-t)$. Nous avons donné au commencement de ce Mémoire une méthode fort simple pour cela; & cette méthode qui s'accorde avec celle des Mémoires de Berlin de 1747, se réduit à prouver qu'en supposant $\frac{dy}{dx} = q$, & $\frac{dy}{dt} = p$, les différentielles $p\,dt + q\,dx$ d'une part, & $p\,dx + q\,dt$ de l'autre, seront des différentielles complettes; d'où il est aisé de conclure que $y = \varphi(x+t) + \Psi(x-t)$. Or comment conçoit-on que $p\,dx + q\,dt$, & $p\,dt + q\,dx$ représentent des différentielles complettes, si les fonctions de x & de t dont ces quantités sont les différences, sont des fonctions

qui changent de forme? M. Euler dira peut-être (car je veux prévenir toutes les objections, même celles qu'il ne penseroit peut-être pas à me faire) que si on fait $x+t=u$, & $x-t=r$, on aura $p\,dx+q\,dt=du\,\Delta u+dr\,\Gamma r$ & $p\,dt+q\,dx=du\,\Delta u-dr\,\Gamma r$, qui sont toutes les deux, dira-t-il, des différentielles complettes, parce qu'on peut les représenter par la quadrature de deux courbes tracées à volonté, dont les abscisses sont u & r, & les ordonnées Δu & Γr, sans qu'il soit nécessaire que Δu, ni Γr expriment des fonctions toujours de même forme. A cela voici ma réponse. 1°. Il s'ensuivroit de ce raisonnement que l'équation $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{ddy}{dt^2}$ auroit toujours lieu, en supposant $y=\varphi(x+t)+\Psi(x-t)$, & en faisant changer de forme à volonté aux fonctions $\varphi(x+t)$ & $\Psi(x-t)$; au lieu que nous avons démontré invinciblement ci-dessus, qu'il y a une infinité de cas où l'équation $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{ddy}{dt^2}$ n'aura point lieu, si on se donne la liberté de faire changer de forme à ces fonctions. Pour rendre cette remarque encore plus palpable, je suppose que l'on ait à rendre $p\,dx-p\,dt$ une différentielle complette, on trouvera que l'intégrale est $\Pi(x-t)$. Mais s'ensuivra-t-il de-là qu'on pourra faire changer de forme à volonté à la fonction $\Pi(x-t)$, parce que faisant $x-t=r$, Πr représentera l'ordonnée d'une courbe tracée à volonté, dont l'abscisse sera r? Nullement. En effet, supposons cette courbe arbitraire tracée de maniere, qu'au point

où $x=b$, ses deux portions fassent un angle fini ; faisons $x-t=b$, on trouvera facilement que la différence de Πr, en faisant varier x, c'est-à-dire, en supposant $x-t=b+dx$, est très-différente de la différence de Πr, en faisant varier t, c'est-à-dire, en supposant $x-t=b-dt$; donc la solution seroit fautive, puisque la différence de $\Pi\,(x-t)$ ne seroit pas $p\,dx$ $-p\,dt$; ce qui est contre l'hypothèse. 2°. Si la valeur de y change de forme, j'avoue que je ne puis me faire une idée nette de ce que c'est que les quantités $\frac{ddy}{dx^2}$ & $\frac{ddy}{dt^2}$, dans lesquelles on suppose que la différence de y est prise deux fois de suite en ne faisant varier que x, ou en ne faisant varier que t. Par exemple, lorsque y passe d'une forme à une autre, & que par conséquent la valeur de y renferme une nouvelle fonction de x & de t, ajoutée à la précédente, qu'est-ce alors que $\frac{ddy}{dx^2}$, & quelle idée distincte peut-on s'en former ? 3°. Si dans l'équation $\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{dx}$ on suppose que p & q puissent changer de forme, le Problême demeurera indéterminé. Ceci a besoin d'une plus grande explication.

§. XIX. Soit tracée à volonté & sans aucune régle, une courbe BM (*Fig.* 10.) dans laquelle l'ordonnée y soit une fonction de AP, x, & d'un parametre t; fonction qu'on suppose ici ne pas conserver toujours la même

forme; ſoit enſuite imaginée la courbe $b\,m$ infiniment proche de celle-là, & tracée auſſi à volonté. Quelle que ſoit la fonction (variable ou non variable) de x & t, qui repréſente $P\,M$, il eſt certain qu'on peut ſuppoſer $Q\,\mu = p\,d\,x$, $q\,\mu' = p'\,d\,x$, $M\,m = q\,d\,t$, & $\mu\,\mu' = q'\,d\,t$, ſans qu'il ſoit néceſſaire que $p\,d\,x + q\,d\,t$ ſoit une différentielle exacte, ni que les quantités q & q', p & p' ſoient de la même forme. Il eſt de plus évident qu'on aura en général $q\,\mu' - Q\,\mu = \mu\,\mu' - M\,m$; d'où l'on conclura (à la maniere de M. Euler) que $\frac{p' - p}{d\,t} = \frac{q' - q}{d\,x}$; ou $\frac{d\,p}{d\,t} = \frac{d\,q}{d\,x}$, en ne faiſant varier dans le premier membre que t, & dans le ſecond que x; & en ſuppoſant d'ailleurs, ſi on le juge à propos, que les quantités p & q ſoient de forme variable. Donc, quand on conclud de l'équation $\frac{d\,q}{d\,x} = \frac{d\,p}{d\,t}$, que $p\,d\,x + q\,d\,t$ eſt une différentielle complette (comme on le conclud dans la ſolution du Problême des cordes vibrantes) cette concluſion renferme implicitement & néceſſairement celle-ci, que p & q ne changent point de forme. Donc ſi on ſe permet de faire changer de forme à ces fonctions, on ne pourra plus regarder $p\,d\,t + q\,d\,x$ comme une différentielle complette, & le Problême ne pourra plus être réſolu, & *reſtera tout-à-fait indéterminé.*

§. XX. La conſtruction de M. Euler ne ſatisfait donc qu'en apparence à la ſolution du Problême; tout

ce que nous avons dit le démontre assez ; ajoutons, pour derniere réfléxion, qu'il n'est permis de placer alternativement au-dessus & au-dessous de l'axe AB, les courbes ACB, Amb &c. (*Fig. 9.*) qu'autant que ces courbes tiennent à une même équation. Autrement, de quel droit regardera-t-on pm comme négative par rapport à PM, puisque ce n'est pas la valeur analytique de pm qui oblige de la prendre au-dessous de l'axe, mais une construction arbitraire, uniquement imaginée pour satisfaire à cette condition, que les points A & B soient toujours en repos ?

§. XXI. Au reste je ne suis point du tout dans le sentiment que M. Euler m'attribue, que *le mouvement de la corde ne sauroit être déterminé, à moins que sa figure ne soit comprise dans l'équation* $y = \alpha$ sin. $\frac{\pi x}{a}$ $+ \beta$ sin. $\frac{2\pi x}{a}$ $+ \gamma$ sin. $\frac{3\pi x}{a}$ &c. J'ai seulement prétendu que la solution n'est possible que dans le cas où les courbes semblables & égales AMB, $B\mu a$, Amb &c. & ainsi à l'infini, sont assujetties à la loi de continuité ; ce qui peut arriver d'une infinité de manieres, sans qu'elles soient assujetties à l'équation particuliere $y = \alpha$ sin. $\frac{\pi x}{a}$ $+ \beta$ sin. $\frac{2\pi x}{a}$ $+ \gamma$ sin. $\frac{3\pi x}{a}$ $+$ &c. dont je n'ai pas même parlé. Il est aisé de voir par les articles IX. & XXVI. de mon Mémoire imprimé parmi ceux de Berlin de 1747, que par le moyen

des courbes géométriques ou méchaniques qui rentrent en elles-mêmes, on peut trouver une infinité de figures différentes de la corde, qui toutes rendront la ſolution poſſible. Il reſteroit à M. Euler à faire voir que toutes ces figures ſeroient compriſes dans l'équation $y = \alpha \text{ ſin.} \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ ſin.} \frac{2 \pi x}{a} + \gamma \text{ ſin.} \frac{3 \pi x}{a} +$ &c. Or c'eſt ce qui me paroît impoſſible ; & en cas que M. Euler voulût en diſconvenir, ce que je ne crois pas, il en trouvera plus bas la preuve dans un des articles de ma réponſe à M. Bernoulli.

§. XXII. Mais, dira ſans doute M. Euler, quelle doit donc être en général la loi du mouvement de la corde, lorſqu'elle aura au commencement une figure quelconque ? Je réponds, comme je l'ai déja fait ailleurs, que dans pluſieurs cas le Problême ne pourra être reſolu, & ſurpaſſera les forces de l'analyſe connue. Je ne ſai même ſi l'on peut trouver dans tous les cas, d'une maniere approchée, le mouvement de la corde, en la ſuppoſant diviſée en un grand nombre de particules égales, & en cherchant ſéparément le mouvement de chaque particule, ſuivant les méthodes que j'ai données ailleurs pour cela.

J'ai déja remarqué dans les Mémoires de Berlin de 1750, pag. 359, que ſi on regardoit la corde comme un fil élaſtique ſans maſſe, chargé d'un poids à ſon milieu, le tems des vibrations ſeroit bien différent de celui

que la théorie donne dans d'autres hypotheſes plus conformes à la nature. Si on ſuppoſe la corde chargée de deux poids P, qui la diviſent en trois parties égales, & ces poids tellement diſpoſés qu'ils arrivent en même-tems dans la ligne droite qui joint les deux extrémités de la corde, on trouvera, en nommant l la longueur de la corde exprimée en pieds, & φ la force de tenſion de cette même corde, que le tems d'une vibration eſt $\frac{1 \text{ ſec. } \pi \sqrt{l} . \sqrt{P} \sqrt{2}}{2\sqrt{15} . \sqrt{3} . \sqrt{\varphi}}$; (voyez les Mémoires de Berlin 1750, pag. 359.). Le tems ſera d'autant plus petit, que les deux poids ſeront plus près des extrémités de la corde; enſorte que ſi la diſtance d'un des poids à l'extrémité la plus voiſine eſt $\frac{l}{n}$, le tems ſera diminué en raiſon de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{n}$. Il eſt vrai que ces différentes ſuppoſitions repréſentent peu exactement le véritable état de la corde; il faudroit ſuppoſer un beaucoup plus grand nombre de poids, tous égaux, & placés à la même diſtance les uns des autres. Mais je ne ſais encore une fois, ſi dans ce cas le réſultat du calcul repréſenteroit toujours le mouvement approché de la corde. Il ſuffit, pour être réſervé dans cette aſſertion, de ſe rappeller qu'un arc, même infiniment petit, de courbure finie, ne doit pas toujours être confondu avec ſa corde, ſur-tout lorſque cette courbure influe dans la valeur des forces accélératrices, comme elle y influe ici. C'eſt par cette raiſon que la chûte par un arc de cercle infiniment petit, n'eſt

pas la même que par la corde de cet arc. Or il pourroit en être ainsi, & par la même raison, des cordes vibrantes; & c'en est assez pour nous faire douter si on peut regarder légitimement la courbe vibrante, au moins dans tous les cas, comme un polygone d'un très-grand nombre de côtés. Au reste, supposé que cette hypothese fût légitime, on pourroit en tirer une nouvelle preuve contre la solution de M. Euler; car s'il étoit vrai, comme il résulte de sa solution, que les points de la courbe vibrante arrivassent toujours en même-tems à la situation rectiligne, quand cette courbe est composée de deux parties quelconques égales & semblables, il s'ensuivroit que tous les points du polygone vibrant circonscrit à cette courbe arriveroient aussi sensiblement en même-tems à la ligne droite, ce qui n'est pas.

§. XXIII. On objectera peut-être, qu'il est impossible d'expliquer dans ma théorie, pourquoi la corde frappée d'une maniere quelconque, rend toujours à peu près le même son; puisque ses vibrations, selon moi, peuvent être très-irrégulieres en plusieurs cas. J'en conviens; mais je suis persuadé que la solution de cette question n'appartient point à l'Analyse: elle a fait tout ce qu'on étoit en droit d'attendre d'elle; c'est à la Physique à se charger du reste.

D'ailleurs il y a une infinité de cas, même dans l'hypothese & la solution de M. Euler, où les points de la corde n'arriveront pas en même-tems à la situation *AB*; & il sera tout aussi difficile d'expliquer dans ces

cas-

cas-là comment la corde rend toujours le même ſon que dans les autres. Je pourrois ajouter, que ſuivant la ſolution même de M. Euler, les vibrations de la corde devroient durer continuellement ; au lieu que l'expérience nous prouve qu'elles ceſſent bientôt : d'où il s'enſuit néceſſairement que dans tous les cas le mouvement réel de la corde donné par l'expérience eſt très-différent de celui qu'on trouve par le calcul.

La maniere ordinaire, pour ne pas dire l'unique, de faire ſortir une corde de ſon état de repos, c'eſt de la prendre par un de ſes points & de la tendre en la tirant, ce qui lui donne la figure de deux lignes droites qui font un angle entr'elles. Or M. Euler croit-il que dans ce cas ſa conſtruction puiſſe être admiſe, & donne le vrai mouvement de la corde ? Je doute qu'il ait cette prétention, d'autant que l'équation $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$ n'aura pas lieu dans ce cas-là, & que d'ailleurs les tems des vibrations des parties de la corde ſeront différens, ſelon le point par lequel elle ſera tirée ; ce qui eſt contraire à l'expérience, qui nous prouve que la corde rend toujours le même ſon dans tous les cas.

Ce qu'on peut dire, ce me ſemble, de plus vraiſemblable pour concilier l'expérience avec la théorie, c'eſt que la réſiſtance de l'air & le frottement des parties de la corde étant les deux cauſes principales qui en font ceſſer les vibrations, & qui par conſéquent font arriver à la fois tous les points dans l'état de repos, ces deux

causes dont l'action s'exerce suivant une loi qui ne nous est pas connue, obligent la corde à prendre en assez peu de tems la figure nécessaire pour que tous ses points arrivent en même tems à la situation rectiligne, figure qui peut être différente de la Trochoïde de M. Taylor, & même d'une Trochoïde composée, comme j'espere le prouver dans un moment.

Si l'on regardoit comme une force constante la résistance qui s'oppose au mouvement de la corde, ce qui vraisemblablement n'est pas fort éloigné d'être vrai, on auroit $\frac{ddy}{dx^2} + A = \frac{ddy}{dt^2}$ & $y = \varphi(x+t) + \Psi(x-t) + Bxx + Ctt$, B & C désignant des constantes convenables. Mais cette équation même ne pourroit représenter le vrai mouvement de la corde conformément à l'expérience, que dans le cas où tous les points arriveroient en même-tems à la situation rectiligne, avec une vitesse $= o$. Or c'est ce qui ne pourroit avoir lieu tout au plus que dans certains cas particuliers de cette équation générale.

§. XXIV. Je viens présentement aux objections de M. Daniel Bernoulli. Il me semble que M. Euler y a parfaitement satisfait; j'ajouterai seulement les observations suivantes, qui ne serviront qu'à confirmer les siennes.

1°. Il me paroît impossible de prouver, comme le prétend M. Bernoulli, que toutes les courbes de la corde vibrante puissent être renfermées dans l'équation

$$y = \alpha \sin.\frac{\pi x}{a} + \beta \sin.\frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin.\frac{3\pi x}{a} \&c.$$

en supposant même que cette courbe de la corde vibrante soit méchanique, & composée de parties égales & semblables, situées alternativement au-dessus & au-dessous de l'axe, & liées par la loi de continuité. Je n'objecte point à M. Bernoulli des courbes algébriques, comme a fait M. Euler, art. IX. de son Mémoire; parce que ces courbes, comme je l'ai prouvé, ne peuvent représenter la courbe initiale, dans le cas où la solution analytique du Problême est possible. Mais il y a une infinité d'autres cas dans lesquels la solution analytique est possible, quoique la courbe ne puisse être représentée par l'équation rapportée ci-dessus. En effet, supposons, par exemple, une courbe ovale & rentrante en elle-même $AmDBE$ (*fig.* 11.) dont les deux parties ADB, AEB soient différentes si l'on veut, mais dans laquelle la partie DB soit égale & semblable à la partie AD, & la partie BE à la partie EA; soit pris $PM =$ à n fois l'arc Am, ou le segment APm, ou tous les deux ensemble (n étant un nombre très-grand, & AC une très-petite ligne par rapport à AO); on aura (art. XXIV. de mon Mémoire de 1747) une courbe transcendante $LAORr$, du nombre de celles qui rendent la solution du Problême possible, lorsqu'on suppose que la corde a au commencement du mouvement la figure $LAORr$; car la partie ORr sera égale & semblable à la partie LAO, & semblablement située au-

dessous de l'axe $C O$, & ainsi à l'infini; & de plus si les parties $A O$, $A L$ sont égales & semblables, c'est-à-dire, si la courbe $A D B E$ est coupée en deux parties égales & semblables par l'axe $A B$, les points de la courbe arriveront au même instant dans la situation rectiligne. Donc pour que l'équation $y = \alpha \text{ sin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ sin. } \frac{2 \pi x}{a}$ + &c. représentât en général cette courbe, il faudroit qu'en nommant $C P$, y, & l'arc $D m$ ou l'espace $C D m P$, u, l'équation entre y & u fût en général $y = A$ sin. $a u$ + B sin. $b u$ + C sin. $c u$ + &c. à l'infini, $A D B E$ étant une courbe ovale quelconque, telle que $A D = D B$ & $B E = A E$. Or je ne crains point d'avancer que cela est impossible; & quand même il y auroit des courbes dont on pourroit réduire l'équation à cette forme par le moyen des series, M. Bernoulli sait aussi-bien que moi combien la méthode de représenter l'équation d'une courbe par une serie, peut être souvent fautive ou peu exacte, soit par la divergence des series, soit par leur peu de convergence.

2°. Si on décrit une courbe quelconque $A V C B$, telle qu'elle coupe son axe en A & en C, & que les deux parties $A V C$, $C B$, soient égales, semblables & de situation contraire, & qu'on fasse $P M = m . P V + n$ fois l'arc $A m$ + k fois le segment $A P m$, on aura une courbe $A M R r$ &c. beaucoup plus générale que la précédente, & qui satisfera encore au Problême. Or je demande comment cette courbe pourra être représentée

par l'équation $y = \alpha$ sin. $\frac{\pi x}{a} + \beta$ sin. $\frac{2 \pi x}{a}$ + &c? Par exemple, si on fait $PM = z$, & que l'on ait les équations $z = m(b^2 y - y^3) + nu$ (b étant $= AC$); & $B - x = m.(b^2 y - y^3) + nD - nA$ sin. y (B étant $= CO$, $D = AD$, & A sin. y marquant l'angle dont le sinus est y) je demande comment on tirera de-là l'équation en y ci dessus ?

3°. La source des méprises de M. Bernoulli en cette matiere, vient, si je ne me trompe, de ce qu'il a trop légérement conclu du fini à l'infini. Je m'explique. Lorsqu'une corde vibrante est chargée d'un nombre fini de poids, il est incontestable qu'on peut regarder les vibrations de chaque poids, comme composées d'autant de vibrations synchrones qu'il y a de poids; le calcul le démontre, *quelle que soit la figure initiale de la corde*. Mais s'ensuit-il de-là, que lorsque le nombre des poids est infini, on puisse regarder toujours le mouvement de la corde comme composé de plusieurs vibrations Tayloriennes? Non certainement. En effet il faudroit, pour que cette conclusion fût juste, qu'on pût toujours regarder la figure initiale comme un mélange de Trochoïdes, *quelle que fût cette figure initiale*; or c'est ce qui n'est pas. Car soit en général $y = \alpha$ sin. $\pi x + \beta$ sin. $\mu x + \gamma$ sin. νx &c. l'équation prétendue de la corde; on auroit donc lorsque $x = o$, $ddy = o$; c'est-à-dire que la courbure de la corde seroit nulle à l'origine; donc l'équation dont il s'agit, ne peut représenter la corde

toutes les fois que la courbure ſera finie ou infinie à l'origine ; & j'ai prouvé ci-deſſus que dans une infinité d'autres cas, où la courbure eſt même nulle à l'origine, l'équation dont il s'agit ne repréſenteroit pas d'une maniere plus exacte la figure initiale. Pour le faire ſentir par un exemple très-ſimple, je ſuppoſe, ce qui eſt le cas le plus ordinaire, que la corde ait au commencement la figure d'un triangle iſoſcele ; il eſt certain que la courbure ſera nulle aux extrémités, & il ne l'eſt pas moins que la figure de la corde ne peut être repréſentée par l'équation $y = \alpha$ ſin. $\pi x + \beta$ ſin. $\pi x + \gamma$ ſin. νx &c. puiſque cette équation appartient évidemment à une courbe dont la courbure eſt continue, au lieu que dans le cas préſent la courbure de la corde varie bruſquement au point milieu, où les deux parties font un angle. M. Bernoulli ne me répondra pas ſans doute que dans ce cas, ſuivant mes principes, on ne peut trouver analytiquement le mouvement de la corde; cette réponſe ne ſeroit pas valable (dans ſon hypotheſe); puiſque, comme je l'ai remarqué, ſa ſolution, ſi elle eſt bonne en général, doit donner l'équation $y = \alpha$ ſin. $\pi x + \beta$ ſin. $\mu x + \gamma$ ſin. νx &c. pour toutes les courbes imaginables.

4°. Ce grand Géometre a bien ſenti, comme il paroît par le Journal des Savans de Mars 1758, la difficulté qu'on pouvoit lui faire ſur la concluſion qu'il tire du nombre fini des corps au nombre infini ; il ſe contente de répondre, que ſi cette difficulté eſt fondée, la conſtruction de M. Euler ne doit pas avoir lieu non plus pour

tous les cas possibles, parce qu'elle ne peut, à la rigueur, s'appliquer aux cas où la courbure n'est pas nulle aux extrémités. Mais après tout ce que j'ai dit ci-dessus, on sent assez que cette difficulté ne touche qu'à la solution de M. Euler, & non pas à la mienne. Pour que la solution de M. Bernoulli rendît la mienne inutile, il faudroit qu'il prouvât; 1°. que toute courbe composée à l'infini de parties égales & semblables, alternativement situées au-dessus & au-dessous de l'axe, peut être représentée par l'équation $y = \alpha$ sin. $\pi x + \beta$ sin. $\mu x + \gamma$ sin. νx &c. π, μ, ν, étant des nombres commensurables entr'eux; équation dans laquelle y sera $= o$, lorsque $x = o$, & lorsque πx, μx, νx &c. sont des multiples quelconques de la demi-circonférence. Or c'est ce qui ne me paroît pas facile à prouver; car quand on employeroit pour faire coincider les deux courbes, tant de coëfficiens indéterminés qu'on voudroit, on sait combien cette méthode de faire coincider une courbe cherchée avec une courbe de genre donné, est souvent fautive. D'ailleurs elle ne seroit tout au plus qu'une approximation, & il s'agit ici d'une solution géométrique, exacte & rigoureuse. 2°. Il faudroit de plus qu'il démontrât que le Problême des cordes vibrantes ne peut être résolu que dans le cas où la figure initiale est composée à l'infini de parties alternatives, égales & semblables. Or c'est ce qui ne paroît pas résulter de sa solution, suivant laquelle au contraire il paroît qu'il regarde, & qu'il doit regarder toute figure initiale quelconque donnée à la corde,

comme un mêlange de Trochoïdes Tayloriennes.

Ainsi, quand même M. Daniel Bernoulli parviendroit à prouver démonstrativement (ce qu'il ne fera jamais) que toutes les courbes, qui rendent la solution possible, sont renfermées dans l'équation $y = \alpha$ sin. $\frac{\pi x}{a} + \beta$ sin. $\frac{2 \pi x}{a}$ + &c. ou plus généralement, s'il le veut, $y = \alpha$ sin. $\pi x + \beta$ sin. $\mu x + \gamma$ sin. νx &c. il ne pourroit, ce me semble, y parvenir, qu'en trouvant d'abord, comme je l'ai fait, la maniere générale dont la courbe vibrante peut se construire par le moyen d'une courbe ovale quelconque, & en prouvant ensuite que les abscisses CP de cette courbe ovale ont, soit avec les arcs correspondans, soit avec les aires correspondantes, le rapport indiqué par l'équation $y = \alpha$ sin. $\frac{\pi x}{a} + \beta$ sin. $\frac{2 \pi x}{a}$ + &c.; car je viens de prouver qu'on ne peut déduire cette équation de la considération du mouvement d'une co de chargée d'un nombre fini de poids. Donc, quand M. Bernoulli feroit aussi fondé dans ses assertions, qu'il me le paroît peu, il me semble que pour justifier ces assertions, la solution que j'ai donnée seroit nécessaire, & ne seroit point bornée à l'avant ge singulier que M. Bernoulli lui accorde, de conduire par un chemin très-pénible à un objet fort facile à atteindre. Je crois au reste que le mérite de ma solution, si elle en a que qu'un, ne consiste point dans la difficulté & dans la complication du calcul, comme M. Bernoulli le prétend ; il est aisé

aisé à tous ceux qui sont au fait de ces matieres, de voir que mon calcul en lui-même est très-facile, & se réduit aux opérations les plus simples & les plus courtes ; c'est dans la maniere dont j'applique le calcul à cette question, & dont je résous les difficultés qu'elle présente, que consiste la nouveauté, & peut-être, si j'ose le dire, l'élégance de ma méthode.

§. XXV. Je crois avoir suffisamment prouvé contre M. Taylor, Article XLII. de mon Mémoire de 1747, qu'il n'a nullement démontré que la corde vibrante doive prendre la figure de la Trochoïde allongée. M. Daniel Bernoulli répete la même chose après lui au n°. XV. de son Mémoire, mais sans en apporter la moindre preuve géométrique différente de celle que j'ai déja combattue ; il a recours à l'expérience & à la résistance de l'air (dont on fait abstraction ici) pour prouver que toutes les Trochoïdes particulieres se réduiront à une seule ; en quoi il differe beaucoup de M. Taylor, qui prétend prouver *géométriquement* & abstraction faite de toutes causes étrangeres, que la courbe prendra enfin la forme d'une seule & unique Trochoïde ; ce qui est bien contraire à la théorie de M. Daniel Bernoulli, & ce qui pourroit servir à confirmer, si cela étoit nécessaire, mes objections contre la prétendue démonstration de M. Taylor.

§. XXVI. J'ai démontré dans les Mém. de Berlin de 1747, & dans ceux de 1750, que le tems des vibrations d'une corde de longueur donnée l, étoit toujours

le même, quelque figure que prît la corde. M. Bernoulli m'objecte, art. XVI. (c'eſt du moins ce que j'en ai compris) que le tems de la vibration ſera la moitié moindre que je ne l'ai aſſigné, ſi la corde a un point fixe ou nœud immobile en ſon milieu. C'eſt de quoi je conviens avec lui; mais alors la corde ne doit plus être cenſée ſimple, comme je le ſuppoſois dans mon Mémoire; c'eſt proprement un compoſé de deux cordes qui font leurs vibrations ſéparément & indépendamment l'une de l'autre; & c'eſt pour cette raiſon que j'ai regardé la corde comme étant ſans nœuds ou points fixes; il eſt vrai que je ne l'ai pas dit expreſſément, mais tout mon Mémoire & mes figures même en font foi, pour qui voudra y faire quelqu'attention; & je ne puis croire que M. Bernoulli veuille incidenter là-deſſus. Il y a plus, & je dis que ma théorie s'applique d'elle-même aux courbes qui ont des nœuds; par exemple, ſi la corde vibrante a un nœud en ſon point de milieu, il ſuit de la formule $y = \varphi(t+x) - \varphi(t-x)$, & de l'Art. XX. de mon Mém. de 1747, que le tems d'une vibration ſera $\frac{\theta l}{2\sqrt{2aml}}$; car alors prenant $t = \frac{1}{2} l$ (& non l comme dans cet Art. XX, où l'on ſuppoſe la courbe ſans nœuds) les ordonnées de la courbe génératrice ſeront égales & de même ſigne des deux côtés; ainſi l'objection de M. Bernoulli, s'il m'eſt permis de le dire, porte abſolument à faux, de quelque côté qu'on l'enviſage. Au reſte, quand j'ai dit que tous les points de la corde retour-

noient à leur ſituation primitive dans le même tems, quelle que fût la figure de la corde, je n'ai pas prétendu que dans ce tems chaque point de la corde ne fît que des vibrations ſimples; la ſeconde de ces deux propoſitions n'eſt point la ſuite de la premiere; il me ſuffiſoit, pour l'objet que je me propoſois, de trouver le lieu de chaque point pour chaque inſtant, ſans entrer dans un plus grand détail; détail d'autant plus inutile, que j'eſpere montrer à la fin de ce Mémoire, qu'il ne ſert abſolument de rien pour expliquer les phénomenes du ſon. Je n'ai parlé en aucun endroit de mon Mémoire de cet *iſochroniſme de vibrations* que M. Bernoulli me reproche; j'ai parlé ſeulement, Art. XX & XXV de mon Mémoire de 1747, du cas où tous les points de la corde *ſont à la fois en ligne droite*, ou, ce qui eſt la même choſe, arrivent à l'axe dans le même inſtant. Il eſt vrai que dans mon Mémoire de 1750, je me ſuis ſervi de cette expreſſion, que *le tems d'une vibration* eſt toujours le même, quelle que ſoit la figure de la corde; mais il eſt évident par l'Art. XX de mon Mémoire de 1747, qui eſt relatif à l'endroit cité de mon Mémoire de 1750, que j'entends ici par *le tems d'une vibration*, le tems que la corde employe à ſe mettre en ligne droite, lorſque cela eſt poſſible; ou, ce qui revient au même, le tems qui eſt néceſſaire pour que tous les points ceſſent de vibrer à la fois, & qu'on peut appeller légitimement le *tems d'une vibration* de la corde, ſans prétendre pour cela que les vibrations partielles ſoient iſochrones. Si

M. Euler a employé un autre langage, c'eſt ce que je n'examine pas; mais je doute qu'il ait eu en vûe le ſens que M. Bernoulli lui prête.

§. XXVII. M. Bernoulli dit, au commencement de ſon ſecond Mémoire, qu'il ne ſe ſouvient pas d'avoir vû de ſolution générale du Problême qui conſiſte à trouver la loi des oſcillations de deux corps attachés à une corde tendue. Je crois avoir donné cette ſolution dans l'Art. XLIV. de mon Mémoire de 1747. Je l'ai réduite à deux équations différentielles, aiſément intégrables par différentes méthodes fort ſimples, que j'ai expliquées, ſoit dans les Mémoires de l'Acad. de Berlin de 1748, ſoit dans ceux de 1750. La ſimplification que M. Bernoulli apporte à la ſolution de ce Problême, quand elle ſeroit réelle, ce dont je ne conviens pas, ne devroit, ce me ſemble, me rien faire perdre de l'avantage de l'avoir réſolu le premier. Les valeurs de x & de y étant connues, on trouvera, en faiſant $\frac{dy}{dt} = o$ & $\frac{dx}{dt} = o$, ce que M. Bernoulli appelle les vibrations particulieres de chaque corps, les points où ces vibrations finiſſent, & le tems employé à les faire. Je ne refuſe point de ſuivre en cela ſon langage, pourvû qu'il m'accorde en même-tems que ma méthode donnera très-exactement le mouvement de chaque corps; & c'étoit-là tout ce que je me propoſois.

Pour donner ici un eſſai de cette méthode, & pour

mettre le Lecteur à portée de la comparer avec celle de M. Bernoulli, & de juger laquelle est la plus simple, je suppose une corde chargée de deux poids, qui la divisent en trois parties égales, que l'on fera chacune $= 1$, que y, y' soient les distances des poids à la ligne AB (*fig.* 1.); on aura en nommant ϕ la tension de la corde, M la masse de chacun des poids, & supposant, comme dans les Mémoires de 1747, $\frac{2a\phi}{Mp} = \theta^2$, ce qui se peut toujours; $-ddy = (2y - y')\frac{\phi dt^2 . 2a}{Mp\theta^2} = (2y - y')dt^2$; & $-ddy' = (2y' - y)dt^2$; donc $y' = 2y + \frac{ddy}{dt^2}$; donc $d^4y + 4ddy\,dt^2 + 3y\,dt^4 = 0$; donc si on prend les quatre racines de l'équation $f^4 + 4ff + 3 = 0$, qui sont $f = \sqrt{3}.\sqrt{-1}$, $f = -\sqrt{3}.\sqrt{-1}$, $f = +\sqrt{-1}$, $f = -\sqrt{-1}$, on aura $y = Ac^{t\sqrt{3}.\sqrt{-1}} + Ac^{-t\sqrt{3}.\sqrt{-1}} + Bc^{t\sqrt{-1}} + Bc^{-t\sqrt{-1}}$; A & B étant deux indéterminées. On aura de même la valeur de y' par l'équation $y' = 2y + \frac{ddy}{dt^2}$; & on déterminera les constantes A & B par les valeurs initiales de y & de y'.

Si la corde est chargée de trois corps qui la divisent en quatre parties égales, on aura $-ddy = (2y - y')dt^2$; $-ddy' = (2y' - y - y'')dt^2$; $-ddy'' = (2y'' - y')dt^2$; & l'équation à résoudre sera $f^6 + 6f^4 + 10ff + 4 = 0$, dont les six racines sont

$f = \pm\sqrt{2}.\sqrt{-1}$; $f = \pm\sqrt{-1}.\sqrt{2 \pm \sqrt{-2}}$; & le reſte s'achevera comme dans le cas précédent. Si le polygone vibrant étoit compoſé de deux portions égales & ſemblables au commencement du mouvement, il eſt viſible qu'il le ſeroit de même pendant tout le tems du mouvement; en ce cas, le nombre des équations ſeroit la moitié moindre; par exemple, dans le cas où il n'y auroit que deux corps, on auroit $y' = y$, & $-ddy = y\,dt^2$; dans le cas de trois corps, on auroit $-ddy = (2y - y')\,dt^2$; $-ddy' = (2y - 2y')\,dt^2$; & $y'' = y$; & ainſi des autres.

Mais pour mettre le Lecteur encore plus à portée de comparer la ſolution de M. Bernoulli avec la mienne, je vais réſoudre le Problême d'une maniere générale, & faire voir évidemment, quoique M. Bernoulli paroiſſe penſer le contraire, qu'il peut être réſolu par une autre méthode que la ſienne, & j'oſe le dire, d'une maniere plus directe, & du moins auſſi ſimple. Pour cela j'appellerai avec M. Bernoulli, L la longueur totale de la corde, P le poids tendant, m un des poids, n, l'autre, α la diſtance initiale du poids m à l'axe de la corde, & x ſa diſtance variable au même axe, β la diſtance initiale du poids n, & y ſa diſtance variable, l la diſtance du poids m au bout de la corde le plus proche, λ la diſtance du poids n à l'autre bout de la corde, enſorte que $L - \lambda - l$ ſoit la diſtance entre les deux poids; & on aura $-ddx = \frac{2aP\,dt^2}{p\,m\,\theta^2}\left(\frac{x}{l} + \frac{x - y}{L - \lambda - l}\right)$;

& $-ddy = \frac{2aPdt^2}{pn\theta^2}\left(\frac{y}{\lambda} + \frac{y-x}{L-\lambda-l}\right)$; équations qui reviennent au même, comme il eſt aiſé de le voir, que celles qui ont été données pour le même objet dans l'Art. XLIV. de mon Mémoire de 1747.

Pour intégrer ces équations plus commodément, je fais $\Delta = \frac{2aP}{mpl} + \frac{2aP}{mp(L-\lambda-l)}$; $\Gamma = -\frac{2aP}{mp(L-\lambda-l)}$; $\phi = -\frac{2aP}{np(L-l-\lambda)}$; $\Pi = \frac{2aP}{npl} + \frac{2aP}{np(L-l-\lambda)}$; & j'ai les deux équations $-ddx = (\Delta x + \Gamma y)\frac{dt^2}{\theta^2}$; & $-ddy = (\phi x + \Pi y)\frac{dt^2}{\theta^2}$.

D'où l'on tire par une méthode préciſément ſemblable à celle de l'Art. 122 de mon Traité de Dynamique, ſeconde Edition, & en conſervant les mêmes noms,

$$x = \frac{(\nu'\alpha + \nu'\nu\beta)\,\text{coſ.}\,\frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\phi}}{\nu' - \nu} - \frac{\nu(\alpha + \nu'\beta)\,\text{coſ.}\,\frac{t}{\phi}\sqrt{\Delta + \nu'\phi}}{\nu' - \nu};$$

$$y = \frac{(\alpha' + \nu\beta)\,\text{coſ.}\,\frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\phi}}{\nu - \nu'} - \frac{(\alpha + \nu'\beta)\,\text{coſ.}\,\frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu'\phi}}{\nu - \nu'}.$$

Or en premier lieu, il eſt aiſé de reconnoître dans ces deux valeurs de x & de y la double oſcillation de M. Bernoulli (ou plutôt ce qu'il appelle ainſi) ſans avoir beſoin du détour qu'il employe pour cela; car il eſt viſible par les valeurs de x & de y, que le mouvement des corps m & n eſt compoſé de deux mouvemens pareils à ceux de deux pendules, dont le premier auroit pour

longueur $\frac{2a}{\Delta + \nu\varphi}$, & le second $\frac{2a}{\Delta + \nu'\varphi}$. Et il eſt aiſé de s'aſſurer que ces pendules ſeront les mêmes que ceux de M. Bernoulli; en effet ſi γ & δ ſont les diſtances initiales, & qu'on ſuppoſe $\Delta\gamma + \Gamma\delta : \varphi\gamma + \Pi\delta :: \gamma : \delta$, on aura $\Delta\gamma\delta + \Gamma\delta\delta = \varphi\gamma\gamma + \Pi\delta\gamma$, & $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\Delta - \Pi \pm \sqrt{\overline{\Delta - \Pi}^2 + 4\Gamma\varphi}}{2\varphi}$; donc les deux valeurs de $\frac{\gamma}{\delta}$ ſont $-\nu$ & $-\nu'$; de plus la longueur du pendule iſochrone dans ce dernier cas, ſeroit $\frac{2a}{\Delta + \frac{\Gamma\delta}{\gamma}} = \frac{2a}{\Delta + \frac{\Gamma}{-\nu}} = \frac{2a}{\Delta + \nu'\varphi}$, ou $\frac{2a}{\Delta + \frac{\Gamma}{-\nu'}} = \frac{2a}{\Delta + \nu\varphi}$. Donc &c.

En faiſant $dx = o$, $dy = o$ dans les valeurs de x & de y, on aura les vibrations de chaque corps; & il eſt très-évident que ces vibrations ſeront iſochrones ſi $\alpha + \nu\beta = o$, ou ſi $\alpha + \nu'\beta = o$. Mais il ne me paroît pas prouvé que dans aucun autre cas elles ne ſeront iſochrones. Par exemple ſi $\Delta + \nu'\varphi = 4(\Delta + \nu\varphi)$, on aura $dx = o$, & $dy = o$, ſi $-\nu'\alpha - \nu\nu'\beta$ ſin. $\frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$ $+ (\nu\alpha + \nu\nu'\beta)$ 2 ſin. $\frac{2t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = o$, & ſi $(-\alpha - \nu\beta)$ ſin. $\frac{t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} + (\alpha + \nu'\beta)$ 2 ſin. $\frac{2t}{\theta}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = o$.

Or

Or si ces équations ne donnent point d'autres valeurs réelles & possibles à sin. t, que sin. $t = o$, les oscillations seront toutes synchrones. C'est ce qui arrivera, par exemple, si 1 est plus petit que les deux quantités $\frac{\alpha + \nu \epsilon}{4(\alpha + \nu' \epsilon)}$ & $\frac{(\alpha + \nu \epsilon)\nu'}{4\nu(\alpha + \nu' \epsilon)}$; or pour cela il suffit, par exemple, que $\alpha + \nu' \epsilon$ soit fort petit, sans être absolument $= o$, c'est-à-dire, que $\frac{\alpha}{\epsilon}$ soit presqu'égal à $-\nu'$. Je n'entre point là-dessus dans un plus grand détail, parce que je ferai voir plus bas dans l'Art. suivant, que le synchronisme des vibrations peut avoir lieu, quoique la force accélératrice ne soit pas comme la distance.

Au reste, la méthode que nous employons ici pour trouver le mouvement de deux corps, peut s'appliquer aisément aux cas où il y aura tant de corps qu'on voudra. Le Problême est précisément de la même nature que celui que j'ai résolu dans la seconde Edition de mon Traité de Dynamique, Art. 130 & 131. Enfin notre solution peut s'appliquer encore à plusieurs autres cas, auxquels il me semble que celle de M. Bernoulli réussiroit difficilement; par exemple, celui où les deux corps auroient des vitesses initiales données, & celui où ils se mouvroient dans un milieu résistant comme la vitesse. Mais ce détail me meneroit trop loin. *Voyez* le Traité que je viens de citer, Art. 126 & 132.

M. Bernoulli, pour preuve de la supériorité, de l'excellence & de la généralité de sa méthode, prétend avoir

résolu par le moyen de cette méthode le problême des cordes vibrantes d'une épaisseur inégale, suivant une loi donnée; Problême que ma méthode & celle de M. Euler ne peuvent résoudre que pour des cas particuliers. Si M. Bernoulli jugeoit à propos de publier sa solution, qu'il annonce dans le Journal des Savans déja cité, je crois qu'elle ne différeroit point, quant à l'essentiel, de celle que j'ai donnée du même Problême au commencement de ce Mémoire. La seule chose sur laquelle nous serions vraisemblablement partagés, c'est que M. Bernoulli donneroit cette solution pour générale, & qu'il ne m'est pas démontré qu'elle le soit. Quoi qu'il en soit, on ne sauroit trop l'inviter à publier ses recherches sur ce sujet. Elles ne pourront qu'être utiles à l'éclaircissement de cette matiere épineuse & délicate.

§. XXVIII. Je pourrois remarquer en passant que la courbe dont l'équation est $y = \alpha \sin. \frac{\pi x}{a} + \beta \sin. \frac{2 \pi x}{a} +$ &c. n'est point proprement un mélange de Trochoïdes Tayloriennes; puisque les axes auxquels M. Bernoulli rapporte la plûpart de ces prétendues Trochoïdes, sont courbes; & qu'en ces cas les courbes rapportées à ces axes, ne sont plus des Trochoïdes. Je n'insisterai point là-dessus, pour éviter toute dispute de mots. Mais, ce qui est plus important, j'observerai que cette théorie de M. Bernoulli ne me paroît pas aussi propre que M. Euler le pense, à expliquer *ce que les vibrations particulieres ont de physique.* Pour le prouver, je supposerai, avec

M. Bernoulli, que la corde ait la figure $ApaB$ (*fig.* 12.), telle que $y = \alpha$ sin. $\frac{\pi x}{a} + \beta$ sin. $\frac{2\pi x}{a}$, a étant son point de milieu ; & pour rendre le calcul plus simple, je supposerai encore $pm = \frac{ar}{2}$, comme Aa est la moitié de AB. La force motrice en p par rapport au point m sera la même qu'elle seroit au point a de la courbe AaB ; & comme ces forces motrices égales ont à mouvoir des masses qui sont entr'elles comme ra est à pm, il s'ensuit que les forces accélératrices seront en a & en p comme $\frac{1}{ar}$ est à $\frac{1}{pm}$: donc si on nomme φ la force motrice en a, & qu'on fasse $ar = A$, $pm = a = \frac{A}{2}$, $rV = x$, $mu = z$; on trouvera que la vitesse en V est $\sqrt{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{AA - xx}}{AA}$, & que la vitesse en u est $\sqrt{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{aa - zz}}{aa}$. De-là il s'ensuit, 1°. que si on décrit des rayons $ar = A$, & $pm = \frac{ar}{2}$ deux demi-cercles aLa', plo (*fig.* 13.), on pourra supposer la vitesse en V représentée par l'ordonnée LV, & le tems par l'arc aL ; la vitesse en u par le double de l'ordonnée ul, & le tems par l'arc pl ; d'où il est visible que tandis que le point a parcourt ar, le point p parcourra po ; 2°. que si on prend les arcs qZ, oz égaux entr'eux, & tels que $yz = \frac{YZ}{2}$, on aura $aY + py$ pour la plus grande ex-

cursion absolue du point p (*fig.* 12.); parce qu'alors la vitesse de ce point sera $= o$; 3°. que le tems de cette excursion sera $a q Z$, ou (ce qui est la même chose) $pKo + oz$. 4°. Que quand le point a (*fig.* 13.) est en a′, & que le point p est revenu en p, la vitesse absolue du point p (*fig.* 12.) est alors encore $= o$, & l'espace parcouru $= Y$a′ $- yp$, c'est-à-dire $yp - Y$a′ en sens contraire, & le tems de la seconde excursion $= Z$a′. 5°. On verra de même facilement que le point p parcourt ensuite dans le tems a′ Z, & dans le sens de la premiere excursion, un espace $= yp - Y$a′; & qu'enfin il parcourt en sens contraire dans le tems $Z\,a$ un espace $= aY + yp$; donc si on fait aY (*fig.* 14.) $= aY$ (*fig.* 13.) Yp (*fig.* 14.) $= py$ (*fig.* 13.); pR (*fig.* 14.) $= py - Y$a′ (*fig.* 13); on verra, que tandis que le point a (*fig.* 12.) va de a en a′ & de a′ en a, le point p de la fig. 12. va d'abord (*fig.* 14.) de a en p, puis de p en R, puis de R en p, puis de p en a. Le point p (*fig.* 12.) fera donc à la vérité deux vibrations, pendant que le point a en fait une; mais le tems de ces deux vibrations sera différent; celui de la premiere sera représenté par l'arc aZ (*fig.* 13.); & celui de la seconde, par l'arc Za′ qui est plus petit. Ainsi on ne pourra pas dire que le point p (*fig.* 12.) fait l'octave aigue, tandis que le point a rend le son fondamental; il faudroit pour cela que le point p fît deux vibrations d'*une égale durée*, tandis que le point a en fait une; car si les deux vibrations ne sont pas d'égale durée, le point p, suivant les principes de l'Acoustique,

rendra deux ſons différens ; le premier plus grave, le ſecond plus aigu que l'octave du ſon fondamental.

La théorie de M. Bernoulli ne peut donc ſervir à expliquer la multiplicité des ſons, telle que les obſervations la donnent. D'ailleurs on ſait que les ſons les plus ſenſibles dans cette multiplicité, ſont la douziéme & la dix-ſeptiéme. Pourquoi cette préférence accordée par la nature ? Et quelle raiſon M. Bernoulli en rendra-t-il (*a*) ?

Reconnoiſſons donc que tous ces faits ſont une énigme inexplicable pour nous. En effet, peut-on ſe flatter de les expliquer, en regardant le mouvement des points de la corde comme compoſé de pluſieurs autres, en ſuppoſant des ventres fictifs & des nœuds mobiles ? Il n'y auroit rien, ce me ſemble, dont on ne pût rendre raiſon par une méthode ſi arbitraire.

D'ailleurs, & cette conſidération eſt encore plus forte que toutes les autres, il y a bien des cas, où malgré ces ventres fictifs & ces nœuds mobiles, les vibrations des points de la corde ſeront abſolument & rigoureuſement ſynchrones ; ce qui renverſe toute la théorie de M. Bernoulli. Pour le prouver, je ſuppoſe avec lui que $y = a$ ſin. $\pi x + b$ ſin. $2 \pi x$ ſoit l'équation de la courbe initiale ; on trouvera aiſément par ma méthode,

---

(*a*) Voyez ſur cela l'article FONDAMENTAL dans le ſeptiéme Volume de l'Encyclopédie. Il contient pluſieurs autres objections contre l'explication donnée par M. Bernoulli, de la multiplicité des ſons rendus par une même corde. On y réfute auſſi quelques autres explications qui ont été données du même phénomene.

que l'équation de la courbe au bout du tems t est $y = \frac{a \sin. \pi x + \pi t}{2} + \frac{a \sin. \pi x - \pi t}{2} + \frac{b \sin. 2 \pi x + 2 \pi t}{2} + \frac{b \sin. 2 \pi x - 2 \pi t}{2} = a \sin. \pi x \cos. \pi t + b \sin. 2 \pi x \cos. 2 \pi t$; donc la vitesse de chaque point de la corde, c'est-à-dire, $- \frac{dy}{dt}$, sera $\pi a \sin. \pi x \sin. \pi t + 2 \pi b \sin. 2 \pi x \sin. 2 \pi t = \pi \sin. \pi x \sin. \pi t \times (a + 8 b \cos. \pi x \cos. \pi t)$. Or cette vitesse sera $= 0$, 1°. lorsque $\sin. \pi t$ sera $= 0$; 2°. lorsque $\cos. \pi t$ sera $= - \frac{a}{8 b \cos. \pi x}$. Mais il est évident que si a est $> 8 b$, cette derniere valeur est impossible, puisque $\cos. \pi t$ ne sauroit jamais être > 1, pris négativement ou positivement. Donc si $a > 8 b$, la vitesse n'est réellement $= 0$ que quand $\sin. \pi t = 0$; en ce cas il est évident que la vitesse est nulle à la fois dans tous les points, & que toutes les vibrations sont par conséquent synchrones. Je parle ici des vibrations absolues, & non des vibrations relatives par rapport à des points mobiles : vibrations dont la considération seroit tout-à-fait illusoire; puisque ces vibrations relatives ne sont pas réellement des vibrations.

Je vais plus loin, & je dis que la courbe initiale peut être telle que tous les points tombent en même-tems sur l'axe, & qu'ils fassent de plus leurs oscillations totales en même-tems. Car soit, par exemple, $y = a \sin. \pi x + b \sin. 3 \pi x$; après un tems quelconque t, on aura $y = a \sin. \pi x \cos. \pi t + b \sin. 3 \pi x \cos. 3 \pi t = \sin. \pi x$

cos. $\pi t \times (a + b [3 \cos. \pi x^2 - \sin. \pi x^2] \times [\cos. \pi t^2 - 3 \sin. \pi t^2])$; d'où l'on voit, 1°. que les points arriveront tous à l'axe, lorsque cos. πt sera $= o$; 2°. qu'aucun point n'y arrivera que dans le cas où cos. $\pi t = o$, si a & b sont telles que $a + b [3 \cos. \pi x^2 - \sin. \pi x^2] \times [\cos. \pi t^2 - 3 \sin. \pi t^2]$ ne soit jamais $= o$; ce qui aura lieu si $\frac{a}{b}$ est plus grand que la plus grande valeur de $[3 \cos. \pi x^2 - \sin. \pi x^2] \times [\cos. \pi t^2 - 3 \sin. \pi t^2]$, c'est-à-dire plus grand que 3.

Maintenant les oscillations entieres finiront, lorsque $\frac{dy}{dt}$ sera $= o$, c'est-à-dire, lorsque $\pi \sin. \pi x \sin. \pi t \times (a + 3 b \times [3 \cos. \pi x^2 - \sin. \pi x^2] \times [3 \cos. \pi t^2 - \sin. \pi t^2])$ sera $= o$: d'où l'on voit ; 1°. que les oscillations totales finiront toutes en même-tems, quand sin. πt sera $= o$; 2°. que toutes ces oscillations seront absolument synchrones, si $\frac{a}{3b}$ est plus grand que 9.

On voit donc qu'il y a des cas, où non-seulement les vibrations totales, mais encore les demi-vibrations (j'appelle ainsi les vibrations terminées à l'axe) seront synchrones, sans que la corde ait la figure d'une simple Trochoïde allongée. Donc le synchronisme absolu & rigoureux de toutes les parties de la corde, n'appartient point nécessairement à une seule & unique Trochoïde allongée, comme M. Taylor l'a prétendu, & comme M. Bernoulli paroît le croire.

De toutes ces réfléxions je crois être en droit de con-

clure ; 1°. que la ſolution que j'ai donnée le premier du Problême des cordes vibrantes, n'eſt nullement renfermée dans la ſolution de M. Taylor, s'étend beaucoup plus loin, & eſt auſſi générale que la nature de la queſtion le permet ; 2°. que l'extenſion que M. Euler y a voulu donner, eſt capable d'induire en erreur ; 3°. que ſa conſtruction eſt contraire à ce qu'il avance lui-même en termes formels ſur l'*identité* & l'*imparité* des fonctions $\varphi(x+t)$ & $\Psi(x-t)$; 4°. que cette conſtruction ne ſatisfait point à l'équation $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{dx^2}$; 5°. que dans l'équation $y = \varphi(x+t) + \Psi(x-t)$, les fonctions doivent demeurer toujours de la même forme, comme M. Euler l'a tacitement ſuppoſé lui-même ; 6°. que ſi on ſe permettoit de faire varier la forme de ces fonctions, il faudroit renverſer le principe de toutes les conſtructions & ſolutions analytiques, & des démonſtrations les plus généralement avouées ; 7°. qu'en faiſant varier cette forme, le Problême n'auroit plus de ſolution poſſible, & reſteroit indéterminé ; 8°. que cette ſolution ne repréſente pas mieux que la mienne, le vrai mouvement de la corde ; 9°. enfin que la ſolution de M. Daniel Bernoulli, quelqu'ingénieuſe qu'elle puiſſe être, eſt trop limitée, & n'ajoute abſolument à la mienne aucune ſimplification ; qu'en un mot, le calcul analytique du Problême, & l'examen ſynthétique que M. Bernoulli m'accuſe à tort de n'avoir point fait, ſont l'un & l'autre, ce me ſemble, à l'avantage de ma méthode.

SUPPLÉMENT

SUPPLÉMENT

Au Mémoire précédent sur les Cordes vibrantes.

AU commencement de Septembre 1759, long-tems après avoir achevé l'Ecrit qu'on vient de lire, je reçus un excellent Ouvrage, intitulé, *Miscellanea Physico-Mathematica Societatis privatæ Taurinensis, Tomus primus.* Dans ce Recueil j'ai trouvé un savant & profond Mémoire de M. *Louis de la Grange*, où cet habile Géometre examine la question que je viens d'agiter avec M M. Bernoulli & Euler. M. de la Grange donne dans ce Mémoire une très-belle méthode pour trouver le mouvement d'une corde chargée d'autant de poids qu'on voudra : & supposant ensuite le nombre des corps infini, ce qui est le cas de la corde vibrante, il arrive précisément à la même conclusion que M. Euler ; d'où il conclud ; 1°. contre M. Bernoulli, que la courbe vibrante n'est pas toujours un mélange de Trochoïdes ; 2°. contre moi, qu'il n'est pas nécessaire que les différentes courbes AMB, Amb, $B\mu a$ &c. (*fig.* 9.) soient assujetties à la loi de continuité. Cette théorie de M. de la Grange me fournira quelques remarques.

Je dois d'abord les plus grands éloges à la maniere aussi savante qu'ingénieuse, dont M. de la Grange détermine le mouvement d'une corde chargée d'autant de

poids qu'on voudra. Quoique la méthode que j'ai donnée, pour intégrer dans ce cas les équations différentielles, conduise à la solution du Problême, quel que soit le nombre des corps ; j'avoue cependant qu'il y a beaucoup de mérite à avoir trouvé une formule générale pour un nombre de corps indéfini. Je n'avois point cherché cette formule ; parce que d'un côté je voyois que ma méthode donneroit toujours infailliblement une formule plus ou moins composée pour tel nombre fini de corps qu'on voudroit ; & parce que de l'autre, je ne voyois point comment après avoir trouvé une formule générale pour tel nombre fini de corps qu'on voudroit, on pourroit appliquer cette formule à un nombre infini de corps. Je me contentai donc de dire (*), qu'en regardant la corde vibrante comme un fil extensible chargé de plusieurs petits poids, on pourroit toujours déterminer *à-peu-près* son mouvement, & d'autant plus exactement, que le nombre des poids supposés seroit plus grand.

Cet *à-peu-près* ne signifie pas, comme M. de la Grange paroît le croire, qu'on ne puisse trouver exactement par ma méthode le mouvement d'un fil extensible chargé d'un nombre de poids fini, mais très-grand ; il est évident par la nature même de cette méthode, qu'elle donnera toujours la loi de ce mouvement, quel que soit le nombre des corps ; l'*à-peu-près* signifie seulement, dans l'en-

(*) Voyez l'Article XLIV. de mon Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin de 1747.

droit cité de mon Mémoire de 1747, que le mouvement d'une corde vibrante doit être *à-peu-près* le même dans la théorie, que celui d'un fil extensible chargé d'un très-grand nombre de poids. Je dis dans la *théorie*; car nous avons fait voir dans l'Art. XXIII. du Mémoire précédent, que l'expérience & la théorie ne sauroient être d'accord dans la détermination du mouvement des cordes vibrantes, ne fût-ce que par cette seule raison, que le mouvement d'une corde vibrante cesse bientôt, quoique par la théorie il doive durer continuellement. Au reste, j'ai donné dans l'Art. XXII. du Mémoire ci-dessus quelques modifications à cette assertion même de mon Mémoire de 1747, & j'ai observé qu'il pourroit bien se faire que le mouvement de la corde fût sensiblement différent, même *dans la théorie*, du mouvement du polygone circonscrit, quelque grand nombre de côtés qu'on lui supposât.

Quoi qu'il en soit, M. de la Grange, après avoir trouvé, par une très-belle & très-savante analyse, le mouvement d'un fil chargé d'un nombre quelconque de poids, a essayé de déduire de cette formule le mouvement de la corde, en supposant le nombre de poids infini. Mais quelqu'adresse & quelque sagacité qu'on remarque dans son calcul, & dans les moyens qu'il prend pour réduire ce second cas au premier, il me semble que tout ce calcul est appuyé sur plusieurs suppositions illégitimes.

1°. M. de la Grange prétend qu'en supposant $m = \infty$

& π = à la circonférence, les angles $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ &c. que sa formule renferme, deviennent infiniment petits, & ne different pas de leurs sinus. Cela est vrai en général pour tout angle $\frac{r\pi}{4m}$, r étant un nombre fini ; mais si $r = m - 1$, comme il arrive dans un des termes de la formule de M. de la Grange, alors $\frac{r\pi}{4m} = \frac{\pi}{4}$, & l'angle ne se confond plus avec son sinus.

2°. M. de la Grange prétend que si on appelle x une portion quelconque de la corde, a la corde entiere, t le tems, H & T deux constantes, $\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}$ sera toujours un nombre entier, si on suppose m infini ; ensorte que sin. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}\right)$ sera toujours $= o$. Cette assertion me surprend, & ne me paroît nullement fondée. Car pourquoi un nombre infini est-il nécessairement un nombre entier? L'infini n'est point proprement un nombre, il est la limite de tous les nombres possibles : & sous ce point de vûe, il n'est proprement, ni entier, ni fractionnaire, ni incommensurable. Ce qu'on pourroit tout au plus accorder à M. de la Grange, c'est que le nombre infini m peut être regardé & traité comme un nombre entier, parce que dans le cas où le nombre m des corps est fini, quelque grand qu'il soit, m est toujours un nombre entier. Mais de-là même il s'ensuit évidemment que

$\frac{m x}{a} + \frac{m H t}{T}$ n'est pas toujours un nombre entier; ce qui arrive, par exemple, quand $\frac{x}{a} + \frac{H t}{T}$ est un incommensurable. Il est vrai que m étant infini, $\frac{m x}{a} + \frac{m H t}{T}$ peut toujours être regardé comme égal à un nombre entier infini, plus une fraction finie, qui est infiniment petite par rapport à ce nombre infini. Mais il ne s'ensuit pas de-là, que $\sin. \frac{\pi}{2}\left(\frac{m x}{a} + \frac{m H t}{T}\right)$ soit $= o$; car soit $\frac{m x}{a} + \frac{m H t}{T} = m' + \rho$, m' étant un nombre entier infini, & ρ une fraction finie, on aura $\sin. \frac{\pi}{2}\left(\frac{m x}{a} + \frac{m H t}{T}\right) = \sin. \left(\frac{\pi m'}{2} + \frac{\pi \rho}{2}\right) = \pm \sin. \frac{\pi \rho}{2}$, savoir $+$, quand m' est pair, & $-$, quand m est impair; or $\sin. \frac{\pi \rho}{2}$ est une quantité finie.

Si le raisonnement de M. de la Grange étoit vrai, il s'ensuivroit que le sinus d'un arc quelconque $\frac{\pi x}{2 a} + \frac{\pi H t}{2 T}$ (*), cet arc étant pris une infinité m de fois, seroit toujours $= o$; c'est-à-dire, que le sinus d'une infinité de fois 45 degrés, par exemple, seroit toujours $= o$. Or cela est évidemment faux. Car le sinus d'une infinité de fois 45

(*) Il est évident que x & t étant indéterminées & variables à volonté $\frac{x}{a} + \frac{H t}{T}$ représente un nombre quelconque.

degrés, peut être, ou o, ou $\pm\sqrt{2}$, ou ± 1, selon les valeurs qu'on donne à m'.

3°. M. de la Grange prétend dans un autre endroit de sa solution, que $\frac{mX}{a}$ étant un nombre infini $= \mu$ (X est ici une portion de la corde indéterminée, & différente de x) & s étant un nombre entier quelconque positif ou négatif, on aura cos. $\frac{\pi}{2}\left(2ms \pm \frac{mX}{a}\right) = \mp 1$, le signe $-$ étant pour le cas où μ est impair, & le signe $+$ pour le cas où μ est pair. Cette assertion est fondée sur ce qu'il regarde toujours $\frac{mX}{a}$ comme un nombre entier; & elle est par conséquent sujette aux mêmes difficultés que nous venons de faire sur la supposition de $\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}$ égal à un nombre entier.

4°. M. de la Grange semble avoir bien senti ou prévû ces difficultés; & il a destiné un Chapitre de son Mémoire, à établir la proposition sur laquelle, de son propre aveu, sa théorie des cordes vibrantes est fondée; savoir sur ce qu'une suite infinie de produits de deux sinus, dont les arcs croissent en progression arithmétique, est toujours $= o$, excepté dans le cas où les arcs sont égaux. Pour démontrer cette proposition, l'Auteur la réduit à prouver que cos. x + cos. $2x$ + cos. $3x$ &c. à l'infini $= -\frac{1}{2}$, excepté dans le cas de $x = o$. Pour démontrer que cos. x + cos. $2x$ + cos. $3x$ &c. $= -\frac{1}{2}$ l'Auteur prend l'expression imaginaire des cosinus; & il transforme par ce moyen

la serie proposée en deux autres qui forment évidemment une progression géométrique dont il cherche la somme; il trouve cette somme $= -\frac{1}{2}$. Mais pour arriver à ce résultat, il fait une supposition qui ne paroît point exacte; savoir, que le dernier terme des deux progressions infinies $e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}} +$ &c. & $e^{-x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} +$ &c. est égal à zero, ce qui n'est pas vrai; car ce dernier terme est dans la premiere progression $e^{\infty\sqrt{-1}}$ & dans la seconde $e^{-\infty\sqrt{-1}}$, quantités qui ne sont ni l'une ni l'autre $= o$. Pour voir encore plus clairement la méprise de M. de la Grange, il suffit de considérer, que suivant son propre calcul, la somme exacte d'un nombre quelconque m de termes dans la progression cos. $x +$ cos. $2x +$ cos. $3x +$ &c. est $\frac{\text{cos. } mx - \text{cos. } (m+1)x}{2(1 - \text{cos. } x)} - \frac{1}{2}$. Or, ajoute-t-il, dans le cas où $m = \infty$, on suppose que l'1 s'évanouit auprès de m, d'où le terme cos. $(m+1)x$ devient $=$ cos. mx, & la formule précédente se réduit à $-\frac{1}{2}$. Il est aisé de répondre, que quand m est infini, cos. $(m+1)x$ ne devient pas égal pour cela à cos. mx. Car deux arcs finis ou infinis, qui different d'une quantité finie x, ont des cosinus qui different aussi d'une quantité finie. Un exemple très-simple peut nous convaincre d'ailleurs, que la somme des cosinus des angles x, $2x$, $3x$, n'est pas $= -\frac{1}{2}$. Car soit $x = 45^\circ$, on aura pour la suite dont il s'agit $\frac{1}{\sqrt{2}}$, o, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, -1, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, o,

par

$+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $+1$, &c. après quoi la suite recommencera; or la somme de cette suite finie est, ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou o; ou -1, ou $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, selon qu'on y prendra plus ou moins de termes. Donc la somme de la suite entiere est aussi, ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou o, ou -1, ou $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, selon le nombre de termes qu'on y prendra, quel que soit d'ailleurs ce nombre de termes, fini ou infini; & cette somme ne sera point $= o$, à moins que $m \times 45°$ ne soit $=$ à une infinité de fois la circonférence, ou $135°$ $+$ une infinité de fois la circonférence.

Ce n'est pas tout. M. de la Grange convient que quand on voudra traiter la théorie des cordes vibrantes, par la considération des fonctions algébriques, comme M. Euler & moi l'avons fait; cette théorie ne pourra s'appliquer qu'aux courbes continues, & à cet égard il me donne absolument gain de cause. Or je le prie de considérer qu'il suppose lui-même tacitement dans sa solution toute la théorie des fonctions algébriques. Car un des principaux fondemens de cette solution consiste dans l'usage qu'il fait de la méthode de M. Bernoulli, pour trouver la valeur d'une quantité qui est égale dans certains cas à $\frac{o}{o}$. Or cette méthode suppose elle-même que la quantité dont on cherche la valeur soit une fonction algébrique fractionnaire, que l'on différentie suivant les régles connues, & dont le numérateur divisé

par

par le dénominateur, donne la valeur de la quantité qu'on cherche.

C'est pourquoi la théorie de M. de la Grange sur les cordes vibrantes, quelque profonde & quelqu'ingénieuse qu'elle soit, porte sur des fondemens qui ne me paroissent pas assez solides pour renverser la mienne; & en effet la théorie de M. de la Grange aboutissant à la même conclusion que celle de M. Euler, est sujette aux mêmes difficultés que j'ai faites ci-dessus contre la solution de ce grand Géometre; difficultés qui me paroissent insolubles, & qui sont tirées de la considération directe du Problême, & de l'examen, tant synthétique, qu'analytique de la question proposée.

Fin du premier Mémoire & du Supplément.





SECOND MÉMOIRE.

Du Mouvement d'un corps de figure quelconque, animé par des forces quelconques.

DANS mes *Recherches sur la précession des Equinoxes*, j'ai donné tous les principes nécessaires pour résoudre le Problême que je me propose ici. Mais comme dans l'Ouvrage que je viens de citer, je n'ai appliqué ces principes en détail qu'au mouvement de rotation que la Terre doit avoir sur son centre, en vertu de l'action du Soleil & de la Lune, je crois devoir donner ici la solution générale du Problême, tirée des mêmes principes, & réduite à des formules générales qu'on pourra consulter au besoin.

I.

Pour représenter d'une maniere générale le mouvement d'un corps de figure quelconque, il faut distinguer dans ce corps deux mouvemens : 1°. celui du centre de gravité, qui est commun à toutes les parties du corps ; ce centre décrit une ligne quelconque, droite ou courbe ;

à simple ou à double courbure ; nous pourrions prendre ici tout autre point que le centre de gravité ; mais les propriétés connues de ce centre donnent le moyen de simplifier les équations ; cette raison nous détermine à choisir ce point par préférence ; 2°. le mouvement de rotation de chaque particule autour du centre de gravité. Pour me faire une idée bien nette de ce dernier mouvement, j'imagine d'abord, ainsi que je l'ai fait dans mes *Recherches sur la précession des Equinoxes*, une ligne Cp (*figure* 15.) qui passe par le centre de gravité C du corps, & qui demeure toujours fixe au-dedans du corps ; c'est-à-dire, qui passe toujours par les mêmes points dans l'intérieur du corps, & qu'on peut regarder par conséquent comme l'axe du corps, mais axe mobile autour du centre de gravité C ; j'imagine de plus un plan quelconque absolument fixe & immobile $ZCez$, qui passe aussi par le centre C, & auquel je rapporte le mouvement de l'axe Cp ; j'imagine enfin un plan $KC'H$ qui passe par un point quelconque C' de l'axe Cp, & qui soit perpendiculaire à cet axe. Cela posé,

Soit pe perpendiculaire au plan $ZCez$; Ce la commune section du plan Cpe, & du plan $ZCez$; ZCz une perpendiculaire à Ce, menée dans le plan $ZCez$; KC' la commune section des plans $KC'H$, Cpe ; G un point quelconque du corps, placé dans le plan $KC'H$; GL une perpendiculaire à $C'K$ dans le plan $KC'H$; & $C'H$ une parallèle à GL, ou, ce qui revient au même, à ZCz.

L'axe Cp, dont nous regardons ici l'extrémité C comme fixe, ne peut avoir que deux mouvemens ; l'un de rotation autour de la ligne immobile CE' perpendiculaire au plan immobile $ZCez$; l'autre, par lequel son extrémité p s'abbaisse ou s'éleve au-dessus du plan $ZCez$, les autres points de l'axe Cp s'élevant ou s'abbaissant aussi à proportion ; & il est évident, que pour trouver le mouvement de l'axe Cp, il suffira de connoître la courbe décrite sur le plan $ZCez$ par la projection e du point p.

I I.

Ce n'est pas tout : lorsque l'axe Cp, mobile autour de C, a parcouru un chemin quelconque, en entraînant, pour ainsi dire, avec lui les lignes Ce, ZCz, dont l'une est toujours la projection de Cp, & dont l'autre ZCz est toujours perpendiculaire à Ce ; le plan $KC'H$, dans lequel est placé le point G, demeure toujours perpendiculaire à l'axe Cp ; mais l'angle $KC'G$ que fait la ligne GC' avec la commune section KC' des plans $KC'H$, Cpe, peut être augmentée d'un angle P, qui sera évidemment le même pour tous les points placés dans le plan $KC'H$, puisque ces points sont constamment à la même distance les uns des autres & du point C'. Il est visible de plus, que cet angle P sera aussi le même pour tous les points placés dans un autre plan quelconque parallèle à $KC'H$. Car il est évident qu'il seroit le même pour tous les points d'un plan qui passeroit par G & par l'axe Cp ; donc &c.

III.

Soient présentement

La constante Cp . . . . a

pC' . . . . b

Par conséquent CC' . . . . $a - b$

Le cosinus de l'angle pCe . . . . y

Son sinus . . . . $\sqrt{1 - yy}$

Par conséquent Ce . . . . $y \times Cp$

ou ay

Et pe . . . . $a\sqrt{1 - yy}$

$C'G$ . . . . f

L'angle $KC'G$ X

Par conséquent GL . . . . f sin. X

Et $C'L$ . . . . f cos. X

La distance du point G au plan $ZCez$ . . . . π

Sa distance au plan $E'Zz$ . . . . ρ

Sa distance au plan $E'Ce$ . . . . ϖ

On aura, comme il est très-aisé de le voir par les Elémens de Géométrie, & comme je l'ai démontré, Article 25 de mes *Recherches sur la précession des Equinoxes*,

$\pi = (a - b)\sqrt{1 - yy} + fy \text{ cos. } X$;

$\rho = (a - b)y - f \text{ cos. } X\sqrt{1 - yy}$;

$\varpi = f \text{ sin. } X$.

IV.

Soit g (*figure* 16.) la projection du point G sur le plan fixe $ZCez$; & ayant mené les perpendiculaires

gl à Ce, & gk à Cz, on aura évidemment gl ou $Ck = \varpi$; & Cl ou $gk = \rho$. Imaginons ensuite dans le plan $ZCez$, deux lignes absolument fixes & immobiles ACB, CD, perpendiculaires l'une à l'autre; & soit l'angle $zCB = e$. En menant les lignes gm, kn perpendiculaires à CB, & km parallele à CB, on aura $gN = gm - mN = gm - kn = gk \times \text{cos}.\, e - Ck \times \text{sin}.\, e$; & $CN = Cn + nN = Cn + km = Ck.\, \text{cos}.\, e + gk.\, \text{sin}.\, e$. Donc si on fait $CN = z$ & $gN = u$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} z = \varpi\, \text{cos}.\, e + \rho\, \text{sin}.\, e \\ u = \rho\, \text{cos}.\, e - \varpi\, \text{sin}.\, e \end{array}\right\} (A)$$

Si la ligne fixe AB étoit de l'autre côté de Zz, on auroit

$$\left.\begin{array}{l} z = \varpi\, \text{cos}.\, e - \rho\, \text{sin}.\, e \\ u = \rho\, \text{cos}.\, e + \varpi\, \text{sin}.\, e \end{array}\right\} (B)$$

Si on regarde AB comme représentant la position de Zz au premier instant du mouvement, alors e sera l'angle parcouru durant le tems t (qui s'est écoulé depuis ce premier instant) par le point e, qui est la projection de l'extrémité de l'axe du corps; si le mouvement du point e se fait de e vers z, il faudra se servir des deux formules (A); si au contraire ce mouvement se fait de e vers Z, il faudra se servir des formules (B); & ce seront les formules que nous adopterons ici; car nous supposerons que le mouvement du point e se fasse de e vers Z.

Soit enfin ξ la valeur de l'angle $KC'G$ (*figure* 15.) au commencement du mouvement, ξ étant différent pour chaque point G; & comme cet angle ξ devient (*hyp.*) $\xi + P$ après le tems t, on aura .... $X = \xi + P$.

Donc cos. $X =$ cos. $\xi + P =$ cos. ξ cos. $P -$ sin. ξ sin. P ; & sin. $X =$ sin. $\xi + P =$ sin. ξ cos. $P +$ sin. P cos. ξ ; donc après un tems quelconque t, la distance du point G au plan $EZC\zeta$, sera

$\pi = a - b(\sqrt{1 - yy}) + fy$ cos. ξ cos. $P - fy$ sin. ξ sin. P ;

La distance de la projection g (*fig.* 16.) du point G à la ligne fixe CB, sera

$u = [(a - b)y - f$ cos. ξ cos. $P \sqrt{1 - yy} + f$ sin. ξ sin. $\sqrt{1 - yy}]$ cos. $e + [f$ sin. ξ cos. $P + f$ sin. P cos. $\xi] \times$ sin. e ;

Et la distance de la projection g à la ligne fixe CD, sera

$\zeta = [f$ sin. ξ cosin. $P + f$ sin. P cosin. $\xi]$ cosin. e $- [(a - b)y - f$ cos. ξ. cos. $P . \sqrt{1 - yy} + f$ sin. ξ sin. $P . \sqrt{1 - yy}]$ sin. e.

V.

Il est clair que dans le tems dt le point G (*fig.* 15.) parcourra perpendiculairement au plan $ZCez$, & parallèlement à CE', l'espace $d\pi$; parallèlement à CD (*fig.* 16.) l'espace du; & parallèlement à CB l'espace dz.

Donc si on suppose que le centre C parcourre durant ce même tems les espaces dq, ds, dx, dans des directions parallèles à ces mêmes lignes; le mouvement total, ou la vitesse du point G à l'instant dt sera $\frac{dq + d\pi}{dt}$ parallèlement à CE' ; $\frac{ds + du}{dt}$ parallèlement à CD ;

$\frac{dx + dz}{dt}$ parallèlement à CB; & dans l'instant suivant & égal dt, les vitesses seront,

$$\frac{dq' + d\pi'}{dt} = \frac{dq + ddq + d\pi + dd\pi}{dt}$$

$$\frac{ds' + du'}{dt} = \frac{ds + dds + du + ddu}{dt}$$

$$\frac{dx' + dz'}{dt} = \frac{dx + ddx + dz + ddz}{dt}.$$

Donc si on nomme θ le tems durant lequel la pesanteur p feroit parcourir à un corps pesant l'espace a, on aura la force perdue par le point G parallèlement à $CE' = \frac{dq + d\pi - dq' - d\pi'}{dt^2} \times \frac{\theta^2 p}{2a} = \frac{(-ddq - dd\pi)\, p\theta^2}{2adt^2}$; on aura de même la force perdue par le point G parallèlement à $CD = \frac{-dds - ddu}{dt^2} \times \frac{p\theta^2}{2a}$; & la force perdue par le même point parallèlement à $CB = \frac{-ddx - ddz}{dt^2} \times \frac{p\theta^2}{2a}$. Ces trois forces doivent faire équilibre avec celles qui tendent à mouvoir le corps, & qu'on peut toujours réduire à trois, dont l'une agisse parallèlement à CE', la seconde parallèlement à CD, la troisiéme parallèlement à CB.

VI.

On a vû (*Tr. de Dyn.* Art. 58) que si le point Q (*fig.* 17.) du plan $E'Cz$ est tiré perpendiculairement à ce plan, & parallèlement à Ce par une puissance G, le point V du plan $ZCez$ perpendiculairement à ce plan, & parallèlement

lèlement à CE' par une puissance $=\Pi$; enfin le point G du plan $E'Ce$ parallèlement à $C\zeta$ par une puissance $=F$; on aura, dans le cas d'équilibre entre les trois puissances G, F, Π, soit que le point C soit fixe ou non, les équations suivantes;

$$F\zeta - \Pi\mu = o$$
$$G\xi - \Pi\nu = o$$
$$F\theta - G\chi = o$$

en supposant les perpendiculaires QP' ou $CD=\xi$; QD ou $CP'=\chi$; GH ou $CE'=\zeta$; GE' ou $CH=\theta$; π ou $CR=\mu$; νR ou $C\pi=\nu$; & si le point C est libre, on aura de plus

$$F = o$$
$$G = o$$
$$\Pi = o$$

VII.

Il est évident qu'on peut regarder la force F comme résultante de tant d'autres forces qu'on voudra, toutes perpendiculaires au plan $E'CH$; que la force F sera en ce cas égale à la somme de ces forces; & que le moment $F\zeta$ de la force F par rapport à la ligne CH (j'appelle ainsi le produit de la force F par la distance de sa direction à la ligne CH) sera égal à la somme des momens de ces forces par rapport à la même ligne CH; il en est de même des autres forces G, Π.

Enfin il est évident que les loix de l'équilibre qu'on vient de trouver pour les forces F, G, Π, auront égale-

ment lieu par rapport à trois autres lignes CD, CB, CE' (*figure* 18.), auxquelles on ſuppoſera que les forces G, F, Π, ſoient parallèles ; c'eſt-à-dire, que le moment de la force F par rapport à CD, par exemple, ſera égal au moment de la force Π, par rapport à la même ligne CD; &c. & ainſi du reſte.

Donc ſi on a tant de forces qu'on voudra π', g', f', dont les unes ſoient parallèles à CE', les autres à CD, les autres à CB, leſquelles ſe faſſent équilibre ; il faudra 1°. que la ſomme de ces trois ſyſtêmes de forces, chacun pris en particulier, ſoit $= 0$; équations qui n'auront lieu que dans le cas où le point C eſt entiérement libre ; 2°. que la ſomme des momens des forces f' par rapport à l'axe CD, ſoit égale à la ſomme des momens des forces π' par rapport à ce même axe ; 3°. que la ſomme des momens des forces g' par rapport à CB, ſoit égale à la ſomme des momens des forces π' par rapport à ce même axe ; 4°. enfin que la ſomme des momens des forces f' par rapport à CE', ſoit égale à la ſomme des momens des forces g' par rapport à ce même axe. On ſe ſouviendra que le moment d'une force par rapport à un axe, ſe prend par le produit de cette force & d'une perpendiculaire tombant de cet axe ſur la direction de cette force.

VIII.

Appliquons maintenant ces principes au Problême dont il s'agit ; & ſuppoſons (*fig.* 18.) que le corps en

mouvement soit sollicité par trois forces, dont l'une Ψ soit parallèle à CE', la seconde γ parallèle à CD, la troisième φ parallèle à CB; & soient nommées

Les distances de la force Ψ à CB & CD .... ν' & μ';

Les distances de la force γ à CB & CE' ... ξ' & χ';

Les distances de la force φ à CE' & CD ... θ' & ζ';

Il est évident que les forces Ψ, γ, φ doivent être en équilibre avec celles qu'on a trouvées ci-dessus, & qui doivent être détruites dans le mouvement du corps; donc nommant G chaque particule du corps, on aura

$$1^o.\ \int \frac{(-ddq - dd\pi)\,p\,\theta^2\,G}{2\,a\,dt^2} + \Psi = o.$$

$$2^o.\ \int \frac{(-dds - ddu)\,p\,\theta^2\,G}{2\,a\,dt^2} + \gamma = o.$$

$$3^o.\ \int \frac{(-ddx - dd\zeta)\,p\,\theta^2\,G}{2\,a\,dt^2} + \varphi = o.$$

$$4^o.\ \int \frac{G(-ddq - dd\pi)\,p\,\theta^2\,u}{2\,a\,dt^2} + \Psi\,\nu' - \int \frac{G(-dds - ddu)\,p\,\theta^2\,\pi}{2\,a\,dt^2} - \gamma\,\xi' = o.$$

$$5^o.\ \int \frac{G(-dds - ddu)\,p\,\theta^2\,z}{2\,a\,dt^2} + \gamma\,\chi' - \int \frac{G(-ddx - dd\zeta)\,p\,\theta^2\,u}{2\,a\,dt^2} - \varphi\,\theta' = o.$$

$$6^o.\ \int \frac{G(-ddq - dd\pi)\,p\,\theta^2\,z}{2\,a\,dt^2} + \Psi\,\mu' - \int \frac{G(-ddx - dd\zeta)\,p\,\theta^2\,\pi}{2\,a\,dt^2} - \varphi\,\zeta' = o.$$

Ces six équations donneront le mouvement du corps,

Pour avoir l'intégrale de $G\,dd\pi + G\,ddq$, & celle $G\,(-ddq - dd\pi)\,u$, il faut d'abord prendre les différences premiere & seconde de π, en faisant varier seulement e, y, & P, ensuite prendre l'intégrale en ne faisant varier que f, ξ, & b. Il en est de même des autres.

On peut simplifier les trois premieres équations, en remarquant que par la propriété du centre de gravité, on a $\int G\,(a-b) = o$, $\int G f \sin.\,\xi = o$, $\int G f \cos.\,\xi = o$. Car après la substitution des valeurs de π, u, z, dans ces équations, effaçant les termes qui seront multipliés par quelqu'une des trois quantités qu'on vient de trouver égales à zero, on réduira les trois premieres équations aux trois suivantes ;

$$\int \frac{-G\,p\,\theta^2\,ddq}{2\,a\,dt^2} + \Psi = o \dots\dots\dots\dots (F)$$

$$\int \frac{-G\,dds.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2} + \gamma = o \dots\dots\dots\dots (G)$$

$$\int \frac{-G\,ddx.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2} + \varphi = o \dots\dots\dots\dots (H)$$

Par la même raison on simplifiera les trois autres, en considérant que $\int G.\,u = o$, $\int G.\,\pi = o$; &c. & par conséquent $ddq \int G.\,u = o$; $ddx \int G.\,\pi = o$ &c. Donc on aura

$$\int \frac{-dd\pi.\,p\,\theta^2\,u\,G}{2\,a\,dt^2} + \Psi\,\nu' - \int \frac{-ddu.\,p\,\theta^2\,\pi\,G}{2\,a\,dt^2}$$
$$- \gamma\,\xi' = o \dots\dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

$$\int \frac{-ddu \cdot p\,\theta^2\, Gz}{2\,a\,d\,t^2} + \gamma\chi' - \int \frac{-ddz \cdot p\,\theta^2\, Gu}{2\,a\,d\,t^2}$$
$$-\varphi\theta' = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M)$$
$$\int \frac{-dd\pi \cdot p\,\theta^2\, Gz}{2\,a\,d\,t^2} + \Psi\mu' - \int \frac{G.-ddz \cdot p\,\theta^2\,\pi}{2\,a\,d\,t^2}$$
$$-\varphi\zeta' = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (N)$$

On peut remarquer dans ces équations, que $\pi\,ddu - u\,dd\pi$ eſt $= d(\pi\,du - u\,d\pi)$; que de même $u\,ddz - z\,ddu$, eſt la différence de $u\,dz - z\,du$; & qu'enfin $\pi\,ddz - z\,dd\pi$ eſt celle $\pi\,dz - z\,d\pi$; ce qui pourra ſervir à abréger le calcul dans pluſieurs occaſions.

Par exemple, ſi $\Psi\,\nu'$, $\gamma\,\xi'$ &c. & les autres quantités analogues ne dépendoient point des variables π, z, u, on pourroit intégrer les équations précédentes en les réduiſant aux différences premières.

IX.

Suppoſons que le corps ne faſſe que de très-petites oſcillations dans tous les ſens, le calcul des équations devient beaucoup plus ſimple. Car alors on peut ſuppoſer de plus que l'axe Cp, qui a été pris arbitrairement, ne faſſe qu'un très-petit angle Π' avec Ce; & on aura $\sqrt{1 - yy} = \Pi'$ en négligeant les quantités infiniment petites du ſecond ordre; $y = 1$; coſ. $P = 1$, coſ. $e = 1$, ſin. $P = P$, ſin. $e = e$; donc on aura en négligeant les termes où Π', P, e, ſe trouveroient enſemble;

$$\pi = (a - b)\,\Pi' + f\,\text{coſ.}\,\xi - fP\,\text{ſin.}\,\xi$$
$$u = a - b - f\,\text{coſ.}\,\xi.\,\Pi' + fe\,\text{ſin.}\,\xi$$
$$z = f\,\text{ſin.}\,\xi + fP\,\text{coſ.}\,\xi - (a - b)\,e;$$

Donc nommant n l'angle que l'axe Cp (*figure* 15.) parcourt en s'approchant de Ce, & faisant attention que $dn = -d\Pi'$ & $dd\Pi' = -ddn$, on aura

$$dd\pi = -(a-b)\,ddn - f\,\text{sin.}\,\xi\,ddP;$$

$$ddu = +ddn \,.\, f\,\text{cos.}\,\xi + f\,dde\,\text{sin.}\,\xi;$$

$$ddz = +f\,ddP\,\text{cos.}\,\xi - (a-b)\,dde;$$

Donc en négligeant ce qu'on doit négliger (c'est-à-dire les quantités dP^2, $PddP$, $\Pi\,ddn$ &c. qui sont censées nulles par rapport à ddP, ddn, &c. lorsque P, n, &c. sont supposés excessivement petites, comme on le suppose ici), les trois équations L, M, N, deviendront les trois suivantes ;

$$\frac{p\,\theta^2\,ddn}{2\,a\,dt^2}\int G\,(a-b)^2 + \frac{p\,\theta^2\,ddP}{2\,a\,dt^2}\int G\,.\,f(a-b)\ \text{sin.}\,\xi + \Psi\,\nu' = -\frac{p\,\theta^2\,ddn}{2\,a\,dt^2}\int Gff\,\text{cos.}\,\xi^2 + \frac{dde\,.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2}\int Gff\,\text{sin.}\,\xi\,\text{cos.}\,\xi + \gamma\,\xi' \ldots\ldots\ldots\ldots (P)$$

$$-\frac{ddn\,.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2}\int Gff\,\text{sin.}\,\xi\,\text{cos.}\,\xi - \frac{dde\,.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2}\int Gff\ \text{sin.}\,\xi^2 + \gamma\,\chi' = -\frac{ddP\,.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2}\int Gf(a-b)\,\text{cos.}\,\xi + \frac{dde\,.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2}\int G\,(a-b)^2 + \varphi\,\theta' \ldots\ldots\ldots (R)$$

$$\frac{ddn\,.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2}\int G\,(a-b)\,f\,\text{sin.}\,\xi + \frac{ddP\,.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2}\int Gff\ \text{sin.}\,\xi^2 + \Psi\,\mu' = -\frac{ddP\,.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2}\int Gff\,\text{cos.}\,\xi^2 + \frac{dde\,.\,p\,\theta^2}{2\,a\,dt^2}\int G\,(a-b)\,f\,\text{cos.}\,\xi + \varphi\,\zeta' \ldots\ldots (S)$$

X.

Si l'axe Cp passe, ou exactement, ou à-peu-près, par le centre de gravité de chacune des coupes $KC'H$ perpendiculaires à cet axe, on aura (en prenant G' pour les seules particules placées dans la coupe $KC'H$) $\int G'f$ sin. $\xi = o$, & $\int G'f$ cos. $\xi = o$; & par conséquent on aura pour chaque coupe $KC'H$, $\int G'f(a-b)$ sin. $\xi = o$, & $\int G'f(a-b)$ cos. $\xi = o$. Donc aussi $\int Gf(a-b)$ sin. $\xi = o$, & $\int Gf(a-b)$ cos. $\xi = o$. En ce cas les équations précédentes se simplifieront beaucoup.

Il en seroit de même, si une ligne menée par le point C, perpendiculairement à Cp, & parallèlement au plan $ZCez$, lorsque $t = o$, passoit, ou exactement, ou à-peu-près, par les centres de gravité de toutes les coupes du solide auxquelles cette ligne seroit perpendiculaire; car alors on auroit $\int G'(a-b) = o$, $\int G'f$ cos. $\xi = o$; & par conséquent $\int G(a-b)f$ sin. $\xi = o$, & $\int Gf$ cos. $\xi . f$ sin. $\xi = o$.

Enfin il en seroit de même encore, si la perpendiculaire à Cp, menée dans le plan $E'Ce$, lorsque $t = o$, passoit, ou exactement, ou à-peu-près, par le centre de gravité de chacune des coupes du solide, auxquelles elle seroit perpendiculaire. Car alors on auroit $\int Gf$ cos. ξ $(a-b) = o$, $\int Gf^2$ sin. ξ cos. $\xi = o$.

Il est à remarquer encore, que si le plan passant par l'axe Cp, & perpendiculaire au plan $ZCez$, lorsque $t = o$, divise, ou exactement, ou à-peu-près, le solide en deux portions égales & semblables, on aura les deux équations

$$\int G f^2 \text{ sin. } \xi \text{ cos. } \xi = o$$
$$\int G f \text{ sin. } \xi (a - b) = o.$$

XI.

Dans le cas de $\int G f \text{ sin. } \xi (a - b) = o$, de $\int G f^2$ sin. ξ cos. $\xi = o$, & de $\int G f (a - b)$ cos. $\xi = o$, on aura les équations

$$\frac{p\,\theta^2}{2\,a\,d\,t^2} \times [dd\eta \int G (a-b)^2 + dd\eta \times \int G f f \text{ cos. } \xi^2]$$
$$+ \Psi \nu' - \gamma \xi' = o \ldots\ldots\ldots\ldots (T)$$
$$\frac{p\,\theta^2}{2\,a\,d\,t^2} \times [-dd\epsilon \int G f f \text{ sin. } \xi^2 - dd\epsilon \times \int G (a-b)^2]$$
$$+ \gamma \chi' - \varphi \theta' = o \ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$
$$\frac{p\,\theta^2}{2\,a\,d\,t^2} \times dd P \int G f f + \Psi \mu' - \varphi \zeta' = o \ldots (X)$$

A l'égard des équations (F), (G), (H), elles ne reçoivent aucun changement.

Le cas dont il s'agit ici, est celui d'un solide de révolution, ou à-peu-près tel, animé par trois forces quelconques Ψ, γ, φ.

XII.

Il peut être quelquefois plus commode de rapporter le mouvement du corps, non aux lignes fixes *CD*, *CB*, mais aux lignes mobiles *Ce*, *Cz* (*fig.* 16.); en ce cas on prendra les formules (*A*) de l'Art. IV. & après avoir trouvé en conséquence les valeurs de z & de u, on mettra simplement e au lieu de sin. e, à cause que e est très-petit; & au lieu de cos. e, on mettra $1 - \frac{e^2}{2}$.

On

On différentiera ensuite, pour avoir les valeurs de ddz & ddu; & laissant subsister les quantités dde, de^2, dans la différentielle du second ordre qui en viendra, on effacera les termes où la quantité e se rencontre encore, parce que ces termes sont nuls ou censés tels; e étant ici (*hyp*) une quantité infiniment petite. De plus, si dans cette différentielle on met $-d\varepsilon$ & $-dd\varepsilon$ pour de & dde, en prenant $d\varepsilon$ pour l'angle que parcourt la ligne Ce de e vers Z (lequel angle est égal à $-de$), on aura précisément les formules qui ont été trouvées dans nos *Recherches sur la précession des Equinoxes*, Art. 43; savoir;

$$-ddu = -f \text{ cos. } X . d\left(\frac{ydy}{\sqrt{1-yy}}\right) + \frac{2fdP \text{ sin. } X . ydy}{\sqrt{1-yy}} - ddy(a-b) - fdd\varepsilon \text{ sin. } X - 2fd\varepsilon dP \text{ cos. } X - fddP \text{ sin. } X . \sqrt{1-yy} - fdP^2 \times \text{cos. } X\sqrt{1-yy} + yd\varepsilon^2(a-b) - fd\varepsilon^2 \text{ cos. } X . \sqrt{1-yy};$$

$$-ddz = \frac{2fd\varepsilon . ydy \text{ cos. } X}{\sqrt{1-yy}} + 2d\varepsilon dy(a-b) + 2fd\varepsilon dP \times \text{sin. } X\sqrt{1-yy} + ydd\varepsilon(a-b) - fdd\varepsilon \text{ cos. } X\sqrt{1-yy} - fddP \text{ cos. } X + fdP^2 \text{ sin. } X;$$

Enfin $-dd\pi = -fddy \text{ cos. } X + 2fdydP \text{ sin. } X + fyddP \text{ sin. } X + (a-b)d\left(\frac{ydy}{\sqrt{1-yy}}\right) + fydP^2 \text{ cos. } X.$

De plus on mettra dans ces différentielles à la place de cos. X, sa valeur cos. $\xi + P =$ cos. ξ . cos. $P -$ sin. ξ . sin. P ; & à la place de sin. X, sa valeur sin. $\xi + P =$ sin. ξ cos. $P +$ sin. P cos. ξ.

Enfin dans les équations L, M, N, on mettra au lieu de π, u, z leurs valeurs trouvées dans l'Art. IV, mais simplifiées, en supposant cos. $e = 1$ & sin. $e = 0$, ce qui donnera

$u = (a - b) y - f$ cos. ξ cos. $P \sqrt{1 - yy} + f$ sin. ξ sin. $P \sqrt{1 - yy}$;

$z = f$ sin. ξ cos. $P + f$ sin. P cos. ξ;

Et $\pi =$ comme dans le cas général, $(a - b) \sqrt{1 - yy} + fy$ cos. ξ cos. $P - fy$ sin. ξ sin. P.

Dans ce cas il faudra supposer que les puissances Ψ, γ, ϕ soient parallèles aux lignes CE', Ce, Cz, pour rendre le calcul plus facile.

XIII.

Dans le cas où le corps ne fait que de très-petites oscillations, si l'axe Cp du corps étoit supposé dans une situation telle, que l'angle initial pCD (*fig.* 18.) ne fût pas fort petit ; alors au lieu de y, on pourroit mettre cos. $K - n$, ou cos. $K + n$ sin K, K exprimant l'angle initial pCD ; & au lieu de $\sqrt{1 - yy}$, on mettroit de même sin. $K - n$ cos. K; d'où il est aisé de voir les changemens qui en résulteroient dans les valeurs de u, z, π ainsi que dans celles de ddu, ddz, $dd\pi$.

XIV.

Lorſque les oſcillations ſont fort petites, il eſt aiſé de voir que ſi on rapporte la puiſſance Ψ perpendiculaire au plan Zez, aux lignes Cz, Ce (*fig.* 16.), on aura, au lieu de $\Psi\mu'$, la quantité $\Psi\mu' - \Psi e\nu'$, & au lieu de $\Psi\nu'$, $\Psi\nu' + \Psi e\mu'$; d'où l'on voit que ſi μ' & ν' ſont l'une & l'autre fort petites, on pourra ſuppoſer les quantités $\Psi\mu'$ & $\Psi\nu'$ rapportées indifféremment, la premiere à Ce ou CD, la ſeconde à CB ou Cz, parce que e étant fort petit, $e\nu'$, & $e\mu'$ ſont nuls par rapport à μ' & à ν'. Il en ſera de même des autres puiſſances γ, φ, à proportion, & *mutatis mutandis*.

XV.

De plus, lorſque les oſcillations du corps ſont fort petites, il eſt encore aiſé de voir que dde, ddP, & $dd\eta$ ſont incomparablement plus grands que de^2, dP^2, $d\eta^2$, & que $dedP$, $ded\eta$, $dPd\eta$. C'eſt pourquoi on pourra effacer ces dernieres quantités dans les valeurs trouvées ci-deſſus, Art. XII, pour ddu, ddz, $dd\pi$, en ſe reſſouvenant que $d\eta = \frac{dy}{\sqrt{1-yy}}$, que $y = \text{coſ.}\, K + \eta$ ſin. K; & que $\sqrt{1-yy} =$ ſin. $K - \eta$ coſ. K; ce qui donnera (en faiſant K très-petit) les mêmes équations qu'on a trouvées dans l'Art. IX. ci-deſſus, en ſuppoſant que les puiſſances Ψ, γ, φ, puiſſent être indifféremment rapportées aux lignes Ce, Cz, ou CD, CB.

Du reste il est toujours aisé de voir par les Elémens de Géométrie, les changemens qu'il faut faire aux quantités $\psi\mu'$, $\psi\nu'$, &c. pour rapporter les puissances ψ, γ, φ, aux lignes de position variable Ce, Cz, c'est-à-dire, pour les changer en d'autres qui soient parallèles à CE', Ce, Cz.

XVI.

Pour trouver la loi des forces ψ, γ, φ, lorsque le corps est supposé tourner autour d'un axe fixe, soit que cet axe se meuve d'ailleurs ou non, d'un mouvement parallèle à lui-même; on supposera que Cp soit cet axe, & se confonde avec Ce; ce qui est permis, puisque Cp a été pris arbitrairement au-dedans du corps, & que la position du plan fixe Zez est aussi arbitraire; & l'on aura $y = 1$, $\sqrt{1 - yy} = o$, $e = o$, sin. $e = o$, cos. $e = 1$; donc $\pi = f$ cos. $\xi + P = f$ cos. ξ cos. P $- f$ sin. ξ sin. P;

$u = a - b$, & par conséquent du & $ddu = o$;

$z = f$ sin. $\xi + P = f$ sin. ξ cos. $P + f$ sin. P cos. ξ;

D'où l'on tirera facilement les valeurs de ddz & $dd\pi$ en ne faisant varier que P; & par conséquent la loi du mouvement du corps, en mettant ces valeurs dans les six premieres équations du §. VIII. De plus, si on suppose que l'axe Cp n'ait aucun mouvement de transport, on aura $dq = o$, $ds = o$, $dx = o$. C'est pourquoi on aura d'abord en général,

$$- \frac{p\theta^2 ddq}{2adt^2} \int G - dd \frac{(\text{cos. } P).p\theta^2}{2adt^2} \times \int\int G \text{ cos. } \xi$$

$$+dd\frac{(\text{fin. }P).p\theta^2}{2adt^2}\times\int\int G\,\text{fin. }\xi+\Psi=0\ldots(\alpha)$$

$$-\frac{p\theta^2 dds}{2adt^2}\int G+\gamma=0\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

$$-\frac{p\theta^2 ddx}{2adt^2}\int G-dd\frac{(\text{cof. }P)p\theta^2}{2adt^2}\times\int\int G\,\text{fin. }\xi$$

$$-dd\frac{(\text{fin. }P).p\theta^2}{2adt^2}\times\int f G\,\text{cof. }\xi+\varphi=0\ldots(\gamma)$$

$$-\frac{ddq.p\theta^2}{2adt^2}\int G(a-b)-dd(\text{cof. }P)\times\frac{p\theta^2}{2adt^2}$$

$$\times\int Gf\,\text{cof. }\xi\,(a-b)+dd\frac{(\text{fin. }P).p\theta^2}{2adt^2}\int f(a-b)$$

$$\text{fin. }\xi.G+\Psi\nu'=-\frac{dds.p\theta^2.\text{cof. }P}{2adt^2}\times\int f\,\text{cof. }\xi.G$$

$$+\frac{dds.p\theta^2}{2adt^2}\text{fin. }P\times\int f\,\text{fin. }\xi.G+\gamma\xi'\ldots\ldots(\delta)$$

$$-\frac{p\theta^2 dds}{2adt^2}\text{cof. }P\int fG\,\text{fin. }\xi-\frac{p\theta^2 dds}{2adt^2}\text{fin. }P\int fG$$

$$\text{cof. }\xi+\gamma\chi'=-\frac{p\theta^2 ddx}{2adt^2}\int G(a-b)-\frac{p\theta^2}{2adt^2}$$

$$dd\,\text{cof. }P\int fG\,\text{fin. }\xi(a-b)-\frac{p\theta^2}{2adt^2}dd\,\text{fin. }P\int fG$$

$$(a-b)\,\text{cof. }\xi+\varphi\theta'=0\ldots\ldots\ldots\ldots(\varepsilon)$$

Enfin $-\frac{ddq.p\theta^2}{2adt^2}\text{cof. }P\int fG\,\text{fin. }\xi-\frac{ddq.p\theta^2}{2adt^2}$

$$\text{fin. }P\int fG\,\text{cof. }\xi-\frac{p\theta^2}{adt^2}dd(\text{cof. }P)\,\text{fin. }P\times\int ffG$$

$$+\frac{.p\theta^2}{adt^2}dd(\text{fin. }P)\,\text{cof. }P\times\int Gff+\Psi\mu'=-$$

$$\frac{p\theta^2}{2adt^2}ddx\times\text{cof. }P\int fG\,\text{cof. }\xi+\frac{p\theta^2 ddx}{2adt^2}$$

$$\times\text{fin. }P\int fG\,\text{fin. }\xi+\Psi\zeta'\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\vartheta)$$

Supposons maintenant que le point C soit fixement attaché, & que par conséquent $dx = o$, $dq = o$, $ds = o$. Supposons de plus que le corps tourne autour de son axe; & que les puissances Ψ, γ, φ, soient $= o$; ou aura les équations suivantes

$dd \cos. P \int f G \cos. \xi - dd \sin. P \int f G \sin. \xi = o$

$dd \cos. P \int f G \sin. \xi + dd \sin. P \times \int f G \cos. \xi = o$

$dd \cos. P \int f G \cos. \xi (a - b) - dd \sin. P \int f G \sin. \xi (a - b) = o$

$dd \cos. P \int f G \sin. \xi (a - b) + dd \sin. P \int f G \cos. \xi (a - b) = o$

$dd \cos. P \sin. P - dd \sin. P \cos. P = o.$

La derniere de ces équations donne $ddP = o$; d'où il s'ensuit que le mouvement de rotation est uniforme.

Les autres équations ne renfermant que la variable P, chacun de leurs termes en particulier doit être $= o$. ainsi ces équations donnent;

1°. $\int f G \cos. \xi = o$, $\int f G \sin. \xi = o$; d'où il s'ensuit que l'axe de rotation passe par le centre de gravité du corps;

2°. $\int f G \sin. \xi (a - b) = o$; $\int f G \cos. \xi (a - b) = o$.

Ainsi, quand même l'axe de rotation passeroit par le centre de gravité du corps, si ces deux dernieres équations n'ont pas lieu, il est impossible que l'axe de rotation soit une ligne fixe & invariable, comme on le suppose. On ne doit donc point supposer qu'un corps *quelconque* tourne uniformément autour d'un axe *quelconque*.

XVII.

Pour trouver en général l'axe autour duquel le corps tourne à chaque instant, soit que cet axe change de position ou non, on fera $d\pi + dq = o$, $ds + du = o$, $dx + dz = o$; & en substituant les valeurs de cette quantité, on trouvera dans chaque tranche perpendiculaire à Cp, le point qui sera en repos; ce point se déterminera par les valeurs de f sin. X & de f cos. X, que donnera la résolution des équations. Mais on peut en venir plus simplement à bout de la maniere suivante.

On considérera d'abord que toute la difficulté se réduit à trouver les points immobiles, dans la supposition que le point C (pris à volonté dans le corps) n'ait aucun mouvement, c'est-à-dire, que l'on ait $q = o$, $s = o$, $x = o$, & par conséquent aussi $dq = o$, $ds = o$, $dx = o$. Car, quand il y a dans un corps une suite de points immobiles, ces points ne peuvent être qu'en ligne droite, comme il est aisé de le prouver (*); cette ligne droite sera donc l'axe de rotation du corps. Or cela posé, si le mouvement du centre C, qui passe toujours par l'axe de rotation, puisqu'on le suppose immobile, est perpendiculaire à cet axe; rien n'est plus facile que de trouver dans chacun des plans perpendiculaires à l'axe de

(*) En effet, prenons deux de ces points, & joignons-les par une ligne droite, il est visible que le corps tournera autour de cette ligne; donc les autres points de cette ligne seront immobiles.

rotation, les points dont le mouvement est égal & contraire à celui du centre C; & ces points seront placés dans une ligne parallèle à l'axe de rotation qui passe par C, laquelle parallèle deviendra l'axe de rotation *réel* du corps. Dans toute autre hypothèse, aucun des points du corps ne sera immobile, & il n'y aura point d'axe de rotation.

Tout se réduit donc à chercher les points dans lesquels $d\pi = o$, $du = o$, $dz = o$.

Soit $y = \text{cos. } \Pi$, $\sqrt{1 - yy} = \text{sin. } \Pi$; on aura par les équations trouvées ci-dessus

$\pi = (a - b) \text{ sin. } \Pi + f \text{ cos. } X \text{ cos. } \Pi$;

$u = [(a - b) \text{ cos. } \Pi - f \text{ cos. } X \text{ sin. } \Pi] \text{ cos. } e + f \text{ sin. } e \text{ sin. } X$;

$z = f \text{ sin. } X \text{ cos. } e - (a - b) \text{ sin. } e \text{ cos. } \Pi + f \text{ cos. } X \text{ sin. } e \text{ sin. } \Pi$.

D'où l'on tire les trois équations

$f \text{ sin. } X = z \text{ cos. } e + u \text{ sin. } e$

$f \text{ cos. } X = \pi \text{ cos. } \Pi - \text{sin. } \Pi \times (u \text{ cos. } e - z \text{ sin. } e)$

$a - b = \pi \text{ sin. } \Pi + \text{cos. } \Pi \, (u \text{ cos. } e - z \text{ sin. } e)$

La premiere se trouve en multipliant par cos. e la valeur de z, & par sin. e la valeur de u, & en ajoutant ensemble les deux équations.

La seconde, en multipliant par cos. Π la valeur de π, par $-$ sin. Π cos. e la valeur de u, & par $+$ sin. Π sin. e la valeur de z, & en ajoutant les trois équations.

La troisiéme enfin se trouve en multipliant par sin. Π la valeur de π, par cos. e cos. Π celle de u, & par $-$ sin. e

cos. Π

cos. Π celle de z, & en ajoutant les trois équations.

Si on différentie la troisiéme équation en regardant $a - b$ comme constante, & en supposant $d\pi = o$, $du = o$, $dz = o$; on aura

$\pi d\Pi \cos. \Pi - d\Pi \sin. \Pi (u \cos. e - z \sin. e) + \cos. \Pi \times (-u de \sin. e - z de \cos. e) = o$

Différentions de même la premiere & la seconde en prenant dP pour la différentielle de X, & en mettant dans les différentielles, au lieu de $f \cos. X$ sa valeur $\pi \cos. \Pi - \sin. \Pi (u \cos. e - z \sin. e)$, & au lieu de $f \sin. X$ sa valeur $z \cos. e + u \sin. e$; nous aurons deux autres équations différentielles, dont la seconde étant comparée à celle que nous venons de trouver, donnera $\frac{dP \cos. \Pi}{d\Pi}$ $(z \cos. e + u \sin. e) = u \cos. e - z \sin. e$, équation en z & en u, qui montre que la projection de tous les points immobiles, faite sur le plan $ZCez$, est une ligne droite; & si dans l'équation différentielle qu'on vient de trouver, on substitue à la place de u sa valeur en z, ou à la place de z sa valeur en u, tirée de l'équation différentielle précédente $\pi d\Pi \cos. \Pi$ &c. on aura une autre équation en π & en z, ou en π & en u, qui montrera que la projection de tous les points immobiles, faite sur chacun des plans $E'CD$, $E'CB$, est aussi une ligne droite passant par C; d'où il s'ensuit que tous les points immobiles sont dans une même ligne droite passant par C, & qui sera par conséquent l'axe de rotation. Ce qui s'accorde avec ce qui a été remarqué plus haut. On trouvera la posi-

tion de cet axe par le moyen de ses projections sur deux quelconques des trois plans $ZCez$, $E'CD$, $E'CB$.

Pour rendre le calcul plus simple, supposons dans les équations en z & en u, en z & en π, l'angle $e = o$, auquel cas on aura cos. $e = 1$, sin. $e = o$; dans cette hypothese les projections de l'axe de rotation seront rapportées aux plans ZCz, $E'Ce$, $E'Cz$ (*fig.* 16.) dont les deux derniers sont de position variable & donnée à chaque instant; on aura pour lors $\frac{z\,dP \text{ cos. } \Pi}{d\Pi} = u$, & $\pi\,d\Pi \text{ cos. } \Pi - u\,d\Pi \text{ sin. } \Pi - z\,de \text{ cos. } \Pi = o$. Donc

$$z\,dP \text{ cos. } \Pi = u\,d\Pi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (P')$$

$$\pi\,d\Pi \text{ cos. } \Pi = z\,dP \text{ cos. } \Pi \,.\, \text{sin. } \Pi + z\,de \text{ cos. } \Pi,$$

ou $\pi\,d\Pi - z\,dP \text{ sin. } \Pi - z\,de = o \ldots\ldots (Q')$

$$\pi\,d\Pi \text{ cos. } \Pi - u\,d\Pi \text{ sin. } \Pi - \frac{u\,d\Pi \,.\, de}{dP} = o \,..\, (R')$$

XVIII.

On pourroit aussi trouver l'axe de rotation d'une autre maniere, à-peu-près comme nous avons trouvé art. 72 de la *Precession des Equinoxes*, l'axe de rotation de la Terre; pour cela on différentiera les valeurs de π, u, z, & on fera dans les différentielles cos. $e = 1$, & sin. $e = o$; ce qui donnera

$$d\pi = -f\,d\Pi \text{ cos. } X \text{ sin. } \Pi - f\,dP \text{ sin. } X \text{ cos. } \Pi + (a - b) \times d\Pi \text{ cos. } \Pi$$

$$du = -f\,d\Pi \text{ cos. } \Pi \text{ cos. } X - (a - b)\,d\Pi \text{ sin. } \Pi + f\,de \text{ sin. } X + f\,dP \text{ sin. } \Pi \text{ sin. } X$$

$dz = - de(a-b) \text{ cof. } \Pi + f d e \text{ cof. } X . \text{ fin. } \Pi + f d P \text{ cof. } X.$

Or faisant chacune de ces quantités $= o$, on aura trois équations, dont la troisiéme sera une suite nécessaire des deux premieres, ainsi que l'équation (R') est une suite nécessaire des deux équations (P'), (Q'). De plus les valeurs de $d\pi$, du, dz, supposées $= o$, donneront les mêmes équations que (P'), (Q'), (R'), comme il est aisé de s'en assurer, en mettant dans ces dernieres, au lieu de π sa valeur $(a-b) \text{ fin. } \Pi + f \text{ cof. } X \text{ cof. } \Pi$, au lieu de u sa valeur $(a-b) \text{ cof. } \Pi - f \text{ cof. } X . \text{ fin. } \Pi$, & au lieu de z sa valeur $f \text{ fin. } X$.

Les valeurs de $d\pi$, du, dz, supposées égales à zero, donneront

$f \text{ cof. } X = \frac{f\,d\,e}{d\,\Pi} \text{ cof. } \Pi \text{ fin. } X$, & par conséquent $\frac{\text{fin. } X}{\text{cof. } X}$ ou tang. $X = \frac{d\,\Pi}{d\,e \text{ cof. } \Pi}$; & $\frac{a-b}{f} = \frac{\text{fin. } \Pi \text{ cof. } X}{\text{cof. } \Pi} + \frac{d\,P \text{ fin. } X}{d\,\Pi}$; ou, ce qui est encore plus commode $f \text{ fin. } X = \frac{(a-b)\,d\,\Pi}{d\,P\left(1 + \frac{d\,e}{d\,P} \text{ fin. } \Pi\right)}$; & $f \text{ cof. } X = \frac{(a-b)\,d\,e \text{ cof. } \Pi}{d\,P\left(1 + \frac{d\,e}{d\,P} \text{ fin. } \Pi\right)}$; ce qui donnera les points immobiles sur chaque plan perpendiculaire à l'axe Cp, & éloigné de C de la quantité $a-b$.

XIX.

Si on ſuppoſoit que le point C fût fixement attaché, il eſt évident que le Problême qui conſiſte à trouver le mouvement du corps, ſe réſoudroit de la même maniere, & par les mêmes méthodes. Il faut ſeulement ſe ſouvenir qu'en ce cas les trois premieres équations du §. VIII. n'auroient pas lieu ici, non plus que les équations (F), (G), (H), qui en ſont dérivées. De plus, ſi le point C n'étoit pas le centre de gravité du corps, les équations $\int G u = o$, $\int G \pi = o$, n'auroient pas lieu pour lors, & par conſéquent les équations (L), (M), (N), feroient un peu plus compoſées.

XX.

Si le point C, qu'on ſuppoſe n'être plus le centre de gravité, n'étoit, ni abſolument fixe, ni abſolument libre; mais que ce fût l'extrémité d'un corps pointu, comme d'un cone, qui pût ſe promener librement ſur le plan Zez, ſans quitter ce plan, tandis que les autres parties du corps ſeroient mues en pirouettant autour de ce point C; alors il faudroit faire quelques changemens aux formules du §. VIII.

En premier lieu, le mouvement du centre C parallèlement à CE' ſera $= o$ dans l'hypothèſe préſente; c'eſt pourquoi on aura $q = o$, & il faudra effacer dans les formules du §. VIII. tous les termes où q & ſes différences ſe rencontrent.

En second lieu, comme le point C est supposé appuyé sur le plan $Z e z$, il n'est pas nécessaire que la somme des forces $\frac{p \theta^2 G . d d q + p \theta^2 G . d d \pi}{2 a d t^2}$ ou $\frac{p \theta^2 G d d \pi}{2 a d t^2}$ soit égale à la force Ψ ; il suffit que la résultante de ces forces, laquelle sera nécessairement perpendiculaire au plan $Z e z$, passe par le point C; c'est pourquoi, au lieu des six équations du §. VIII. on en aura cinq seulement, en supprimant la première, & laissant subsister les autres telles qu'elles sont; & il ne doit pas être surprenant que les six équations se réduisent à cinq, puisque q étant $= o$ (*hyp.*) il n'y a plus que cinq indéterminées.

Si les forces qui agissent sur le corps pirouettant, se réduisent à la pesanteur, on aura $\Psi = M p$, en appellant M la masse du corps; & la direction de cette force passera constamment par le centre de gravité du corps. Donc si on nomme l la distance du centre de gravité au point C sur lequel le corps pirouette, on aura $\nu' = l y$ sin. $90 \mp e$ & $\mu' = l y$ cos. $90 \mp e$; le signe $-$ étant pour les formules (A) de l'Art. IV. & le signe $+$ pour les formules (B); ou, ce qui revient au même, $\nu' = l y$ cos. e, & $\mu' = \pm l y$ sin. e; donc substituant ces valeurs, & effaçant dans les équations du §. VIII. les quantités q, γ & φ, après avoir supprimé en entier la premiere équation (suivant ce qui vient d'être remarqué) on aura cinq équations plus simples, qui serviront à trouver le mouvement cherché.

Si $\Psi = o$, c'est-à-dire, si le corps est supposé sans

pesanteur, les équations seront encore plus simples; car alors on aura

$$ds + du = A dt$$

$$dx + dz = B dt$$

$$M dt + \frac{2 a t dt}{p \theta^2} = + ds \int G . \pi + \int G . (\pi du - u d\pi)$$

$$N dt + \frac{2 a t dt}{p \theta^2} = - ds \int G . z + dx \int G . u + \int G . (u dz - z du)$$

$$P dt + \frac{2 a t dt}{p \theta^2} = + dx \int G . \pi + \int G (\pi dz - z d\pi).$$

Telles sont les équations par lesquelles on peut déterminer le mouvement d'un corps qui pirouette sur une de ses extrémités. Elles se déduisent, comme l'on voit, fort aisément de nos principes & de nos équations générales. Mais pour ne point trop grossir cet Ouvrage, nous n'en dirons pas davantage là-dessus, nous contentant d'avoir réduit le Problême à une simple question d'analyse.

XXI.

Ceux qui voudront voir une application importante & utile des principes exposés dans ce Mémoire, pourront avoir recours, comme je l'ai déja dit, à mes *Recherches sur la précession des Equinoxes*, publiées en 1749. Il est incontestable que j'ai donné le premier dans cet Ouvrage la méthode pour trouver le mouvement

d'un corps animé par des forces quelconques. Un ſavant Géometre a depuis mis au jour en 1752, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Pruſſe pour l'année 1750, la ſolution de ce même Problême, qu'il paroît regarder comme entiérement nouvelle, quoiqu'il avoue enſuite dans le même Volume, pag. 412, que j'ai réſolu le premier le Problême de la préceſſion des Equinoxes, qui a un rapport immédiat & eſſentiel avec celui-ci. Ainſi le titre de *Découverte d'un nouveau principe de Méchanique*, que ce grand Géometre a donné à ſon Mémoire (d'ailleurs plein de recherches ſavantes & profondes), ne doit pas ſe prendre à la rigueur.

Fin du ſecond Mémoire.





TROISIÉME MÉMOIRE.

Recherches sur les oscillations d'un corps quelconque qui flotte sur un fluide.

DANS mon *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, publié au commencement de 1752, j'ai donné une méthode générale pour déterminer les oscillations d'un corps quelconque qui flotte sur un fluide; 1°. soit que ces oscillations soient simplement rectilignes, ou simplement curvilignes, ou rectilignes en un sens, & curvilignes en un autre; 2°. soit qu'elles se fassent dans un même plan, ou dans des plans qui varient à chaque instant; 3°. soit que le corps qui oscille, soit divisé ou non en deux parties égales & semblables par un plan vertical, passant par le centre de gravité du corps, & par celui de la partie submergée; 4°. soit enfin que le fluide soit supposé en repos, ou en mouvement. Mais comme cette recherche sur les oscillations d'un corps flottant n'avoit pas un rapport direct à l'objet principal de mon *Essai sur la résistance des fluides*, je me contentai

contentai de donner & d'expliquer la méthode pour résoudre le Problême généralement & dans tous les cas; & je n'entrai d'ailleurs dans aucun détail.

Depuis ce tems, le Tome XI des Mémoires de l'Académie de Petersbourg, imprimé en 1750, m'étant tombé entre les mains, j'ai vû qu'un savant Géometre avoit tenté de résoudre le même Problême, mais seulement pour le cas où le mouvement vertical du corps & son mouvement de rotation sont synchrones, où ces deux mouvemens se font dans le même plan, & où le fluide est considéré comme en repos.

L'Auteur paroît regarder comme extrêmement difficile la solution générale du Problême; cette raison me détermine à la donner ici avec plus d'étendue que je n'ai fait dans l'Ouvrage cité, à y joindre de nouvelles remarques, des éclaircissemens qui peuvent n'être pas inutiles; enfin, à la résoudre d'une maniere encore plus générale, en y ajoutant de nouvelles difficultés. La seule supposition que je ferai, c'est que les oscillations soient très-petites. Ce n'est pas que ma solution, ou plutôt ma méthode, ne puisse s'appliquer à des oscillations quelconques; mais les équations qui en proviendroient, seroient si compliquées, qu'il seroit vraisemblablement impossible d'en tirer aucune lumiere, ni d'arriver par ce moyen à un résultat clair & précis.

Je commencerai par les oscillations des figures planes situées verticalement, lorsque ces oscillations se font dans le plan même de ces figures; je traiterai ensuite

des oscillations des corps composés de deux parties égales & semblables, lorsque ces oscillations se font dans le plan vertical qui passe par leur centre de gravité; enfin j'examinerai les oscillations d'un corps quelconque de figure irrégulière, soit qu'elles se fassent dans un même plan, ou qu'elles ne s'y fassent pas.

§. I.

Des oscillations des Figures planes.

Il est d'abord visible que tout ce que nous dirons des figures planes, s'applique de soi-même aux Cylindres qui auroient ces figures pour base, & dont l'axe seroit parallèle à la surface du fluide.

Soit donc $BODQ$ (*fig.* 19.) le corps ou le plan situé verticalement sur le fluide, BOD la partie plongée, LV l'étendue de la surface du fluide, C le centre de gravité du corps, G celui de la partie enfoncée, CT une ligne verticale, & GT une perpendiculaire à cette ligne.

Soient nommées ensuite

La pesanteur . . . . p
Le corps $BODQ$ . . . . M'
La partie enfoncée BOD au premier instant . . . . N
La densité du corps . . . . Δ
Celle du fluide . . . . δ
La surface LV du fluide . . . . k'
La partie BA de la ligne BD . . . . b

La partie AD . . . . a

La diſtance CA du centre C à BD . . . . e

La diſtance AT . . . . f

La petite ligne GT . . . . β

L'eſpace que le centre C parcourt verticalement pendant le tems t . . . . y,

L'eſpace que parcourt durant le même tems, en tournant de D vers O, un point quelconque placé à la diſtance 1 du centre C x

La ſomme des produits de chaque particule du corps, par le quarré de leur diſtance au centre de gravité, $\Delta . G$.

Enfin le tems qu'un corps peſant mettroit à tomber d'une hauteur quelconque, par exemple de la hauteur a . . . θ'.

On aura, comme je l'ai démontré, Art. 126 de l'Ouvrage cité, les deux équations ſuivantes, dans la ſeconde deſquelles $R = \frac{N\delta}{\Delta M'} - 1$ (*).

$$(A) \ldots\ldots\ldots ddx = \frac{2adt^2}{\theta'^2} \times \frac{\delta}{\Delta . G} \times \Big[N\beta - \frac{y(b^2 - a^2)k'}{2(k' - a - b)} - \frac{b^3 x}{3} - \frac{a^3 x}{3} - \frac{x(bb - aa)^2}{4(k' - a - b)} + Nx(e + f) \Big].$$

$$(B) \ldots\ldots\ldots ddy = \frac{2adt^2}{\theta^2} \Big[R - \frac{\delta k' y(a + b)}{\Delta M'(k' - a - b)} - \frac{\delta k' x(bb - aa)}{2\Delta . M'(k' - a - b)} \Big].$$

(*) Cette quantité que j'appelle ici R, a été nommée k, Art. 123 de mon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*; la quantité qu'on nomme ici M', a été nommée M; & la quantité θ' a été nommée θ.

Pour intégrer ces équations, je suppose d'abord $\frac{2\,a\,N\,\zeta\,\delta}{\theta'^2\,\Delta\,.\,G} = M$; $\frac{a\,\delta\,k'\,(bb - aa)}{(k' - a - b)\,\Delta\,.\,G\,\theta^2} = \rho$; $\frac{2\,a\,\delta}{\theta'^2\,\Delta\,.\,G} \times \left[\frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{(bb - aa)}{4(k' - a - b)} - N\,(e + f)\right] = \sigma$; $\frac{2\,a\,\delta\,k'\,(a + b)}{\theta'^2\,.\,\Delta\,.\,M'\,(k' - a - b)} = \theta$; $-\frac{a\,\delta\,(bb - aa)\,k'}{\theta'^2\,.\,\Delta\,.\,M'\,(k' - a - b)} = \pi$; $\frac{2\,a\,R}{\theta^2} = k$; j'aurai les deux équations

$$(C) \ldots\ldots ddx = (M - \rho y - \sigma x)\,dt^2$$

$$(D) \ldots\ldots ddy = (k - \theta y + \pi x)\,dt^2$$

Pour les intégrer, suivant la méthode que j'ai donnée ailleurs, je multiplie la seconde par un coëfficient indéterminé ν, & je les ajoute ensemble; ce qui donne $ddx + \nu\,ddy = dt^2\,[M + k\nu + y\,(-\rho - \theta\nu) + x\,(\pi\nu - \sigma)$; je fais ensorte que $y\,(-\rho - \theta\nu) + x\,(\pi\nu - \sigma)$ soit un multiple de $\nu y + x$; ce qui donne $\frac{-\rho - \theta\nu}{\nu} = -\sigma + \pi\nu$; équation d'où l'on tirera deux valeurs de ν, que j'appelle ν & ν'; savoir

$$(E) \ldots\ldots\ldots \nu = \frac{\sigma - \theta + \sqrt{(\sigma - \theta)^2 - 4\pi\rho}}{2\pi}$$

$$(F) \ldots\ldots\ldots \nu' = \frac{\sigma - \theta - \sqrt{(\sigma - \theta)^2 - 4\pi\rho}}{2\pi}:$$

Faisant à présent $x + \nu y = u$, $x + \nu' y = u$, on aura

$$(G) \ldots\ldots ddu = [M + k\nu + (\pi\nu - \sigma)\,u]\,dt^2$$

$$(H) \ldots\ldots ddu' = [M + k\nu' + (\pi\nu' - \sigma)\,u]\,dt^2;$$

d'où l'on tire par les méthodes connues,

$$(I) \ldots\ldots\ldots u = \frac{M + k\nu}{\sigma - \pi\nu}\,(1 - \text{cof.}\; t\sqrt{\sigma - \pi\nu})$$

$$(K) \ldots\ldots u' = \frac{M + k\nu'}{\sigma - \pi\nu'}\left(1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\sigma - \pi\nu'}\right);$$

& les deux équations $x + \nu y = u$, $x + \nu' y = u'$, donneront

$$(L) \ldots\ldots y = \frac{u - u'}{\nu - \nu'}$$

$$(M) \ldots\ldots x = \frac{\nu' u - \nu u'}{\nu' - \nu};$$

ainsi le Problême est resolu.

Corollaire I.

Supposons d'abord que les deux valeurs de ν soient finies, réelles & inégales ; il faut en ce cas, pour que la solution précédente soit bonne, que $\sigma - \pi\nu$ & $\sigma - \pi\nu'$ soient toutes deux des quantités positives, ou au moins ne soient pas négatives. Sans cela $\sqrt{\sigma - \pi\nu}$, ou $\sqrt{\sigma - \pi\nu'}$, ou l'une & l'autre quantité seroient imaginaires ; alors les quantités cof. $t\sqrt{\sigma - \pi\nu}$, & cof. $t\sqrt{\sigma - \pi\nu'}$ seroient, suivant l'expression connue des cosinus,

$$\frac{c^{\sqrt{(\pi\nu - \sigma)}\,t} + c^{-\sqrt{(\pi\nu - \sigma)}\,t}}{2},$$

$$\& \frac{c^{t\sqrt{\pi\nu' - \sigma}} + c^{-t\sqrt{\pi\nu' - \sigma}}}{2};$$

quantités qui ne renferment point d'imaginaires, ou dont l'une au moins n'en renferme pas, & qui croissent en même-tems que t; d'où l'on voit que dans ce cas les oscillations du corps ne seroient pas infiniment petites, ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi, lorsque ν' & ν sont toutes deux finies, réelles & inégales, il faut que $\sigma - \pi\nu > o$ & $\sigma - \pi\nu' > o$, pour que les oscillations du corps soient infiniment petites; mettant donc à la place de ν & de ν' leurs valeurs tirées des équations (E) & (F), on aura pour le cas dont il s'agit, $\sigma + \theta > + \sqrt{(\theta - \sigma)^2 - 4\pi\rho}$, & $\sigma + \theta > - \sqrt{(\theta - \sigma)^2 - 4\pi\rho}$; par conséquent il faut, 1°. que $\theta\sigma > - \pi\rho$; 2°. que $\sigma + \theta$ soit positif; 3°. que $(\theta - \sigma)^2$ soit plus grand que $4\pi\rho$, puisqu'on suppose ici que les racines ne sont point imaginaires. Donc supposant Ω, ω, ϖ des quantités positives quelconques, il faut que $\sigma + \theta = \Omega$; $\theta\sigma - \omega = - \pi\rho$; $(\theta - \sigma)^2 = 4\pi\rho + \varpi$.

COROLLAIRE II.

Lorsqu'un corps est en équilibre sur un fluide, & qu'on le déplace un peu de cet état, on peut voir par les calculs précédens, si l'état d'équilibre étoit *ferme*, comme l'appelle M. Daniel Bernoulli, c'est-à-dire, si le corps reviendra de lui-même à cet état. Car il n'y a qu'à examiner si les oscillations du corps doivent être très-petites, ou si elles ne le seront pas. Dans le premier cas le corps reviendra, ou tendra à revenir à son premier état; dans le second il culbutera. V. l'Ouvrage cité, Art. 125, & le *Traité de Dyn.* Art. 147. seconde Edit.

COROLLAIRE III.

Supposons à présent que les valeurs de ν & ν' soient

imaginaires, enſorte que $\nu = A + B\sqrt{-1}$, & $\nu' = A - B\sqrt{-1}$; ſubſtituant ces valeurs, & faiſant

$M + kA$ . . . . $= \delta$

kB . . . . $= \varepsilon$

$\sigma - \pi A$ . . . . $= \varphi$

$-\pi B$ . . . . $= \gamma$

$\sqrt{\sigma - \pi A - \pi B\sqrt{-1}}$, ou, ce qui revient au même, $\sqrt{\varphi + \gamma\sqrt{-1}} =$ . . . . $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ (*), on aura d'abord

$$u = \frac{\delta + \varepsilon\sqrt{-1}}{\varphi + \gamma\sqrt{-1}} \times [1 - \text{coſ.}\, t(\alpha + \beta\sqrt{-1})];$$

or coſ. $t(\alpha + \beta\sqrt{-1}) =$ par les formules connues coſ. αt. coſ. $t\beta\sqrt{-1}$ — ſin. αt. ſin. $t\beta\sqrt{-1}$; de plus, coſ. $t\beta\sqrt{-1} = \frac{c^{-\beta t} + c^{+\beta t}}{2}$, & ſin. $t\beta\sqrt{-1} = \frac{c^{-\beta t} - c^{+\beta t}}{2\sqrt{-1}}$; donc multipliant par $\varphi - \gamma\sqrt{-1}$, le haut & le bas de la valeur de u, on aura

$$u = [\delta\varphi + \varepsilon\gamma + (\varepsilon\varphi - \gamma\delta)\sqrt{-1}] \times \left[1 - \text{coſ.}\, \alpha t \left(\frac{c^{\beta t} + c^{-\beta t}}{2}\right) + \frac{\text{ſin.}\, \alpha t\,(c^{\beta t} - c^{-\beta t})}{2\sqrt{-1}}\right]$$

diviſé par $\varphi\varphi + \gamma\gamma$; & on aura de même

$$u' = [\delta\varphi + \varepsilon\gamma + (\delta\gamma - \varepsilon\varphi)\sqrt{-1}] \times [1 - \text{coſ.}\, \alpha t$$

(*) Les quantités α & β ſe trouveront par la méthode que j'ai donnée dans les Mémoires de Berlin 1746.

$\left(\frac{c^{\epsilon t}+c^{-\epsilon t}}{2}\right) - \sin. \alpha t \left(\frac{c^{\epsilon t}-c^{-\epsilon t}}{2\sqrt{-1}}\right)]$

divisé par $\varphi\varphi + \gamma\gamma$; donc

$$y = \frac{\varepsilon\phi - \gamma\delta}{B(\phi\phi+\gamma\gamma)} \times [1 - \text{cos}. \alpha t \left(\frac{c^{\epsilon t}+c^{-\epsilon t}}{2}\right)]$$

$$+ \frac{+\delta\phi + \varepsilon\gamma}{-B(\phi\phi+\gamma\gamma)} \text{sin}. \alpha t \left(\frac{c^{\epsilon t}-c^{-\epsilon t}}{2}\right);$$

$$\&\ x = \left[\frac{(\varepsilon\phi - \gamma\delta)A - B(\delta\phi+\varepsilon\gamma)}{-B(\phi\phi+\gamma\gamma)}\right] \times [1 - \text{cos}. \alpha t \frac{(c^{\epsilon t}+c^{-\epsilon t})}{2}] + \left[\frac{(\delta\phi+\varepsilon\gamma)A + (\varepsilon\phi - \gamma\delta)B}{B(\phi\phi+\gamma\gamma)}\right]$$

$$\times \text{sin}. \alpha t \left(\frac{c^{\epsilon t}-c^{-\epsilon t}}{2}\right).$$

COROLLAIRE IV.

Il est visible que dans ce cas les valeurs de y & de x ne sont plus très-petites, puisque $c^{\epsilon t}$ croît à mesure que t croît ; ainsi, 1°. la solution n'est pas bonne dans le cas où les deux valeurs de ν sont imaginaires ; 2°. dans ce même cas, l'état d'équilibre d'où le corps a été dérangé, n'étoit pas un état d'équilibre ferme, & le corps doit culbuter.

COROLLAIRE V.

Si $\pi = o$, la valeur de ν devient infinie, & celle de $\nu' = \frac{o}{o}$. Pour trouver ce qui doit arriver dans ce

ce cas-là, supposons π infiniment petite, nous aurons $\sqrt{(\sigma - \theta)^2 - 4\pi\rho} = \sigma - \theta - \frac{2\pi\varrho}{\sigma - \theta}$; d'où $\nu = \frac{\sigma - \theta}{\pi}$; $\nu' = \frac{\varrho}{\sigma - \theta}$: donc

$u = \frac{k\nu}{\theta}(1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\theta})$, en négligeant la quantité M qui est nulle par rapport à la quantité infinie $k\nu$; $u' = \frac{M + \frac{k\varrho}{\sigma - \theta}}{\sigma}(1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\sigma})$; donc y, ou $\frac{u}{\nu} = \frac{k}{\theta}(1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\theta})$; & $x = \frac{\nu' u - \nu u'}{\nu' - \nu} = \frac{\frac{\nu' u}{\nu} - u'}{\frac{\nu'}{\nu} - 1} = u' - \frac{\nu' u}{\nu} = \frac{M + \frac{k\varrho}{\sigma - \theta}}{\sigma}(1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\sigma}) - \frac{\varrho k}{(\sigma - \theta)\theta}(1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\theta})$, qui se réduit à $\frac{M}{\sigma}(1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\sigma})$, parce que quand $\pi = 0$, on a aussi $\rho = 0$. Ces deux valeurs de y & de x peuvent au reste se trouver directement, en effaçant dans les équations (C) & (D) les termes ρy & πx, & en intégrant séparément à l'ordinaire chacune de ces équations, qui ne contient plus alors qu'une seule inconnue x ou y.

Dans ce cas les oscillations seront fort petites, & l'état d'équilibre sera ferme, si σ & θ sont toutes deux positives.

COROLLAIRE VI.

Si les deux valeurs de ν & de ν' sont égales, alors

$v - v' = o$, & $u = u'$; & les formules de x & de y ne font rien connoître; pour trouver quelle doit être alors leur valeur, je ſuppoſe que les valeurs de v différent d'une quantité infiniment petite α, enſorte que $v' = \alpha + v$, & j'aurai $\frac{M + kv'}{\sigma - \pi v'} = \frac{M + kv}{\sigma - \pi v} + \frac{k\alpha}{\sigma - \pi v}$ $+ \frac{\pi\alpha(M + kv)}{(\sigma - \pi v)^2} = \frac{M + kv}{\sigma - \pi v} + \frac{k\alpha\sigma + \pi\alpha M}{(\sigma - \pi v)^2}$;

$\text{coſ.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v'} = \text{coſ.}\left[t\sqrt{\sigma - \pi v} - \frac{t\pi\alpha}{2\sqrt{\sigma - \pi v}}\right]$

$= \text{coſ.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v} + \frac{t\pi\alpha}{2\sqrt{\sigma - \pi v}}\, \text{ſin.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v}$;

donc mettant pour v' ſa valeur $\alpha + v$, & pour u' ſa valeur réſultante des expreſſions qu'on vient de trouver, on aura $y = \frac{M + kv}{\alpha(\sigma - \pi v)} \times \frac{t\pi\alpha}{2\sqrt{\sigma - \pi v}}\, \text{ſin.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v}$ $\frac{- k\alpha\sigma - \pi\alpha M}{-\alpha(\sigma - \pi v)^2}\left(1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v}\right)$ $= \frac{(-M - kv)\pi t\, \text{ſin.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v}}{2(\sigma - \pi v)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k\sigma + \pi M}{(\sigma - \pi v)^2} \times$ $\left(1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v}\right)$; & $x = \left[\frac{M + kv}{\sigma - \pi v}\right.$ $\left. - \frac{v(k\sigma + \pi M)}{(\sigma - \pi v)^2}\right] \times \left(1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v}\right)$ $+ \frac{v(M + kv)}{\sigma - \pi v} \times \frac{\pi t\, \text{ſin.}\, t\sqrt{\sigma - \pi v}}{2(\sigma - \pi v)^{\frac{1}{2}}}$.

Si $\sqrt{\sigma - \pi v}$ étoit imaginaire, il n'y auroit pas plus de difficulté; car alors coſ. $t\sqrt{\sigma - \pi v}$ ſeroit égal à la quan-

tité exponentielle toute réelle $\frac{c^{t\sqrt{\pi v - \sigma}} + c^{-t\sqrt{\pi v - \sigma}}}{2}$

& $\frac{\text{fin. } t \sqrt{\sigma - \pi v}}{(\sigma - \pi v)^{\frac{1}{2}}}$ feroit $= \frac{c^{t\sqrt{\pi v - \sigma}} - c^{-t\sqrt{\pi v - \sigma}}}{2\sqrt{(\pi v - \sigma)}}$;

quantité qui eft auffi toute réelle.

Ainfi dans le cas où les deux valeurs de v font égales, les valeurs de x & de y contiennent des arcs de cercle, & de plus des cofinus & des finus, fi $\sigma - \pi v$ eft pofitif; & des exponentielles ordinaires, fi $\sigma - \pi v$ eft négatif.

Donc dans l'un & l'autre cas, les ofcillations ne pourront être regardées comme infiniment petites, & l'état d'équilibre ne fera pas ferme. Il en faut excepter le cas où $\sigma - \pi v$ feroit pofitif, & dans lequel on auroit de plus $\pi = o$, ou $M + kv = o$; car alors les termes qui renferment l'arc t, difparoîtroient, & les autres ne renfermeroient que des cofinus d'angles.

COROLLAIRE VII.

Nous voici arrivés au feul cas qu'on ait confidéré jufqu'ici, celui du fynchronifme des deux vibrations, verticale & rotatoire.

Or il eft évident que ce fynchronifme aura lieu, fi l'une des valeurs de u, u', eft égale à zero; car alors pour un même t les deux valeurs de y & de x auront même rapport. Il faut donc que $M + kv$ foit $= o$, ou $M + k'v' = o$.

Donc, puifque l'on a en général $-\rho - \theta v = -\sigma$,

$+ \pi \nu \nu$, il s'ensuit qu'il y aura synchronisme dans les deux vibrations, lorsque $\frac{M}{k}$ sera égal à une des racines de l'équation $\frac{MM}{kk} + \frac{M}{k} \left(\frac{\sigma - \theta}{\pi} \right) = - \frac{\rho}{\pi}$.

REMARQUE I.

On pourroit croire aussi qu'une des valeurs de u seroit $= o$, lorsque $\sigma - \pi \nu$, ou $\sigma - \pi \nu'$ seroit $= o$; mais alors, comme il est aisé de le voir par la seule inspection des équations différentielles (G) & (H), la valeur de u ou celle de u' renfermeroit des arcs de cercle, à moins que $M + k \nu$ ne fût aussi $= o$; ce qui reviendroit au cas précédent.

REMARQUE II.

J'ai donné dans ma *Dynamique* (Art. 124 & suiv. seconde Edition) une méthode pour déterminer les cas où des vibrations de la nature de celle-ci seroient synchrones; mais ce détail me meneroit trop loin, & sans prétendre exclure les autres cas possibles, je me contenterai de dire que le synchronisme des vibrations aura encore lieu, si $\pi = o$, $\rho = o$, & $\sigma = \theta$, comme il est aisé de voir par l'intégration des équations (C) & (D) qui est alors très-facile; & on peut remarquer en passant que $\pi = o$ rend toujours $\rho = o$, puisque $\pi = o$ donne $b = a$, & que $b = a$ donne $\rho = o$. Au reste le cas de $\pi = o$, $\rho = o$, & $\sigma = \theta$, revient encore à celui de

$\frac{M^2}{k^2}\pi + \frac{M}{k}(-\theta + \sigma) = -\rho$; car cette équation aura lieu, $\frac{M}{k}$ étant tout ce qu'on voudra, si l'on a à la fois $\pi = o$, $\sigma = \theta$, & $\rho = o$.

COROLLAIRE VIII.

Donc en général les oscillations seront synchrones, si $\frac{M}{k}$ a la valeur déterminée par l'équation précédente. S'il y a encore d'autres cas possibles de synchronisme, on les déterminera par la méthode indiquée ci-dessus.

COROLLAIRE IX.

Supposons un corps pesant plongé dans un fluide, & en équilibre dans ce fluide, ensorte que N' soit sa partie enfoncée; on aura $\frac{N'\varrho}{\Delta M'} - 1 = o$, & $\zeta = o$.

Supposons à présent que le centre C s'éleve de la quantité α, & qu'en même-tems le corps se meuve circulairement de D vers O de la quantité ε; la partie enfoncée N deviendra $N' - \frac{k'\alpha(a+b)}{k'-a-b} - \frac{k'\varepsilon(bb-aa)}{2(k'-a-b)}$, & l'on aura $\frac{N\delta}{\Delta M'} - 1 = -\frac{k'\alpha\delta(a+b)}{\Delta M'(k'-a-b)} - \frac{k'\varepsilon\delta(bb-aa)}{2\Delta(k'-a-b)M'} = R'$; & par conséquent k, ou $\frac{2aR'}{\theta'^2} = -\frac{k'\alpha\delta(a+b).2a}{\Delta M'(k'-a-b)\theta'^2} - \frac{2ak'\varepsilon\delta(bb-aa)}{2\Delta(k'-a-b)M'\theta'^2}$; la distance ζ du centre de gravité de la partie enfoncée à-

à la ligne verticale qui passe par le centre de gravité de la masse totale, sera $\varepsilon(e+f) - \frac{\alpha(b^2 - a^2)k'}{2N'(k' - a - b)}$ $- \frac{\varepsilon(bb - aa)^2}{4N'(k' - a - b)} - \frac{b^3\varepsilon}{3N'} - \frac{a^3\varepsilon}{3N'}$; & l'on aura $M = \frac{2aN'\delta}{\theta'^2 . \Delta . G} \times [\varepsilon(e+f) - \frac{\alpha(b^2 - a^2)k'}{2N'(k' - a - b)}$ $- \frac{\varepsilon(bb - aa)^2}{4N'(k' - a - b)} - \frac{b^3\varepsilon}{3N'} - \frac{a^3\varepsilon}{3N'}]$; donc $k = -\theta\alpha + \varepsilon\pi$; & $M = -\sigma\varepsilon - \alpha\rho$; donc les deux oscillations du corps seront synchrones, s'il y a entre α & ε le rapport indiqué par l'équation suivante $\left(\frac{\sigma\varepsilon + \alpha\varrho}{\theta\alpha - \varepsilon\pi}\right)^2\pi + (\sigma - \theta)\left(\frac{\sigma\varepsilon + \alpha\varrho}{\theta\alpha - \varepsilon\pi}\right) = -\rho$.

Si b & a sont exactement ou à-peu-près égales, alors $\pi = o$, $\rho = o$; & pour que l'équation précédente ait lieu, il faudra de plus que $\sigma = \theta$; donc on a pour lors l'équation $\frac{2a\delta}{\theta'^2 . \Delta . G} \times [\frac{2a^3}{3} - N'(e+f)]$ $= \frac{2a\delta}{\theta'^2 . \Delta . M'} \times \frac{2ak'}{k' - 2a}$; & par conséquent $\frac{2a^3}{3G}$ $- \frac{N' . \overline{e+f}}{G} = \frac{2ak'}{M'(k' - 2a)}$; équation qui doit avoir lieu, pour que les deux oscillations soient synchrones.

COROLLAIRE X.

Lorsque le corps fait des oscillations synchrones, telles qu'on vient de les déterminer, on a vû que x est à y en rapport constant: donc menant l'horizontale CP, si

on prend $\frac{CP}{1} = \frac{y}{x}$, ce point P reſtera en repos ; car le mouvement de rotation de P ſuivant PH, ſera égal au mouvement y du centre C. Donc ce point P ſera le centre ſpontané de rotation du corps.

Corollaire XI.

Le point H qui répond perpendiculairement au point P, a un mouvement vertical $= y$, & un mouvement circulaire $= x . CH$, & ce mouvement circulaire en produit deux autres, l'un vertical $= \frac{x \times CH \times CP}{CH} = x . CP$ $= y$, & en ſens contraire à y, c'eſt-à-dire, à HP ; l'autre horiſontal ſuivant HB, qui ſera égal $x . PH$. Ainſi le point H eſt bien à la vérité en repos dans le ſens vertical, mais nullement dans le ſens horiſontal. On auroit donc tort de regarder ce point H comme le vrai centre de rotation du corps, ainſi que M. Bouguer paroît l'avoir fait dans ſa *Manœuvre des Vaiſſeaux*, p. 260. On peut donc regarder la ſolution de ce ſavant Géometre comme incomplette & imparfaite, au moins à cet égard, puiſqu'on y fait abſtraction d'un mouvement horiſontal très-réel de ce point H.

J'ajouterai à cette occaſion que la ſolution de M. Bouguer eſt limitée, en ce qu'il ne conſidere que le cas où les deux oſcillations ſont ſynchrones. Il eſt vrai qu'il prétend qu'elles le doivent être, mais par une raiſon que les Mathématiciens trouveront bien peu ſatisfaiſante.

Si *les deux mouvemens*, dit-il, p. 259, *n'etoient pas exactement ſimultanés, ils ne ſe perpétueroient pas; il faut qu'ils s'accordent pour ne ſe pas détruire, & la néceſſité de cet accord fait que les plans de flottaiſon ſe coupent en quelque point H.* Certainement perſonne ne verra pourquoi ces mouvemens ſi indépendans l'un de l'autre, & ſi différens en quantité & en direction, doivent être ſimultanés pour ne ſe pas détruire. Il ne peut y avoir ici d'autres cauſes de deſtruction du mouvement, que la réſiſtance & la ténacité du fluide, dont on fait abſtraction, & qui doit auſſi empêcher les mouvemens ſynchrones de ſe perpétuer. Il eſt d'autant plus ſingulier que M. Bouguer ait été dans cette erreur, que dès 1752, cinq ans auparavant, j'avois donné dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, la méthode de déterminer les deux mouvemens, ſoit dans le cas du ſynchroniſme, ſoit dans tout autre.

Je ne ſai pas au reſte ce que veut dire M. Bouguer quand il prétend, p. 260, que dans ce Problême, & en général dans les Problêmes de Méchanique, *le calcul fondé ſur quelque ſuppoſition fauſſe, demeure preſque toujours défectueux, à la différence des Problêmes de Géométrie, où l'on s'apperçoit du mécompte, en parvenant à des valeurs imaginaires.* On a vû au contraire par tout ce qui précéde, & on peut d'ailleurs s'aſſurer aiſément, que les fauſſes ſuppoſitions ſeront toujours corrigées par le dernier réſultat du calcul. Si on ſuppoſe, par exemple, que le centre monte au lieu qu'il deſcend, la valeur

de y ſera négative : ſi le corps tourne dans un ſens contraire à celui qu'on a ſuppoſé, la valeur de x ſera négative : ſi les oſcillations ne ſont pas infiniment petites, les valeurs de x & de y l'indiqueront de même, & ainſi du reſte.

COROLLAIRE XII.

Pour trouver en général la longueur du pendule ſimple iſochrone au corps oſcillant, on nommera CP, h', & on aura $x = \frac{y}{h'}$; donc l'équation (B) deviendra

$$d\,d\,y = \frac{2\,a\,d\,t^2}{\theta'^2}\left[R - \frac{\delta\,k'\,y\,(a+b)}{\Delta . M'\,(k'-a-b)} - \frac{\delta\,k'\,y\,(b\,b-a\,a)}{2\,h'\,\Delta .\,M'\,(k'-a-b)}\right]$$

; or appellant y l'arc parcouru par le pendule iſochrone de longueur λ, on auroit $d\,d\,y = \frac{2\,a\,d\,t^2}{\lambda\,\theta^2} \times (K-y)$; & par conſéquent

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\delta\,k'\,(a+b)}{\Delta .\,M'\,(k'-a-b)} + \frac{\delta\,k'\,(b\,b-a\,a)}{2\,h'\,\Delta .\,M'\,(k'-a-b)} ;$$

d'où il eſt aiſé de conclure que la longueur du pendule ſimple cherché ſera $\frac{\Delta .\,M'\,(k'-a-b)}{\delta\,k'\,(a+b) + \frac{\delta\,k'\,(b\,b-a\,a)}{2\,h'}}$.

Et ſi on n'a point d'égard au mouvement du fluide, c'eſt-à-dire, ſi k' eſt infinie, cette longueur ſera

$$\frac{2\,\Delta .\,M'\,h'}{2\,\delta\,h'\,(a+b) + \delta\,(b\,b-a\,a)}.$$

REMARQUE GÉNÉRALE.

Je n'ai point eu d'égard dans la ſolution des Problêmes précédens à la force centrifuge des parties du corps oſcillant ; mais il eſt facile de voir, que l'effet de ces forces doit être conſidéré comme nul, puiſque la viteſſe eſt infiniment petite, & que la force centrifuge eſt comme le quarré de la viteſſe. D'ailleurs il eſt aiſé de prouver que dans les oſcillations d'une figure plane, ou d'un ſolide compoſé de deux parties égales, tel que nous venons de le ſuppoſer, la ſomme des forces réſultantes des forces centrifuges eſt nulle, & que la ſomme des momens de ces forces l'eſt auſſi. Donc &c.

§. II.

Des oſcillations planes d'un corps irrégulier.

Nous ſuppoſons ici un corps irrégulier quelconque, avec cette ſeule condition, qu'il ſoit diviſé en deux parties égales & ſemblables par le plan vertical dans lequel ſe trouvent le centre de gravité de la maſſe totale, & le centre de gravité de la partie enfoncée ; conditions néceſſaires, pour que les oſcillations, tant rectilignes & verticales, que curvilignes, ſe faſſent dans ce même plan, ainſi qu'on le ſuppoſe ici. Or cela poſé, le Problême n'a aucune difficulté de plus que le précédent.

Soit donc *CBOD* (*fig.* 19.) le plan vertical qui paſſe par le centre de gravité *C* du corps, & par le centre de

gravité *G* de la partie enfoncée, & soit *BYDZ* (*fig.* 20.) la section horisontale du fluide & du corps; ensorte que les parties *BZD*, *BYD* soient égales & semblables. Ayant mené par le point *A* la ligne *ZY* perpendiculaire à *BD*, on nommera, comme ci-dessus,

La pesanteur . . . . p
Le corps enfoncé . . . . M'
La partie enfoncée au premier instant . . . . N
La densité du corps . . . . Δ
Celle du fluide . . . . δ
La surface du fluide . . . . K'
La portion de surface *BYZ* . . . . B
La portion *DZY* . . . . A
La distance *AE* du point *A* au centre de gravité *E* de la surface *BZDY* . . . . R'
Le solide que formeroit la surface *BZY*, en tournant de la quantité infiniment petite x autour de *ZAY* . . . . $xq.b^3$
Le solide formé dans la même hypothèse par la partie *ZDY* . . . . $xp.a^3$
La distance du centre de gravité du premier de ces solides à la ligne *ZY* . . . . r
La distance du centre de gravité du second à la même ligne . . . . s
La somme des produits des particules par le quarré de leur distance à un axe horizontal passant par *C* . . . . G
Et le reste comme ci-dessus; on aura

$$(N) \ldots\ldots ddx = \frac{2\,a\,dt^2}{\theta'^2} \times \frac{\delta}{\Delta . G} \times [N\mathit{6} - \frac{y(A+B)R'K'}{K'-A-B} - xqb^3r - xpa^3s - \frac{xqb^3R'(A+B)}{K'-A-B} + \frac{xpa^3(A+B)R'}{K'-A-B} + Nx(e+f)].$$

$$(O) \ldots ddy = \frac{2\,a\,dt^2}{\theta'^2} [R - \frac{\delta K'y(A+B)}{\Delta . M'(K'-A-B)} - \frac{K'x(qb^3-pa^3)\delta}{(K'-A-B)\Delta . M'}].$$

On intégrera ces équations, comme on a fait ci-devant les équations (*L*), (*M*); & on en tirera des conclusions semblables; il n'y aura à cela aucune difficulté nouvelle.

REMARQUE I.

Si on nomme h la distance du centre de gravité de la partie A à ZY, & l la distance du centre de gravité de la partie B à ZY, on aura par les propriétés connues du centre de gravité $(A+B)R' = B.l - A.h$; $xqb^3 = xB.l$; $xpa^3 = x.Ah$; & par conséquent $qb^3 = B.l$; $pa^3 = A.h$, & $qb^3 - pa^3 = (A+B).R'$. On peut substituer ces valeurs dans les équations précédentes. (*N*), (*O*).

REMARQUE II.

Pour avoir la quantité r, on prendra la somme des produits des ordonnées ut de la partie BZY par la partie infiniment petite $\theta\lambda$ de l'abscisse, & par le quarré de

$A\theta$, & on divisera ce produit par $q \,.\, b^3$; on fera de même pour avoir s dans la partie ZDY.

COROLLAIRE I.

Si la distance AE est fort petite, on pourra alors supposer $R' = o$, & effacer dans les équations (N), (O), les termes où R' se rencontre.

COROLLAIRE II.

Si de plus les parties BZY, ZDY, sont à très-peu-près égales & semblables, on pourra mettre B au lieu de A, r au lieu de s, & $q\, b^3$ au lieu de $p\, a^3$; ce qui simplifiera encore les équations.

COROLLAIRE III.

Les deux cas précédens auront lieu à la fois, si le corps qui oscille, est un solide de révolution dont l'axe soit presque vertical. C'est pourquoi ou aura dans ce cas

$$(P) \ldots\ldots ddx = \frac{2\,a\,dt^2}{\theta'^2} \times \frac{\delta}{\Delta \,.\, G} \times [NG - 2rx \,.\, hA + Nx(e+f)].$$

$$(Q) \ldots\ldots ddy = \frac{2\,a\,dt^2}{\theta'^2} \times \left[R - \frac{2\delta K' y A}{\Delta M' (K' - 2A)}\right].$$

§. III.

Des oscillations d'un corps solide quelconque de figure irréguliere.

Quoique j'aie aussi traité ce sujet dans l'Ouvrage déja

cité, & que j'aie donné tous les principes pour résoudre le Problême, je crois cependant qu'on ne sera pas fâché d'en voir ici l'application, & la solution même rendue à certains égards plus générale & plus facile. Je supposerai d'abord que le fluide a une surface infinie, & par conséquent n'a aucun mouvement avec le corps; au reste après ce que nous avons dit ci-dessus, il est facile, si l'on veut, d'avoir égard à cette circonstance, qui rend le calcul plus compliqué, sans rendre le Problême plus difficile. J'aurai soin de plus, ce qui n'a pas été exactement observé dans les figures de mon Ouvrage, d'y placer les différens points d'une maniere conforme au discours.

Soit donc *BZDY* (*fig.* 21.) la commune section du corps flottant, & de la surface du fluide au premier instant du mouvement, *A* le point de cette surface *BZDY*, sur lequel tombe la perpendiculaire ou verticale menée du centre de gravité du corps, *BAD* une ligne menée *à volonté* par ce point *A*; je dis *à volonté*, ce qu'il faut bien remarquer, parce que nous serons les maîtres dans la suite de donner à cette ligne la position que nous jugerons la plus propre à simplifier le Problême; soit enfin *ZAY* perpendiculaire à cette ligne.

Imaginons présentement que du centre de gravité de la partie enfoncée au premier instant du mouvement, on tire une ligne verticale qui tombe au point *G* de la surface *BZDY*; cette verticale doit être très-peu éloignée de la verticale qui passe par le centre de gravité

du corps, puiſqu'on ſuppoſe que le corps ne fait que de très-petites oſcillations. Ainſi tirant les lignes $C I$, $C \delta$ perpendiculaires à $A B$, $A Y$, ces lignes ſeront fort petites.

Pour embraſſer la queſtion de la maniere la plus générale, & ſous un point de vûe qui pourroit même être utile dans d'autres occaſions, je pourrois ſuppoſer que le centre décrivît une courbe quelconque à double courbure. Mais je prouverai rigoureuſement dans la ſuite, ce qui eſt d'ailleurs aſſez clair par ſoi-même, que le centre de gravité ne doit réellement avoir qu'un mouvement vertical; je ſuppoſerai d'abord qu'il ait en effet ce ſeul mouvement, & je ferai voir que ma ſuppoſition eſt légitime. De plus les parties du corps tournent en même-tems autour de ce centre; & pour repréſenter leur mouvement de la maniere la plus générale, voici de quelle maniere je m'y prends.

J'imagine d'abord un plan vertical $B Q D H$ (*fig.* 22.) qui paſſe par le centre de gravité C du corps, par la verticale $C A$, & par la ligne $B A D$; je tire dans ce plan l'horizontale $C\pi$, & dans le même plan *à volonté* la ligne Cp qui faſſe un très-petit angle avec $C\pi$; & je ſuppoſe que ce plan tourne autour de la verticale $Q A$, tandis que la ligne Cp tourne elle-même autour du point C, en reſtant dans ce même plan. Je ſuppoſe enfin, que durant ce double mouvement, un plan perpendiculaire à Cp ſe meuve outre cela autour de Cp d'un mouvement angulaire; par le moyen de ce triple mouvement

on repréſentera, comme il eſt évident, & de la maniere la plus générale, tous les mouvemens que peuvent avoir autour du centre de gravité C les parties du corps flottant. Voyez *le Mémoire précédent*, §. I & II.

Je ſuppoſe enfin, comme dans les *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, afin de pouvoir adapter à la queſtion préſente les formules de cet Ouvrage, que le mouvement angulaire du plan $BQDH$ autour de CA (*fig.* 22.) ſe faſſe de D vers Y (*fig.* 20.); que le mouvement angulaire de la ligne Cp (*fig.* 22.) ſe faſſe de p vers π; qu'enfin le mouvement angulaire du plan perpendiculaire à Cp, autour de cette ligne Cp, ſe faſſe de maniere que la partie BZD (*fig.* 20.) s'enfonce, & que la partie BYD ſe releve.

Cela poſé, ſoient γ, γ', les centres de gravité des ſolides infiniment petits que forment les parties ZDY, ZBY, en tournant infiniment peu autour de ZY; R, S, les centres de gravité des ſolides infiniment petits que forment les parties BYD, BZD, en tournant autour de BD; enfin a le centre de gravité de l'aire totale $BZDY$; ſoient à préſent nommées les données & les inconnues de la maniere ſuivante;

La peſanteur . . . . g
La partie enfoncée au premier inſtant . . . . N
Le corps entier . . . . M'
La denſité du corps . . . . Δ
Celle du fluide . . . . δ
BA . . . . b

AD..

AD . . . . a

La diſtance CA (*fig.* 22.) du centre de gravité à BD . . . . e

La diſtance de la ſurface $BZDY$ (*fig.* 21.) au centre de gravité de la partie enfoncée N . . . . f

AI . . . . β

$I\beta$ . . . . ζ

L'eſpace que le centre C (*fig.* 22.) parcourt verticalement pendant le tems t . . . . y

L'eſpace que parcourt circulairement dans le même tems & dans le plan $BQDH$ un point quelconque à la diſtance 1 du centre C x

L'eſpace que parcourt circulairement autour de l'axe Cp un point quelconque à la diſtance 1 de l'axe Cp de rotation . . . . P

L'angle de rotation du plan $BQDH$ autour de CA . . . ϵ

Les ſolides très-petits que forment ZBY (*fig.* 21.) ZDY par leur rotation autour de ZY . . . $x.q.b^3$ & $x.p.a^3$

Les ſolides très-petits que forment BZD, BYD en tournant autour de BD . . . . . $P.p'.AZ^3$ & $P.q'AY^3$

La ſomme des produits des particules du corps par le quarré de leurs diſtances à Cp (*fig.* 22.), ou, ce qui revient au même, à l'horizontale $C\pi$ . . . . K

La ſomme des produits des mêmes particules par le quarré de leurs diſtances à un plan paſſant par C & perpendiculaire à Cp ou $C\pi$ . . . . M''

La ſomme des produits des mêmes particules par le produit de leurs diſtances à deux plans, l'un horizontal paſſant par $C\pi$, l'autre vertical & perpendiculaire

à $C\pi$ . . . . Ω

La somme des produits des mêmes particules par le produit de leurs distances à un plan horizontal passant par $C\pi$, & à un plan vertical passant par la même ligne $C\pi$. Σ

La somme des produits des mêmes particules par le produit de leurs distances à un plan vertical passant par $C\pi$, & à un plan vertical perpendiculaire à $C\pi$. . Θ

Enfin la somme des produits des particules par le quarré de leurs distances à un plan horizontal passant par $C\pi$ . . . . Ξ

Toutes ces dénominations posées, il est aisé de voir dans la *fig.* 21. par la méthode employée & détaillée dans l'*Essai sur la résistance des fluides*;

1°. Que le centre de gravité de la partie enfoncée après le tems t, aura parcouru dans le sens de AI l'espace $x(e+f) - uA . \frac{x . q . b^3}{N} - \frac{VA . x . p . a^3}{N}$ $+ \frac{P . z' A . p' . AZ^3}{N} - \frac{P . q' . y A . AY^3}{N} - \frac{Y . BZDY . Ab}{N}$;

à quoi il faut ajouter $AI = ϐ$, pour marquer ce que la distance AI est devenue à la fin du tems t.

2°. On trouvera de même que le chemin du centre de gravité de la partie enfoncée, suivant $Iϐ$, est $P(e+f)$ $- \frac{P . q' . AY^3 . yR}{N} - \frac{P . p' . AZ^3 . SZ'}{N} + \frac{x . u\gamma' . q' . b^3}{N}$ $- \frac{x . V\gamma . p . a^3}{N} + \frac{Y . BZDY . ba}{N}$. De plus il faudra ajouter à cette quantité la ligne $Iϐ = \zeta$, pour avoir l'expression de cette distance à la fin du tems t.

Enfin la partie enfoncée à la fin du tems t, sera $N - y . BZDY + x . p . a^3 - x . q . b^3 - AY^3 . P . q' + AZ^3 . P . p'$.

Cela fait, & nous servant ici des formules du Mémoire précédent sur les mouvemens d'un corps de figure quelconque, on considérera que dans l'hypothèse présente ;

1°. $\Psi =$ au produit de la densité δ du fluide par la partie enfoncée, moins le poids du corps.

2°. $\gamma = o$, & $\varphi = o$; donc par les formules (G) & (H) du Mém. précéd. le centre n'a qu'un mouvement vertical.

3°. $- \Psi \nu' =$ au produit de $g \delta N$ par ce que devient ζ à la fin du tems t.

4°. $- \Psi \mu' =$ au produit de $g \delta N$ par ce que devient ζ à la fin du tems t.

De plus, comme on a nommé ici y ce qui a été nommé q dans le Mémoire cité, x ce qui a été nommé η, ε ce qui a été nommé e, & g ce qui a été nommé p ; on aura les équations $M' . \Delta ddy = \frac{2adt^2}{\theta'^2} \times \frac{\Psi}{g}$;

$$\Delta ddx (M'' + \Xi) + \Delta ddP . \Theta - \Delta dd\varepsilon . \Sigma + \frac{2 \Psi a \nu' dt^2}{g \theta'^2} = o.$$

$$\Delta ddx \times - \Sigma + ddP . \Delta \Omega - \Delta dd\varepsilon [K - \Xi - M''] = o.$$

$$\Delta ddx . \Theta + \Delta ddP (K) - \Delta dd\varepsilon . \Omega + \frac{2 a \Psi \mu' dt^2}{\theta'^2 g} = o.$$

Mettant dans ces équations à la place de $- \Psi \nu'$ & $- \Psi \mu'$ leurs valeurs déja trouvées en x, y, P & en

constantes, & mettant pour $dd\varepsilon$ dans la ſeconde & la quatriéme équation ſa valeur en ddx & ddP tirée de la troiſiéme, enfin faiſant enſorte que la ſeconde équation ne contienne que ddx, & la quatriéme que ddP, ce qui ſe fera en chaſſant ddP de la ſeconde équation, & ddx de la quatriéme; on aura des équations de la forme ſuivante;

$$ddy + (A + Bx + Cy + D.P)\,dt^2 = 0$$
$$ddx + (A' + B'x + C'y + D'.P)\,dt^2 = 0$$
$$ddP + (A'' + B''x + C''y + D''.P)\,dt^2 = 0;$$
$$\&\ \varepsilon = \frac{\Omega . P - x . \Sigma}{K - \Xi - M''}.$$

Or j'ai donné dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Pruſſe, année 1748, des méthodes pour intégrer les trois premieres équations. Donc le Problême eſt réſolu.

Si le corps qui oſcille eſt à-peu-près ſphérique, ayant d'ailleurs une figure irréguliere quelconque, on aura $\Omega = 0, \Sigma = 0, \Theta = 0, \Xi = \frac{K}{2}$; les équations précédentes ſe ſimplifieront beaucoup, & l'on aura $\varepsilon = 0$; & $M'\Delta\, ddy = \frac{2\,a\,dt^2 . \Psi}{\theta'^2\, g}$; $\Delta\, ddx\,(2M'' + K) + \frac{4\Psi a \nu' dt^2}{g\,\theta'^2} = 0$; $\Delta\, ddP.K + \frac{2a\Psi\mu' dt^2}{g\,\theta'^2} = 0$.

De plus il eſt aiſé de voir que dans ce cas on aura $ab = 0$, $Ab = 0$, $AZ = AY$; $SZ' = yR$; $a = b$; $u\gamma' = V\gamma = 0$; $uA = VA$; $AZ' = Ay$; $q = p$; $q' = p'$; & $q = q'$; donc on aura $\Psi = (\delta . N - \delta y . BZDY$

$- \Delta . M') g; - \Psi \nu' = g \delta N [\mathfrak{C} + x (e + f) - \frac{2 VA . p . a^3 x}{N}]; - \Psi \mu' = g \delta N [\zeta + P (e+f) - \frac{2 P . q' . y R . AY^3}{N}]$; & par conséquent $M' \Delta ddy = \frac{2 a d t^2}{\theta'^2} \times [\delta N - \Delta M' - \delta y . BZDY]; \Delta ddx (2 M'' + K) = \frac{4 a d t^2}{g \theta'^2} \times g \delta N [\mathfrak{C} + x (e+f) - \frac{2 VA . p . a^3 x}{N}]; \Delta . K ddP = \frac{2 a d t^2}{g \theta'^2} \times g \delta N [\zeta + P (e+f) - \frac{2 P . q' . y R . AY^3}{N}]$.

Dans ce cas on voit encore que $VA = yR$, & $AY = a$, ou AD, puisqu'il s'agit d'un solide à-peu-près sphérique, & que $BYDZ$ est par conséquent à-très-peu-près un cercle, dont A est le centre; de plus on a dans ce même cas $M = \frac{K}{2}$; & par conséquent $2 M + K = 2 K$; ainsi on trouvera par l'intégration des équatio ns précédentes, que P & x seront à-peu-près entr'elles, dans la raison constante de ζ à $\mathfrak{C}$; d'où il est aisé de conclure que les oscillations du corps, pour tourner autour de son centre, se feront dans un plan vertical passant par la ligne $A\mathfrak{C}$ qui joindroit les points A, $\mathfrak{C}$ dans la figure 21.

Si sans regarder le corps comme à-peu-près sphérique, on suppose sa figure telle que l'on ait à la fois $\Omega = o$, $\Sigma = o$, $\Theta = o$, $Z = \frac{K}{2}$, comme nous l'avons sup-

posé pour simplifier le calcul dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, on aura les mêmes équations qu'on a trouvées ci-dessus pour le cas de la figure à-peu-près sphérique; $M' \Delta ddy = \frac{2adt^2 . \Psi}{\theta'^2 g}$; $\Delta ddx \left(M'' + \frac{K}{2}\right) + \frac{2 \Psi a v' dt^2}{g \theta'^2} = o$; $\Delta . K ddP + \frac{2 a \Psi \mu' dt^2}{\theta'^2 g} = o$.

Supposons présentement $\frac{2aN\delta}{\theta'^2 M' \Delta} - \frac{2a}{\theta'^2} = k$; $\frac{2a\delta . BZDY}{\theta'^2 \Delta . M'} = \theta$; $\frac{(p . a^3 \delta - q . b^3 \delta) 2a}{\Delta . M' . \theta'^2} = \pi$; $\frac{P . p' . \delta . AZ^3 - P . q' . \delta . AY^3}{\delta . M' . \theta'^2} \times 2a = \chi$; $\frac{2aN\delta\zeta}{\Delta . K . \theta'^2} = A$; $\frac{2aN\delta(e+f)}{\Delta . K . \theta'^2} - \frac{q' . y R . AY^3}{N} \times \frac{2a\delta . N}{\Delta . K . \theta'^2} - \frac{2a\delta N}{\Delta . K ; \theta'^2} \times \frac{p' . S Z' . AZ^3}{N} = B$; $\frac{2a\delta}{\Delta . K . \theta'^2} (u \gamma' q . b^3 - V \gamma . p . a^3) = C$; $\frac{2a\delta}{\Delta . K . \theta'^2} \times BZDY . ab = D$; $\frac{2aN\delta\epsilon}{\left(\frac{K}{2} + M''\right)\theta'^2 \Delta} = M$; $\frac{2aN\delta}{\frac{K}{2} + M''} \times \frac{e+f}{\Delta . \theta'^2} - \frac{2a\delta . uA . q . b^3}{\left(\frac{K}{2} + M''\right)\theta'^2 \Delta} - \frac{2a\delta . VA . p a^3}{\left(\frac{K}{2} + M''\right) . \Delta . \theta'^2} = \sigma$; $\frac{2a\delta . BZDY . Ab}{\left(\frac{K}{2} + M''\right) . \Delta . \theta'^2} = \rho$; enfin $\frac{2a\delta . Z' A . p' . AZ^3}{\left(\frac{K}{2} + M''\right) . \Delta \theta'^2} - \frac{2a\delta . y A . q' . AY^3}{\left(\frac{K}{2} + M''\right) \Delta . \theta'^2} = \Psi$; & on aura les trois équations suivantes;

$(B') \ldots\ldots ddx = (M - \rho y + \sigma x - \Psi P)\, dt^2$

$(C') \ldots\ldots ddy = (k - \theta y + \pi x + \chi P)\, dt^2$

$(D') \ldots\ldots ddP = (A + B.P + Cx + Dy)\, dt^2.$

J'ai donné dans plusieurs Ouvrages (entr'autres dans les Mémoires de l'Académie de Berlin de 1748 & 1750), la méthode pour intégrer ces sortes d'équations; & je laisse au Lecteur le détail de l'intégration de celles-ci.

REMARQUE I.

J'observerai encore, que comme la ligne *BAD* a une position arbitraire par l'hypothèse, je puis la supposer placée de maniere qu'elle passe par le centre de gravité *a* de l'aire *BZDY*, & qu'ainsi $ab = o$, & par conséquent $D = o$. On peut donc simplifier toujours l'équation (D') en effaçant le terme $+ Dy$, quelle que soit la figure du corps.

REMARQUE II.

De plus, si la figure *BZDY* est composée de deux parties égales & semblables, & que la ligne *Aa* tirée par le centre de gravité *a*, partage, ou exactement, ou à-peu-près, cette figure en ces deux parties, on aura $u\gamma' = o$; $V\gamma = o$; & par conséquent $C = o$; par la même raison $\chi = o$, & $\Psi = o$; ainsi on aura

$(E') \ldots\ldots ddP = (A + B.P)\, dt^2$, équation facile à intégrer.

$(F') \ldots\ldots ddy = (k - \theta y + \pi x)\, dt^2$;

$(G') \ldots\ldots ddx = (M - \rho y + \sigma x)\, dt^2$; deux

équations très-faciles à intégrer par les méthodes rappellées ci-dessus.

Si le solide est divisé, ou exactement, ou à-peu-près en deux parties égales & semblables par un plan vertical passant par l'axe $C\pi$, en ce cas l'on a $\Sigma = o$, & $\Theta = o$; on aura donc les trois équations $M' \Delta ddy = \frac{2\,a\,d\,t^2}{\theta'^2} \times \frac{\Psi}{g}$; $\Delta\, d\, d\, x (M'' + \Xi) + \frac{2\,\Psi\,a\,\nu'\,d\,t^2}{\theta'^2\,g} = o$; $ddP\,(\Delta.K - \frac{\Omega\,\Omega\,\Delta}{K - \Xi - M''}) + \frac{2\,a\,\Psi\,\mu'.\,d\,t^2}{\theta'^2\,g} = o$. Et $\varepsilon = \frac{P\,.\,\Omega}{K - \Xi - M''}$. Donc conservant les noms donnés ci-dessus, excepté qu'au lieu de $\frac{K}{2} + M''$ on mettra $\Xi + M''$, & au lieu de $\Delta.K$, la quantité $\Delta.K - \frac{\Omega\,\Omega\,\Delta}{K - \Xi - M''}$, on aura les mêmes équations E', F', G' qu'on a trouvées ci-dessus.

Ce cas est celui des oscillations des Navires, dont on peut par conséquent déterminer le tangage & le roulis par l'intégration des trois équations dont on vient de parler. C'est sur quoi il ne paroît pas nécessaire d'entrer dans un plus grand détail; mais on doit voir maintenant qu'il ne reste plus de difficulté dans la solution de tous les Problêmes qu'on peut proposer sur cette matiere.

Fin du troisiéme Mémoire.

QUATRIÉME

QUATRIÉME MÉMOIRE.

Remarques sur les Loix du mouvement des fluides.

I.

SOIT *ABFE* (*fig.* 23.) un vase que nous considérerons d'abord comme plan, & dans lequel soit renfermé un fluide homogene; soit $CP = x$, $PM = y$, $PO = z$; θ une fonction indéterminée du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; Q la vitesse du fluide parallèlement à CP; P sa vitesse parallèlement à PM; j'ai démontré, Art. 148 de mon *Essai sur la résistance des fluides*, que $Q = \theta q$, $P = \theta p$, q & p étant des fonctions de x & de z. Ces équations sont fondées sur cette considération, que le rapport de Q à P ne doit point renfermer le tems t, lorsque $z = y$; car puisque le fluide contigu aux parois BMF coule le long de ces parois, on doit avoir alors $\frac{Q}{P} = \frac{dx}{dy} =$ à une fonction de x & de y. Donc lorsque $z = y$, on a $\frac{Q}{P} =$ à une

fonction de x & de y, quel que soit t; ce qui ne sauroit être, à moins que l'on n'ait $Q = q\,\theta$, & $P = p\,\theta$. A la vérité cette équation n'auroit pas lieu, s'il n'y avoit point de vase, & si le fluide étoit indéfini *en tout sens*. Mais cette supposition n'a point lieu dans la nature.

J'ai démontré outre cela dans l'Ouvrage cité, que si on suppose $d(\theta q) = q T dt + \theta A dx + \theta B dz$, & $d(\theta p) = p T dt + \theta A' dx + \theta B' dz$, on aura ; 1°. $B' = -A$, ou $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$; 2°. (en nommant g la gravité) $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta q A' - \theta p B' - pT)}{dx}$; or comme cette équation doit être identique, les parties $\frac{d(-qT)}{dz}$ du premier membre, & $\frac{d(-pT)}{dx}$ du second doivent être égales séparément du reste ; on aura donc $\frac{dq}{dz} = \frac{dp}{dx}$; & par conséquent $A' = B$; & cette équation, avec celle qu'on a trouvée ci-dessus ; $B' = -A$, satisfait au reste de l'équation $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q)}{dz} = \frac{d(-\theta q A' - \theta p B')}{dx}$, comme il est aisé de s'en assurer par le calcul. Donc puisque $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$, & $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$, il s'ensuit que $p\,dz + q\,dx$ & $p\,dx - q\,dz$ sont des différentielles complettes. Ce qui s'accorde parfaitement & sans restriction avec ce qui a été trouvé dans l'Ouvrage cité.

II.

Donc, par la méthode expliquée Art. 58 du même Ouvrage, si on fait $x + z\sqrt{-1} = u$, $x - z\sqrt{-1} = v$, on aura $p = \frac{\phi u + \Delta v}{2}$, $q = \frac{\phi u - \Delta v}{2\sqrt{-1}}$, ϕu & Δu exprimant des fonctions quelconques de u & de v.

Donc $p\,dx - q\,dz$ sera $= \frac{du\,\phi u + dv\,\Delta v}{2}$ & $q\,dx + p\,dz$ sera $= \frac{du\,\phi u - dv\,\Delta v}{2\sqrt{-1}}$. Donc l'intégrale de la premiere quantité sera $\Gamma u + \Xi v$, Γu & Ξv exprimant aussi des fonctions quelconques de u & de v. Et l'intégrale de la seconde sera $\frac{\Gamma u - \Xi v}{\sqrt{-1}}$.

III.

Lorsque $PO = PM$, c'est-à-dire, lorsque $z = y$, on a $dx : dz :: q : p$, puisque le fluide contigu aux parois du vase, se meut suivant ces parois. Donc alors $p\,dx - q\,dy = 0$. Donc l'équation de la courbe BMF est $\Gamma u + \Xi v = M$, M étant une constante, & u étant égal à $x + y\sqrt{-1}$, comme v à $x - y\sqrt{-1}$.

IV.

Lorsque la ligne CP divise le vase en deux parties égales & semblables, les points du fluide placés dans cette ligne, n'ont de vitesse que dans le sens vertical

CP, & n'en ont aucune dans le ſens horizontal. Donc $p = o$; donc lorſque $z = o$, on a $\varphi(x + z\sqrt{-1}) + \Delta(x - z\sqrt{-1}) = o$; donc $\Delta x = -\varphi x$; donc $\Delta(x - z\sqrt{-1}) = -\varphi(x - z\sqrt{-1})$. Donc l'équation de la courbe *BMF* ſera pour lors $\Gamma u - \Gamma v = M$.

V.

Ainſi le Problême ne pourra être réſolu, toutes les fois qu'on ne pourra donner à l'équation de la courbe *BMF* la forme $\Gamma u - \Gamma v = M$; & par conſéquent on voit déja qu'il y a un très-grand nombre de cas où le Problême ne peut être réſolu analytiquement & rigoureuſement, quoiqu'un grand Géometre ait prétendu (*) qu'il pouvoit toujours l'être, & qu'on pouvoit toujours trouver deux quantités Γu & Γv, telles, que $\Gamma u - \Gamma u$ fût $= M$.

Pour faire ſentir par un exemple très-ſimple la vérité de ce que nous avançons, ſoit, par exemple, $x + y = a$, l'équation de la courbe *BMF*, qui ſera pour lors une ligne droite ou portion de ligne droite, inclinée vers l'axe *CD* à un angle de 45 degrés; on aura en ſubſtituant pour x & y leurs valeurs $\frac{u+v}{2}$ & $\frac{u-v}{2\sqrt{-1}}$, l'équation $u\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) + v\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) = a$; qui ne peut être réduite à cette forme $\Gamma u - \Gamma v = M$,

(*) Voyez les Mémoires de Berlin 1755, p. 359 & ſuiv.

puisqu'il faudroit qu'on eût $u\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\right)+v\left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)=a$.

V I.

Pour trouver la fonction θ qui doit multiplier les quantités q & p, voici comment on s'y prendra. Soit l'origine des x & des z en C (*fig.* 24.), & soit $CB = A$; il faudra qu'en faisant $x=o$, on ait $\Gamma(x+y\sqrt{-1})-\Gamma(x-y\sqrt{-1})=\Gamma A\sqrt{-1}-\Gamma -A\sqrt{-1}$; d'où l'on voit que l'équation de la courbe BMF est en général $\Gamma(x+y\sqrt{-1})-\Gamma(x-y\sqrt{-1})=\Gamma A\sqrt{-1}-\Gamma -A\sqrt{-1}$. Or nommant Cb, $\mathfrak{b}$, soit imaginée la courbe bmf analogue à BMF, & dont l'équation soit en général $\Gamma(x+z\sqrt{-1})-\Gamma(x-z\sqrt{-1})=\Gamma\mathfrak{b}\sqrt{-1}-\Gamma -\mathfrak{b}\sqrt{-1}$; il est clair que les particules du fluide suivront toujours chacune de ces courbes bmf; car il est évident que dans ces courbes bmf on a $\frac{dx}{dz}=\frac{q}{p}=\frac{\theta q}{\theta p}$; d'où l'on voit encore que le rapport des vitesses verticale & horizontale, en un point quelconque m, dépendra uniquement de la position de ce point, & non du tems; & que ce rapport sera toujours le même pour chaque point m.

Cela posé, si on fait $C\mathfrak{b}$ infiniment petite, & qu'on imagine la courbe $\mathfrak{b}\mu\varphi$ infiniment proche de l'axe CD; nommant $C\mathfrak{b}$, α, on aura $\Gamma\alpha\sqrt{-1}-\Gamma-\alpha\sqrt{-1}$

$= \Gamma(x + z\sqrt{-1}) - \Gamma(x - z\sqrt{-1})$; & puisque z est ici infiniment petite, & que $d\,\Gamma x = dx\,\varphi x$, comme on l'a supposé plus haut, on aura $\Gamma(x + z\sqrt{-1}) = \Gamma x + z\sqrt{-1}.\,\varphi x$; & de même $\Gamma(x - z\sqrt{-1}) = \Gamma x - z\sqrt{-1}.\,\varphi x$. Donc l'équation de la courbe $\mathfrak{G}\mu\varphi$ sera $\Gamma\,\alpha\sqrt{-1} - \Gamma - \alpha\sqrt{-1} = 2z\sqrt{-1}\,\varphi x$. De plus on a par la même raison q ou $\frac{\varphi(x + z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} + \frac{\varphi(x - z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{\varphi x}{\sqrt{-1}}$; d'où l'on voit que chaque ordonnée $\omega\mu$ ou z de la courbe $\mathfrak{G}\mu\varphi$ est en raison inverse de la vitesse θq du point ω suivant ωD, & qu'ainsi le fluide se meut dans l'espace $DC\mathfrak{G}\varphi$, comme il feroit dans un vase infiniment étroit.

Or quand une masse donnée de fluide $C\mathfrak{G}\varphi D$ se meut dans un tel vase, & qu'après le tems t elle parvient de la situation $C\mathfrak{G}\varphi D$ dans la situation $C'\mathfrak{G}'\varphi' D'$, on peut avoir facilement par les méthodes que j'ai expliquées dans mon *Traité des Fluides*, Art. 100 & 101, une équation entre t, & CC' que je nomme ξ; de plus on a par l'équation de la courbe BMF, la valeur de Γx; par conséquent celle de φx; par conséquent celle de q en $\varphi\xi$; par conséquent celle de q en t, puisqu'on a la valeur de ξ en t; enfin on a $dt = \frac{d\xi}{\theta q}$, ou $\theta = \frac{d\xi}{q\,dt}$; donc substituant pour ξ sa valeur en t, dans le second membre de cette équation, on aura la quantité cherchée θ, au moins par les quadratures.

VII.

Puiſque $dt = \frac{dx}{q\theta}$, on aura $\theta\, dt = \frac{dx}{q}$; c'eſt pourquoi cherchant ſur les courbes $\mathfrak{C}\mu\varphi$, bmf, BMF &c. les points $\mathfrak{C}'$, K, R &c. où la quantité $\int \frac{dx}{q}$ ſoit la même, on aura la courbe $C'KR$ que la ſurface du fluide forme à chaque inſtant ; & l'équation de cette courbe $C'KR$ ſera $\int \frac{dx}{q} = \int \theta\, dt$.

Pour avoir cette équation exprimée en coordonnées rectangles CN, x, & NK, s, on mettra dans q, au lieu de z ſa valeur exprimée par x & par la conſtante Cb, qu'on a appellée $\mathfrak{C}$; cette valeur ſe tirera de l'équation de la courbe bmf, qui eſt $\Gamma(x + z\sqrt{-1}) - \Gamma(x - z\sqrt{-1}) = \Gamma\, \mathfrak{C}\sqrt{-1} - \Gamma - \mathfrak{C}\sqrt{-1}$: on intégrera enſuite la quantité $\int \frac{dx}{q}$, en regardant $\mathfrak{C}$ comme conſtant, & x comme variable ; enfin dans l'intégrale on remettra au lieu de $\mathfrak{C}$ ſa valeur en x & en z ; & à la place de z on mettra s qui lui eſt égale, & qui n'en differe qu'en ce que s repréſente l'ordonnée NK dans la courbe $C'KR$, & z la même ordonnée NK dans la courbe bKF ; ainſi on aura l'équation de la courbe $C'KR$, dont le premier membre ſera une fonction connue de x & de s, & le ſecond ſera $= \int \theta\, dt$, & par conſéquent $=$ à une fonction de t ; enſorte que t pourra être ici regardé comme le parametre de la courbe $C'KR$,

laquelle change de place & de forme à chaque instant.

VIII.

Mais cette courbe $C'KR$ doit avoir encore une autre propriété; c'est que la force perdue par chaque particule K doit être perpendiculaire à cette courbe en K; d'où l'on tire, comme il résulte de l'Art. 152 de l'Ouvrage cité, l'équation $-\frac{ds}{dx} = \frac{g - qT - Aq\theta - Bp\theta}{-pT - A'q\theta - B'p\theta}$, T étant supposé $= \frac{d\theta}{dt}$; & par conséquent (si on met pour B sa valeur A' ou $\frac{dp}{dx}$, & pour A' sa valeur B ou $\frac{dq}{dz}$, enfin pour A & pour B' leurs valeurs $\frac{dq}{dx}$ & $\frac{dp}{dz}$) on aura $g\,dx = T(p\,ds + q\,dx) + \theta$ $\left(\frac{q\,dq}{dx}dx + \frac{p\,dp}{dx}dx + \frac{q\,dq}{dz}ds + \frac{p\,dp}{dz}ds\right)$. Donc comme z est ici égal à s, on aura $gx + \vartheta = T\int p\,ds + q\,dx + \frac{\theta}{2}(qq + pp)$, ϑ étant une fonction indéterminée de t; on remarquera de plus, que la quantité $\int p\,ds + q\,dx$ est intégrable (§. I.), & peut être représentée par une fonction de x & de s, puisque $p\,dz + q\,dx$ est intégrable, comme on l'a vû ci-dessus.

Pour trouver la fonction ϑ, on observera qu'au point C' on a $z = o$, & par conséquent $s = o$, $x = \xi$, & $\xi =$ à une fonction connue de t; c'est pourquoi mettant dans l'équation

l'équation ci-dessus (après avoir intégré $p\,ds + q\,dx$), au lieu de x la valeur de ξ en t, & effaçant les termes où s se trouve, on aura la valeur de ϑ exprimée en t.

IX.

Il faut que cette nouvelle équation de la surface courbe $C'KR$ s'accorde avec celle qui a été trouvée précédemment §. VII. Si elles sont différentes, & si l'une ne peut être réduite à l'autre, c'est une marque que la solution analytique du Problême est impossible.

Ce n'est pas tout; ce que nous avons dit de la surface supérieure, doit avoir lieu de même pour la surface inférieure; nouvelles conditions qui limitent encore davantage la solution du Problême.

Enfin, il faut encore que les forces perdues soient dirigées de haut en bas dans la surface supérieure, & de bas en haut dans l'inférieure, pour que l'équilibre soit possible.

On voit par-là qu'il y a bien peu de cas où l'on puisse trouver analytiquement & rigoureusement le mouvement d'un fluide dans un vase, même en faisant abstraction du frottement & de la ténacité des parties du fluide. On peut donc s'en tenir, ce me semble, dans le plus grand nombre des cas, à la méthode que j'ai donnée dans mon *Traité des Fluides*, laquelle fournit des résultats assez conformes à l'expérience, quoiqu'elle ne soit pas dans la rigueur Mathématique.

X.

Dans le §. I. ci-dessus, nous avons fait voir que l'équation $\frac{d(qT)}{dz} = \frac{d(pT)}{dx}$, devoit avoir lieu, & qu'ainsi $A' = B$; il n'y a qu'un seul cas où cette équation ne soit pas indispensable, c'est celui où T seroit $= \theta$, c'est-à-dire ou θ seroit $= ac^t$, a étant une quantité quelconque; car alors faisant disparoître les quantités θ & T de l'équation $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta q A' - \theta p B' - pT)}{dx}$, & simplifiant d'ailleurs cette équation, on auroit $\frac{d(Bp + Aq + q)}{dz} = \frac{d(A'q + B'p + p)}{dx}$: d'où l'on tire $\frac{pdq}{dz}dx + \frac{qdq}{dx}dx + qdx + \frac{qdp}{dx}dz + \frac{pdp}{dz}dz + pdz = $ à une differentielle complette; & retranchant de cette quantité $\frac{qdq}{dx}dx + \frac{qdq}{dz}dz + \frac{pdp}{dx}dx + \frac{pdp}{dz}dz$ qui est aussi une differentielle complette, on aura $(pdx - qdz)\left(\frac{dq}{dz} - \frac{dp}{dx}\right) + qdx + pdz = $ à une differentielle complette. De plus, comme $B' = -A$, on a aussi $pdx - qdz = $ à une differentielle complette.

X I.

De-là il s'ensuit, que quand le tems t entre dans l'ex-

preſſion de la viteſſe du fluide, le ſeul cas où il ne ſoit pas néceſſaire que $p\,dz + q\,dx$ ſoit une différentielle en même-tems que $p\,dx - q\,dz$ (qui l'eſt toujours néceſſairement) eſt celui où θ ſeroit $= a\,c^t$; or ce cas ne peut jamais avoir lieu que dans l'hypothèſe où le fluide auroit reçu une impulſion primitive; car dans tout autre cas, où le fluide ſe mouvroit par ſa ſeule peſanteur, ou par d'autres forces accélératrices quelconques, ſa viteſſe ſeroit $= o$ lorſque t ſeroit $= o$; ainſi θ ne pourroit être $= a\,c^t$.

Il ne ſuffit pas que l'impulſion donnée ſoit telle que $\theta = a\,c^t$; il faut encore que les quantités p & q ſoient telles, que $p\,dx - q\,dz$ & $(p\,dx - q\,dz)\left(\frac{dq}{dz} - \frac{dp}{dx}\right) + p\,dz + q\,dx$, ſoient l'une & l'autre des différentielles complettes.

Il faut de plus que les autres conditions énoncées dans les §. VII, VIII & IX. ſoient obſervées; ce qui limite encore le nombre des cas où l'équation $A' = B$, n'a pas néceſſairement lieu, & ce qui rendra peut-être ces cas abſolument impoſſibles, ſi toutes les conditions énoncées ci-deſſus ne peuvent avoir lieu à la fois; queſtion de pur calcul que je laiſſe à examiner à d'autres.

XII.

Il eſt au moins certain par tout ce qu'on vient de dire, que toutes les fois qu'un fluide ſera mû par la ſeule

impulsion de sa pesanteur, ce qui est le cas le plus ordinaire, il faudra nécessairement que $pdx - qdz$, & $pdz + qdx$ soient chacune des différentielles complettes, pour que le mouvement du fluide puisse être soumis au calcul analytique.

Lorsque le fluide a une masse finie & un mouvement progressif, il est évident que le tems t doit entrer dans l'expression de sa vitesse, puisque la vitesse de chaque particule dépendra non-seulement de sa situation, mais encore du tems qu'il y a que le fluide est en mouvement. Si le fluide étoit indéfini, & qu'on supposât son mouvement arrivé à un état constant, alors t n'entreroit plus dans l'expression de la vitesse; mais on sent bien que l'hypothèse d'un fluide indéfini, qui se meut dans un vase de figure donnée, n'a point lieu dans la nature, & qu'ainsi cette hypothèse est plus Mathématique que Physique.

Il n'y a donc que le cas où le fluide se meut suivant une ligne qui rentre en elle-même, sans être animé par aucune force accélératrice, dans lequel on puisse supposer que t n'affecte point l'expression de la vitesse. Dans ce cas $\theta = 1$, $T = o$; & l'on aura $\frac{d(Bp + Aq)}{dz} = \frac{d(A'q + B'p)}{dx}$; d'où l'on tire par la même méthode que ci-dessus $(pdx - qdz) + \left(\frac{dq}{dz} - \frac{dp}{dx}\right) =$ à une différentielle complette. Or on a déja $pdx - qdz =$ à une différentielle complette Kdb, b étant supposé le

parametre de chaque courbe, & K une fonction de b; donc $Kdb\left(\frac{dq}{dz} - \frac{dp}{dx}\right)$ doit être une differentielle complette; donc $\frac{dq}{dz} - \frac{dp}{dx}$ doit être une fonction de b. D'où l'on voit que le parametre b étant constant pour chaque courbe que les particules du fluide décrivent, on doit avoir pour chacune de ces courbes $d\left(\frac{dq}{dz}\right) = d\left(\frac{dp}{dx}\right)$. Or si on suppose que $\omega = \alpha$ soit l'équation générale de ces courbes; on aura $p\,dx - q\,dz = o$ pour la différentielle de cette équation; & par conséquent $p = \frac{d\omega}{dx}$, & $q = \frac{-d\omega}{dz}$; donc $\frac{dd\omega}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; & $\frac{-dd\omega}{dz^2} = \frac{dq}{dz}$; donc $d\left(\frac{dd\omega}{dx^2}\right) = d\left(\frac{-dd\omega}{dz^2}\right)$; & cette équation doit appartenir à la même courbe que l'équation $\omega = \alpha$; sinon la solution du Problême est impossible.

Pour trouver les cas où les équations $\omega = \alpha$, & $d\left(\frac{dd\omega}{dx^2}\right) = d\left(\frac{-dd\omega}{dz^2}\right)$ appartiendront à la même courbe, on considérera que la premiere donne $\frac{d\omega}{dx}dx + \frac{d\omega}{dz}dz = o$, & que la seconde donne (*) $\frac{d^3\omega}{dx^3}dx + \frac{d^3\omega}{dx^2dz}dz + \frac{d^3\omega}{dz^3}dz + \frac{d^3\omega}{dz^2dx}dx$

(*) Dans cette équation & dans la suivante $\frac{d^3\omega}{dx^3}$ est le coëfficient

$=o$; donc mettant pour dx & dz dans les numérateurs leurs proportionnelles $\frac{-d\omega}{dz}$, $\frac{d\omega}{dx}$, on aura l'équation en termes finis $\frac{-d^3\omega}{dx^3} \times \frac{d\omega}{dz} + \frac{d^3\omega}{dx^2dz} \times \frac{d\omega}{dx} + \frac{d^3\omega}{dz^3} \times \frac{d\omega}{dx} - \frac{d^3\omega}{dz^2dx} \times \frac{d\omega}{dz} = o$: or cette équation doit être néceſſairement identique; c'eſt-à-dire, telle que tous les termes ſe détruiſent mutuellement; car ſi cela n'étoit pas, cette équation ne pourroit s'accorder, comme il eſt néceſſaire, avec l'équation $\omega = \alpha$; 1°. parce que cette derniere équation renferme le parametre variable b qui n'eſt point dans l'autre; 2°. parce que ſi l'équation trouvée n'étoit pas identique, elle donneroit pour chaque x une valeur de z déterminée, & non pas variable, comme il eſt néceſſaire; donc la condition qu'on cherche, eſt renfermée dans l'*identité* de l'équation qu'on vient de trouver, c'eſt-à-dire dans la deſtruction mutuelle de tous les termes de cette équation.

Perſonne, que je ſache, n'avoit encore remarqué, que le cas où le fluide ſe meut ſuivant des lignes rentrantes en elles-mêmes, eſt le ſeul où l'équation $A' = B$ n'ait

---

de dx^3 dans la différentielle $d^3\omega$; $\frac{d^3\omega}{dx^2dz}$ eſt le coëfficient de dx^2dz dans la même différentielle, $\frac{d\omega}{dz}$ eſt le coëfficient de dz dans la différentielle $d\omega$, &c. & ainſi du reſte.

pas lieu. Dans mon *Essai sur la résistance des fluides*, je n'ai fait mention que des cas où $A' = B$, parce que je ne considérois alors que le mouvement progressif des fluides. Personne n'avoit remarqué non plus, que dans le cas où A' n'est point nécessairement $= B$, on a toujours nécessairement $dA' = dB$, ni assigné les cas où cette équation est possible.

XIII.

Donc en général, quand un fluide se meut dans un vase quelconque, il faut, pour pouvoir réduire le mouvement de ce fluide à un calcul analytique; 1°. que $\frac{dp}{dz} = \frac{-dq}{dx}$, & cette condition a lieu dans tous les cas possibles; 2°. que $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$, ou que $d\left(\frac{dp}{dx}\right) = d\left(\frac{dq}{dz}\right)$. Cette derniere condition $d\left(\frac{dp}{dx}\right) = d\left(\frac{dq}{dz}\right)$, n'a lieu que dans le cas où le fluide se meut suivant des courbes rentrantes en elles-mêmes, & n'est point sollicité à ce mouvement par des forces accélératrices, ensorte que la vitesse de chaque particule ne dépend absolument que de sa position.

Il est à remarquer de plus, & c'est une suite de toute la théorie précédente, que dans les cas où l'équation $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$ doit avoir lieu, cette équation doit être identique, c'est-à-dire que les deux membres doivent

être parfaitement ſemblables ; au lieu que l'équation $d\left(\frac{dp}{dx}\right) = d\left(\frac{dq}{dx}\right)$ ne doit point être néceſſairement identique, mais ſeulement doit ſe rapporter à la même courbe que l'équation $pdx - qdz = o$, qui eſt l'équation de chacune des courbes décrites par les particules du fluide. D'où il s'enſuit, comme on l'a vû, que l'équation $d\left(\frac{dp}{dx}\right) = d\left(\frac{dq}{dz}\right)$ transformée en

$$\frac{d^2 p}{dx^2} \cdot q + \frac{d^2 p}{dx\,dz} \cdot p = \frac{d^2 q}{dx^2} \cdot q + \frac{d^2 q}{dx\,dz} \cdot p,$$

ou, ce qui eſt encore la même choſe,

$$q \frac{dd(p-q)}{dx^2} + p. \frac{dd(p-q)}{dx\,dz} = o,$$

doit être identique.

XIV.

Voilà pour ce qui concerne le mouvement d'un fluide dans un vaſe ; paſſons à ce qui regarde le mouvement des fleuves, ou en général des fluides qui coulent ſur une ſurface donnée. Je ſuppoſerai pour plus de ſimplicité, que le fluide ſoit indéfini, que ſon mouvement ſoit parvenu à un état permanent, & que ce mouvement ſe faſſe dans un même plan ; cela poſé, ſi on nomme q la viteſſe verticale, & p la viteſſe horizontale, on aura, comme ci-deſſus, & par les mêmes raiſons, $\frac{dp}{dz} = \frac{-dq}{dx}$; & $pdx - qdz = o$ ſera, ou devra être l'équation de la ſurface ſur laquelle le fluide coule,

&

& celle de toutes les courbes que les particules du fluide décrivent. On trouvera de plus, comme ci-dessus, que l'équation $\frac{q\,d^2\,p}{d\,x^2} + \frac{p\,d^2\,p}{d\,x\,d\,z} = \frac{q\,d^2\,q}{d\,x^2} + \frac{p\,d^2\,q}{d\,x\,d\,z}$ doit être identique.

Telles sont les équations qui représentent le mouvement du fluide, dans l'hypothèse purement mathématique, que le fluide soit indéfini; car si on suppose, ce qui est plus conforme à la nature, que ce fluide reçoive son mouvement d'un réservoir placé à une certaine distance, & entretenu toujours à la même hauteur; alors, comme la vitesse du fluide à la surface du réservoir est nulle, on prouvera par une méthode précisément semblable à celle dont nous nous sommes servis p. 46 de notre *Essai sur la résistance des fluides*, que $\frac{d\,p}{d\,z} = \frac{d\,q}{d\,x}$; ainsi la condition que $p\,d\,x - q\,d\,z$, & $p\,d\,z + q\,dx$ soient des différentielles complettes, aura encore lieu ici.

Mais quand on voudroit se borner à la seule condition, que $p\,d\,x - q\,d\,z$ soit une différentielle complette, & que $\frac{q\,d\,d\,p}{d\,x^2} + \frac{p\,d\,d\,p}{d\,x\,d\,z} = \frac{q\,d\,d\,q}{d\,x^2} + \frac{p\,d\,d\,q}{d\,x\,d\,z}$ soit une équation identique; il y auroit encore une autre condition à remplir; savoir que la force perdue soit perpendiculaire à la surface du fluide; pour cela, nommant x & y les coordonnées AP & PM (*fig.* 25.), on remarquera que la force perdue verticalement est $g - pB - Aq$, & que la force perdue horizontalement suivant

PM ou MR est $-pB'-Aq'$; mais comme cette force doit être ici dirigée de M vers P, afin que la force perdue soit perpendiculaire à la surface CM, il faudra la supposer $=pB'+A'q$; & la condition de la perpendicularité donnera $\frac{dy}{dx}=\frac{g-pB-Aq}{+pB'+A'q}$, ou $\frac{pdp}{dy}dy$, $+\frac{qdq}{dy}dy+\frac{pdp}{dx}dx+\frac{qdq}{dx}dx=gdx$; d'où l'on tire $A+2gx=pp+qq$. Dans cette équation $pp+qq$ exprime le quarré de la vitesse à la surface, & l'on voit que le quarré de cette vitesse est $=A+2gx$, c'est-à-dire, qu'elle est la même que si chaque particule descendoit librement sur cette surface en vertu de sa pesanteur. C'est d'ailleurs ce qu'on peut voir aisément *à priori*; car la force perdue étant toujours perpendiculaire à la courbe, chaque particule du fluide descend de la même maniere que si elle descendoit librement sur une surface solide.

Il faut que l'équation $A+2gx=pp+qq$ se rapporte à la même courbe que l'équation $pdx-qdy=0$. Ainsi les conditions qui doivent déterminer les quantités p & q sont; 1°. que $pdx-qdz$, & $pdz+qdx$ soient des différentielles complettes; 2°. qu'en faisant $z=y$, les équations $pdx-qdy=0$, & $gdx=pdp+qdq$, appartiennent à la même courbe.

X V.

Nous avons supposé jusqu'ici que le fluide se mou-

voit dans un plan; mais s'il se meut suivant des surfaces courbes quelconques, en ce cas on supposera que θq soit sa vitesse verticale, θp & $\theta\,\omega$ ses deux vitesses horizontales, perpendiculaires l'un à l'autre; (car on peut démontrer, par un raisonnement semblable à ceux de la théorie précédente, que telles doivent être les expressions des vitesses, q étant une fonction de x, z & s, ainsi que p & ω). On trouvera de plus, par une méthode exactement semblable à celle de l'Ouvrage déja cité, en considérant des parallélépides rectangles au lieu de parallélogrammes rectangles, & supposant

$$dq = A\,dx + B\,dz + C\,ds$$
$$dp = A'\,dx + B'\,dz + C'\,ds$$
$$d\omega = A''\,dx + B''\,dz + C''\,ds;$$

1°. que $A + B' + C'' = o$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{dq}{dx} + \frac{dp}{dz} + \frac{d\omega}{ds} = o$; 2°. que $\frac{d(g - \theta Aq - B\theta p - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta A'q - \theta p B' - pT)}{dx}$; d'où l'on tire, comme dans le §. I. ci-dessus, $\frac{dq}{dz} = \frac{dp}{dx}$, ou $B = A'$; & cette condition, avec celle qui vient d'être trouvée $A + B' + C'' = o$, satisfera au reste de l'équation; on trouvera de même $\frac{d(g - \theta Aq - \theta C\omega - qT)}{ds} = \frac{d(-\theta A''q - \theta C''\omega - \omega T)}{dx}$; d'où l'on tire par un raisonnement semblable $A'' = C$; enfin on aura par la même raison $B'' = C'$; donc $\frac{dp}{dx}$

$= \frac{dq}{dz}$; $\frac{d\omega}{dx} = \frac{dp}{ds}$; $\frac{d\omega}{dz} = \frac{dq}{ds}$; donc $pdx + qdz + \omega ds$ est une différentielle complette.

Donc on aura les trois équations

$$dp = Adx + Bdz + Cds$$
$$dq = Bdx + B'dz + C'ds$$
$$d\omega = Cdx + C'dz - Ads - B'ds.$$

Il faudra de plus, lorsque z devient y, que $pdx - qdy = o$; $pds - \omega dy = o$; $qds - \omega dx = o$.

Voilà les équations qui serviront à déterminer le mouvement du fluide, & qui sont susceptibles de remarques analogues à celles qui ont été faites précédemment pour le cas de $\omega = o$, $C = o$, & $C' = o$, lorsque le fluide se meut dans un plan.

XVI.

Il est aisé de voir par toute la théorie expliquée dans ce Mémoire, que le mouvement des fluides peut rarement être soumis à un calcul analytique rigoureux, si même il y a des cas où il le puisse être. Mais on peut toujours démontrer la conservation des forces vives dans une masse fluide, qui se meut suivant une loi quelconque. En effet dans le cas où les particules du fluide se meuvent suivant des lignes courbes invariables, on peut regarder le fluide, contenu entre deux quelconques de ces lignes courbes infiniment proches l'une de l'autre, comme s'il se mouvoit dans un tuyau isolé, de figure quelconque & infiniment étroit; or les principes établis dans notre *Traité des fluides*, suffisent pour faire voir

très-aisément que la conservation des forces vives aura lieu pour le fluide contenu dans un pareil tuyau.

Si les particules du fluide ne décrivent pas des courbes invariables, en ce cas qu'on imagine depuis la surface supérieure du fluide CK (*fig.* 26.) jusqu'à l'inférieure LO, une suite de points infiniment proches, dont les vitesses forment par leurs directions une courbe continue KGO: soient imaginées de plus des perpendiculaires Gg à cette courbe, lesquelles soient entr'elles en raison inverse de la vitesse en chaque point G; il est certain qu'on pourra, au moins dans cet instant, regarder le fluide comme s'il se mouvoit dans le tuyau infiniment mince $KGOok$; ainsi la conservation des forces vives pourra encore se démontrer dans cette hypothèse par les mêmes principes. En effet faisant abstraction (pour simplifier le calcul) de toute force accélératrice, & nommant KG, s, la vitesse en G, v, & Gg, z; on aura $\int ds\, dv = o$, ou $\int z\, ds \,.\, v\, dv = o$; & comme rien n'empêche de supposer que la masse $z\, ds$ de chaque particule du fluide ne demeure la même pendant tout le tems du mouvement, quoique cette masse change ou puisse changer à chaque instant de figure & de tuyau, il s'ensuit &c.

Cette derniere Proposition est démontrée d'une autre maniere dans mon *Traité de l'Equilibre & du mouvement des fluides*, Liv. II. Chap. 2; mais on y suppose que la vitesse verticale soit la même dans tous les points d'une même tranche horizontale, & qu'on n'ait

aucun égard à la viteſſe horizontale de ces mêmes points. Or ces deux ſuppoſitions n'étant pas rigoureuſement vraies, quoique les conſéquences qui en réſultent ſoient aſſez conformes à l'expérience, j'ai cherché depuis une méthode plus rigoureuſe pour déterminer les loix du mouvement des fluides ; c'eſt la méthode expoſée dans cet Ecrit. J'en envoyai un eſſai à l'Académie des Sciences de Pruſſe, à la fin de 1749, & je le publiai depuis en 1752, dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, long-tems avant que perſonne eût rien donné de ſemblable. De très-grands Géometres ont fait aſſez de cas de cette méthode pour l'appliquer à la même recherche. Ils ont cherché à la généraliſer, ce qui étoit, j'oſe le dire, très-facile, après les Eſſais que j'en avois publiés. Ils paroiſſent de plus avoir cru que les équations que j'ai données du mouvement des fluides, étoient trop limitées ; je crois avoir prouvé le contraire dans cet Ecrit, & je me flatte même d'avoir tiré de ma théorie d'autres conſéquences qui ont échappé à ces Géometres, ou ſur leſquelles ils me ſemblent avoir été dans l'erreur.

XVII.

Si un fluide ſe meut dans un tuyau de figure quelconque *ABFE* (*fig.* 23.) ; nous avons déja obſervé qu'il falloit que la courbure des parois *AE*, *BF*, fût exprimée par une certaine équation, pour que le mouvement de ce fluide pût être aſſujetti aux loix analytiques. C'eſt

auſſi dans cette ſeule hypothèſe qu'on peut déterminer analytiquement la preſſion que le fluide exerce en un point quelconque N des parois du vaſe; car nommant AN, s, φ la force accélératrice en N, & v la viteſſe, on aura $\int ds\,(\varphi - \frac{dv}{dt})$ pour la preſſion exercée au point N perpendiculairement à la courbe AN; nous avons donné dans le Chap. III. de notre *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, Paris 1752, la méthode de trouver pour chaque point N cette preſſion, que je nomme P. Or cette preſſion produira dans le ſens horizontal, ſuivant PN, une force $= \int P\,dx$; & dans le ſens vertical une force $= \int P\,dy$. On trouvera la même choſe pour l'autre paroi BMF; d'où l'on voit que ſi les forces verticale & horizontale, réſultantes des preſſions contre les deux parois, ne ſe détruiſent pas mutuellement, la preſſion du fluide contre les parois du vaſe tendra à mouvoir le vaſe dans le ſens vertical, ou dans le ſens horizontal, ou dans tous les deux à la fois.

C'eſt pourquoi ſi un vaſe eſt formé, par exemple, de deux parois qui ſoient concaves toutes les deux d'un même côté en forme de tuyau recourbé, il eſt aiſé de voir qu'on pourra déterminer géométriquement l'action du fluide ſur le vaſe pour le mouvoir dans un certain ſens; mais cela ne ſe pourra que quand la courbure des parois ſera aſſujettie à une équation telle qu'elle a été fixée dans les recherches précédentes. Or quand un fluide s'échappe horizontalement d'un vaſe vertical par une

ouverture verticale faite à l'un des parois de ce vase; il est certain qu'on peut regarder ce fluide, ou une grande partie du moins de ce fluide, comme se mouvant dans une espece de tuyau recourbé; mais la figure de ce tuyau ne pouvant être assujettie aux loix ci-dessus, il paroît s'ensuivre qu'on ne peut déterminer par la théorie que d'une maniere fort imparfaite la pression qu'un pareil fluide exerce sur la partie du vase opposée à celle par laquelle il sort.

XVIII.

A l'occasion de cette pression que les fluides exercent horizontalement contre les vases dans lesquels ils coulent, je dirai ici un mot de leur pression verticale, dont j'ai parlé dans mon *Traité des fluides*, Art. 146 & suiv. J'ai observé dans l'Art. 149, que quand la valeur de cette pression est négative, M. Daniel Bernoulli prétend qu'elle se change en suction, c'est-à-dire, que les parois du vase sont pressés de dehors en dedans; j'ai proposé là-dessus mes objections, qui sont bien simples, & qui sont même sans replique, lorsqu'on fait abstraction de la pression de l'air environnant, comme je le faisois alors. On prétend que M. Bernoulli, dans l'endroit de son Hydrodynamique qui est l'objet de cette remarque, ne fait pas la même abstraction que moi; en ce cas nous avons raison tous deux; mais ce qui m'a fait croire que M. Bernoulli n'avoit point pensé à l'air environnant, c'est que dans l'endroit dont il s'agit, il n'en parle point; il

il dit ſimplement, *latera canalis introrsùm premuntur*, ſans ajouter *ab aere ambiente*, ce qui auroit levé toute équivoque.

Il y a plus; au lieu de ces trois mots qui euſſent expliqué ſon idée avec la plus grande clarté, il ajoute une réfléxion qui ne fait, ce me ſemble, que l'obſcurcir; *la preſſion*, dit-il, *ſe change en ſuction, c'eſt-à-dire, les parois du vaſe ſont preſſées de dehors en dedans; ce qu'il faut entendre de la même maniere, que ſi au lieu d'une colomne qui peſeroit de haut en bas, il y avoit dans une branche verticale contigue au tuyau, une colomne d'eau ſuſpendue, dont l'effort pour deſcendre fût arrêté par l'eau qui coule dans le tuyau*; il me ſemble que cette eſpece de comparaiſon eſt beaucoup moins nette & moins juſte que les trois mots que M. Bernoulli a omis, & qui, à mon avis, étoient eſſentiels en cet endroit, pour ne point expoſer les Lecteurs à prendre le change.

Quoi qu'il en ſoit, je n'ai jamais combattu ni penſé à combattre les expériences qu'il rapporte à ce ſujet, parce que ces expériences s'expliquent très-aiſément, dans ma théorie comme dans la ſienne, par la preſſion de l'air environnant; & qu'en admettant cette preſſion, il n'y a plus aucune difficulté entre nous, du moins ſi on ſuppoſe que l'air qui environne le tuyau, ſoit tranquille. Car ſi cet air eſt en mouvement, comme il l'eſt en effet, alors ce mouvement altérant la preſſion de l'air ſur les parois extérieures du vaſe, elle pourra n'être plus la même que ſi l'air étoit abſolument tranquille;

il seroit même fort difficile de déterminer assez exactement cette pression par la théorie. Cependant je crois qu'en général, & à l'exception peut-être de quelques cas singuliers, la pression de l'air contre le vase sera à-peu-près la même que si l'air étoit tranquille; par la raison que la portion d'air qui est en mouvement autour du vase, est très-petite par comparaison à la masse totale de l'atmosphere.

Je devois à mes Lecteurs cet éclaircissement sur les théories que M. Daniel Bernoulli & moi avons données de la pression des fluides en mouvement, & qui sont parfaitement d'accord, lorsqu'on aura égard à la pression de l'air qui environne le vase.

Il n'en est pas de même de l'application du principe de la conservation des forces vives au mouvement des fluides; nous différons essentiellement sur ce point M. Bernoulli & moi. Je crois avoir montré dans mon *Traité des fluides*, que ce principe ne s'applique pas indistinctement à tous les cas, mais qu'il a lieu seulement dans ceux où la vitesse du fluide & de ses parties change à chaque instant par degrés infiniment petits, & non dans ceux où cette vitesse acquiert en un instant une valeur finie. *Voyez* les Art. 94, 123 & 143 du *Traité des fluides* déja cité.

XIX.

Je finirai ces recherches sur le mouvement & la pression des fluides, par quelques réflexions sur la ma-

niere de déterminer l'action des rames. La plûpart des Auteurs qui en ont traité, les rapportent à des leviers de différente espéce; en quoi il semble qu'ils n'ont pas envisagé la question par ses vrais principes; puisqu'il n'y a pas réellement de levier, où il n'y a pas de point d'appui absolument fixe & immobile. Voici donc quelle idée on doit se former de l'action des rames, d'après nos principes de Dynamique. Pour envisager la question dans toute sa généralité, nous supposerons que le vaisseau, la rame & la puissance motrice soient mûs suivant une loi quelconque. Cela posé, la force perdue à chaque instant par le vaisseau, jointe à la pression du fluide contre le vaisseau, doit être en équilibre avec la force perdue à chaque instant par la puissance motrice, & avec la force perdue par la rame, jointes à la résistance de l'eau à la rame. Or pour cela, il faut; 1°. que la force perdue à chaque instant par la puissance motrice, la force perdue par la rame, & enfin la résistance de l'eau à la rame, se réduisent à une seule & unique force dont la direction passe par le point où la rame est attachée au vaisseau; car si la direction de cette force résultante passoit par un autre point de la rame, alors elle pourroit mouvoir la rame autour du point par lequel la rame est attachée au vaisseau, & il n'y auroit pas d'équilibre; ce qui est contre l'hypothèse. 2°. Cette force résultante, ou plutôt la résultante des deux forces qui passent par le point d'appui de chaque rame, des deux côtés du vaisseau, doit être en équilibre avec la force perdue

par le vaisseau, & avec la pression de l'eau sur la surface du vaisseau; c'est-à-dire, que la résultante de ces deux dernieres forces doit être égale & directement opposée à la résultante des deux autres forces. Tel est le principe par lequel on peut se faire une idée nette & précise de l'action des rames, & de la maniere dont elles servent à mouvoir les navires.

Pour fixer les idées sur cette matiere, je regarde le vaisseau comme une ligne AB (*fig.* 27.), & la rame FCG comme une autre ligne, mobile autour du point fixe C. Cela posé, considérons d'abord le navire au premier instant de son mouvement. Je regarde la main appliquée en F comme un corps M qui tend à se mouvoir avec la vitesse a, mais qui ayant le vaisseau & la rame à mouvoir, ne gardera réellement que la vitesse z; de sorte que $M(a-z)$ sera la force perdue par la main. Maintenant si on suppose que la main se meut de F vers A, le vaisseau, ainsi que le point C de la rame, se mouvra de B vers A avec une vitesse $=u$, & le point F de la rame se mouvra vers A avec une vitesse $=z$. Donc si on imprime à tout le systême du vaisseau & de la rame, des mouvemens égaux & contraires, il faudra que ces mouvemens fassent équilibre avec la force $M\times(a-z)$ perdue par la force motrice. Donc si on nomme g la somme des produits des parties de la rame par leurs distances à C, h le cosinus de l'angle FCO (CO étant perpendiculaire à AB), G la somme des produits des parties de la rame par le quarré de

leurs distances à C, μ la masse du vaisseau, m celle de la rame; on aura les deux équations suivantes pour le premier instant du mouvement;

$$1^o.\ M(a-z)\times FC-\frac{G.z}{FC}-g.u.h=o;$$

$$2^o.\ M(a-z)h-\frac{z.g.h}{FC}-m.u=\mu.u;$$

Soit $FC=r$, $CG=p$, on aura les équations $g=\frac{r^2-p^2}{2}$; $G=\frac{r^3+p^3}{3}$; & substituant ces valeurs, il viendra deux équations qui donneront les valeurs de u & de z, au premier instant du mouvement.

Dans les instans suivans on suppose que le vaisseau soit parvenu à une vitesse uniforme; & on demande quelle est la loi de la vitesse de la puissance F, pour entretenir le vaisseau dans cette vitesse.

Soit X l'espace parcouru par la puissance F depuis le commencement du mouvement; la vitesse instantanée de cette puissance, ou plutôt de la masse M, sera $\frac{dX}{dt}$; soit de plus $M.p'$ l'accroissement instantané que doit recevoir la force F pour maintenir le vaisseau dans son mouvement uniforme; on aura donc $M.p'-\frac{MddX}{dt^2}$ pour la force qui doit être perdue à chaque instant au point F, c'est-à-dire, qui doit être en équilibre avec les autres forces dont nous allons parler.

Si on nomme ρ la distance de chaque point de la rame

au point C, on trouvera que $-\frac{ddX.\varrho}{r\,dt^2}$ sera la force perdue à chaque instant par chaque point de la rame.

Enfin, comme le point C où la rame est attachée, a le même mouvement que le vaisseau, & que la rame se meut outre cela d'un mouvement de rotation autour de C, chaque point de la partie CG de la rame frappe l'eau à chaque instant avec la vitesse $= u$ suivant BA, & de G vers B avec une vitesse de rotation $= \frac{\varrho\, dX}{r\,dt}$.

Soit donc γ la résistance de l'eau contre la rame, γ' le moment de cette résistance par rapport au point C, & λ la résistance de l'eau contre le vaisseau; on aura les deux équations suivantes;

$$\left(Mp' - \frac{MddX}{dt^2}\right)h - \frac{ghddX}{r\,dt^2} + \gamma h = \lambda.$$

$$\left(Mp' - \frac{MddX}{dt^2}\right)r - \frac{GddX}{r\,dt^2} - \gamma' = 0.$$

Pour faire usage de ces équations, il est à remarquer; 1°. que la résistance λ est donnée par la connoissance que l'on a de la vitesse u; & qu'on peut supposer cette résistance λ égale à une certaine masse μ animée d'une certaine force accélératrice π; 2°. que si on nomme A l'angle FCO au premier instant, on aura $h =$ cosinus $\left(A + \frac{X}{r}\right)$; 3°. que chaque point de la partie CG de la rame frappe l'eau avec une vitesse $= \frac{\varrho\, dX}{r\,dt} - uh$; d'où il résulte une résistance sur chaque point, laquelle est

proportionnelle à $d\rho \left(\frac{\varrho d X}{r d t} - u h\right)^2 \times \delta$, δ étant la densité de l'eau; de maniere que $\gamma = \int \delta d \rho \times \left(\frac{\varrho d X}{r d t} - u h\right)^2$; 4°. enfin que le moment de chaque effort par rapport au point C est $\rho d \rho \times \delta \times \left(\frac{\varrho d X}{r d t} - u h\right)^2$; d'où il s'ensuit que $\gamma' = \int \delta \rho d \rho \times \left(\frac{\varrho d X}{r d t} - u h\right)^2 = \frac{\delta d X^2}{r^2 d t^2} \times \frac{p^4}{4} - \frac{2 \delta d X}{r d t} \times \frac{p^3 u h}{3} + \frac{u^2 h^2 \delta p^2}{2}$, en supposant que la rame soit dans l'eau jusqu'au point C, ou assez près de ce point.

On fera ces différentes substitutions; après quoi chassant l'inconnue p', on aura une équation différentielle du second ordre, dans laquelle il n'y aura que X de variable, & dont l'intégration donnera la valeur de X. Cette valeur étant connue, on aura celle de p' par l'une des deux équations.

Je ne m'étends pas davantage sur cette matiere, parce qu'elle a été savamment traitée par M. Euler dans les Mémoires de Berlin de 1747. Je n'ai voulu que montrer ici comment mon principe de Dynamique s'y applique. Il est visible aussi que les équations ne seroient pas plus difficiles à trouver par le même principe, si la vitesse du vaisseau, au lieu d'être uniforme, étoit variable.

J'ajouterai que dans le calcul de la résistance de l'eau contre les rames, il faudra (si l'on veut faire ce calcul

exactement) avoir égard à une remarque que j'ai déja faite ailleurs sur la résistance de l'eau contre les aubes des moulins. Voyez le *Traité de l'Equilibre & du mouvement des fluides*, Paris 1754, p. 370 & 371, Art. 367 & 368. Au reste on n'aura pas besoin de cette considération, si on regarde la rame comme une surface de peu de largeur, perpendiculaire à l'extrémité de la rame; car alors ρ sera $=p$, & si on nomme k la surface de la pale, on trouvera $\gamma = \delta k \left(\frac{p\,dX}{r\,dt} - uh \right)^2$; & $\gamma' = \delta p k \left(\frac{p\,dX}{r\,dt} - uh \right)^2$, ce qui rendra les équations plus simples; on pourra de plus, si l'on veut, substituer dans ces équations, à la place de dX & de ddX, leurs valeurs en h tirées de l'équation $\frac{dX}{r} = \frac{-dh}{\sqrt{1-hh}}$. Mais après toutes ces simplifications, l'intégration finale restera encore très-difficile.

Fin du quatriéme Mémoire.



CINQUIÉME

CINQUIÉME MÉMOIRE.

Démonstration du principe de la composition des Forces.

M. Daniel Bernoulli a fait voir dans les Mémoires de l'Académie de Petersbourg, Tome I, que le Problême de la composition des forces se réduisoit à prouver, qu'un corps poussé suivant deux directions quelconques par des forces égales, décriroit la diagonale d'un rhombe, dont les côtés seroient les directions de ces forces, & leur seroient proportionnels. C'est donc cette derniere Proposition seule que nous nous attacherons à démontrer. Ce n'est pas que M. Daniel Bernoulli n'ait aussi prouvé à sa maniere cette même Proposition. Mais la méthode qu'il a suivie, quoique bonne & ingénieuse, ne nous paroît, ni aussi simple, ni aussi rigoureuse que celle que nous allons donner. 1°. L'Auteur se sert d'un calcul analytique, qui rend quelques-unes de ses démonstrations assez compliquées, sur-tout celle de sa Proposition VII; au lieu que toutes nos démonstrations seront très-courtes, sans calcul analytique, & fondées sur la

Géométrie la plus ſimple. 2°. Le rhombe duquel il part, eſt le quarré ; ce qui exige un Théorême de plus, pour prouver qu'un corps pouſſé par deux puiſſances égales qui font un angle droit, doit décrire la diagonale ; au lieu que le rhombe dont nous partirons, eſt celui de 120 degrés, dont la démonſtration ſe fait, pour ainſi dire, à l'œil & par la ſeule inſpection de la figure. 3°. M. Bernoulli démontre bien en rigueur la Propoſition dont il s'agit pour tout rhombe dont l'angle ſera à 90 degrés comme nombre à nombre ; mais il ne le démontre pour le cas où cet angle ſeroit incommenſurable, qu'en ſuppoſant la diviſion à l'infini. Or quoique cette maniere de démontrer puiſſe être admiſe en Géométrie, on ſent aiſément qu'elle n'eſt pas auſſi rigoureuſe qu'on pourroit le deſirer.

L'écrit qu'on va lire, n'a donc d'autre mérite que de démontrer d'une maniere plus ſimple & plus rigoureuſe, la compoſition des forces dans le cas du rhombe ; & je ne me ſuis déterminé à publier cette démonſtration, que par la conſidération de l'utilité dont elle peut être.

PROPOSITION I.

Si trois puiſſances égales agiſſent ſuivant les lignes *AB*, *AC*, *AE* (*fig.* 28.), qui faſſent entr'elles des angles de 120°, il y aura équilibre. Cela eſt évident, puiſqu'il n'y a point de raiſon pour qu'une des puiſſances l'emporte ſur l'autre, étant toutes trois diſpoſées abſolument de la même maniere entr'elles.

COROLLAIRE.

Donc la puissance AD résultante de AB & AC doit être égale à AB ou AC; car cette puissance doit être égale & directement contraire à AE. Or l'angle BAC étant de 120°. (*hyp.*), $AD = AB$ est la diagonale du rhombe $BADC$. Donc deux puissances faisant entr'elles un angle de 120°. équivalent à une seule représentée par la diagonale.

PROPOSITION II.

Si deux puissances égales représentées par AB, AC (*fig.* 29.), font parcourir la diagonale AD du rhombe fait sur les côtés AB, AC; je dis que si on divise les angles BAG, GAC en deux également par les lignes Ab, Ac, deux autres puissances représentées par Ab & par Ac feroient parcourir la même diagonale AD.

Car supposons qu'elles fissent parcourir une ligne $AO > AD$: soit fait le rhombe $ALbl$, & soit pris $AI : Ab :: Ab : AO$; il est visible, 1°. que AI sera $< AL$; car puisque les rhombes $ALbl$, $AbDc$ sont semblables, on aura $AL : Ab :: Ab : AD$; or $AD < AO$ (*hyp*); donc AL ou $\frac{Ab^2}{AD} > \frac{Ab^2}{AO}$; donc $AL > AI$. 2°. Si on prend $Ao = AI$, il est visible que la puissance Ab équivaudra aux deux puissances AI, Ao, puisque (*hyp*) AO équivaut à Ab & Ac; donc au lieu de Ab on peut substituer les deux puissances AI, Ao; & par

conséquent au lieu de Ab, Ac, on peut substituer les deux puissances égales AI, AK, & une puissance $= 2\,Ao$; or les deux puissances AI, AK équivalent à la puissance $2\,Ai$, puisque (*hyp.*) AB, AC, équivalent à $2\,AG$ ou AD. Donc les puissances Ab, Ac, équivalent à $2\,Ai + 2\,Ao$. Or il est visible que lb étant $= AL$, & par conséquent $> AI$, on a $lG > Ai$; de plus $Ao = AI$ est $< AL$, & par conséquent que Al; donc $2\,Ai + 2\,Ao$ est évidemment $< 2\,Al + 2\,lG$, c'est-à-dire, $< AD$. Donc les deux puissances Ab, Ac seroient tout-à-la-fois équivalentes à une puissance $AO > AD$, & à une puissance $2\,Ai + 2\,Ao < AD$; ce qui est absurde.

Si AO étoit $< AD$, on trouveroit alors par un raisonnement semblable, que $2\,Ai + 2\,Ao$ seroit $> AD$; & ainsi la puissance résultante de Ab & Ac seroit encore tout-à-la fois plus petite & plus grande que AD; ce qui est absurde. Donc AO est $= AD$; & en effet il n'y a plus alors aucune contradiction; car les points I & o tombent en L & en l, & on a $2\,Ai + 2\,Ao = AD$.

Corollaire I.

Donc si deux puissances quelconques égales entr'elles, agissent suivant les directions Ab, Ac; la force qui en résultera, sera représentée par la diagonale d'un rhombe dont les côtés seroient proportionnels à ces puissances.

Corollaire II.

Donc aussi, & par la même raison, cette Proposition

ſera vraie pour deux puiſſances égales qui formeront entr'elles un angle $= \frac{bAc}{2}$; & de même pour $\frac{bAc}{4}$, & en général pour $\frac{BAC}{2^n}$, n étant un nombre entier poſitif quelconque.

COROLLAIRE III.

Donc (Coroll. Propoſ. précéd.) deux puiſſances égales faiſant entr'elles un angle $= \frac{120}{2^n}$, donneront toujours la diagonale.

PROPOSITION III.

Si la force qui réſulte de deux puiſſances égales, agiſſant ſuivant AB, AC (*fig.* 30.), eſt repréſentée par la diagonale AD; que la force qui réſulte de deux puiſſances égales, dirigées ſuivant deux autres lignes quelconques Ab & Ac, ſoit de même repréſentée par la diagonale du rhombe fait ſur ces côtés; qu'enfin faiſant l'angle $b'AB = bAB$, la diagonale AB repréſente de même la force réſultante de Ab & de Ab'; je dis que ſi on fait l'angle $gAc' = gAb'$, les deux forces Ab', Ac' donneront auſſi la diagonale.

Car (*hyp.*) la force AB équivaut à Ab & Ab'; & par conſéquent AB, AC, équivalent à Ab, Ac, Ab', Ac'; or (*hyp*) Ab, Ac, équivalent à la diagonale $2Ag$; donc puiſque AB, AC équivalent à la diagonale AD, qui eſt $= 2Ag + 2gG$, Ab', Ac', doivent équivaloir

à $2\,gG$; or $gG = Ag'$, puisque (constr.) Ab' & Bb sont égales & parallèles. Donc Ab', Ac' équivalent à $2\,Ag'$, c'est-à-dire, à la diagonale du rhombe formé sur les côtés Ab', Ac'.

Corollaire I.

Donc en général, si deux puissances égales quelconques, formant un angle quelconque A, donnent la diagonale, & qu'il en soit de même de deux puissances égales quelconques, formant un angle b, & aussi de deux puissances égales quelconques formant un angle $A - b$; il en sera de même aussi de deux puissances égales quelconques formant l'angle $A + b$, ou $A + A - b$, c'est-à-dire, $2\,A - b$.

Corollaire II.

Donc puisque l'angle de 120° & de $\frac{120^\circ}{2}$ donne la diagonale, il s'ensuit que l'angle de $\frac{3 \cdot 120}{2}$ la donnera aussi; de même & par la même raison $\frac{4 \cdot 120}{2}$, & en général $\frac{p \cdot 120}{2}$; de même puisque $\frac{120}{2^n - 1}$ & $\frac{120}{2^n}$ donnent la diagonale, $\frac{3 \cdot 120}{2^n}$ la donnera, ainsi que $\frac{4 \cdot 120}{2^n}$ &c.; & en général $\frac{p \cdot 120}{2^n}$ la donnera toujours, p étant un nombre entier positif quelconque, ainsi que n.

PROPOSITION IV.

Si deux puiſſances αE, αe (*fig.* 31.), égales entr'elles, ſont auſſi égales chacune à deux autres puiſſances $\alpha \beta$, $\alpha \chi$, & font entr'elles un plus petit angle ; je dis que la force réſultante des deux premieres, ſera plus grande que la force réſultante des deux autres. Car ſoient prolongées αE & αe, de maniere que $\alpha E' = \alpha E$, & $\alpha e' = \alpha e$; la force réſultante des forces égales $\alpha E'$, $\alpha \chi$, diviſera l'angle $E' \alpha \chi$ en deux également, & par conſéquent tombera dans l'angle $E' \alpha Q$, puiſque $E' \alpha Q > Q \alpha \chi$ (*hyp.*); & il en ſera de même de la force réſultante de $\alpha e'$ & de $\alpha \beta$, qui tombera dans l'angle $O \alpha e'$. Donc la force réſultante de ces deux réſultantes, qui ſont évidemment égales entr'elles, ſera dirigée ſuivant αP. Donc la force qui réſulte de $\alpha E'$ & $\alpha e'$, & qui agit ſuivant αP, eſt plus grande que celle qui eſt dirigée ſuivant $\alpha \beta$, $\alpha \chi$, & qui agit ſuivant αp dans une direction contraire. Donc la force qui réſulte de αE & αe, eſt auſſi plus grande que celle qui réſulte de $\alpha \beta$ & $\alpha \chi$.

PROPOSITION V.

Un angle quelconque $\beta \alpha \chi$ étant donné, on peut toujours trouver un angle $\frac{p \cdot 120}{2^s}$, ou qui lui ſoit égal, ou qui en differe moins que d'un angle donné k, ſi petit qu'on voudra.

Car il eſt évident ; 1°. qu'on peut rendre le dénomi-

nateur 2^n si grand, que $\frac{120}{2^n}$ soit $< k$: cela posé, multiplions par un nombre q l'angle $\frac{120}{2^n}$; de maniere que $(q+1) \times \frac{120}{2^n}$ soit $> \beta\alpha\chi$; & que $\frac{q \times 120}{2^n}$ soit $< \beta\alpha\chi$; ce qui est évidemment possible : on aura $(q+1)\left(\frac{120}{2^n}\right) - \frac{q \cdot 120}{2^n} > \beta\alpha\chi - \frac{q \cdot 120}{2^n}$; c'est-à-dire, $\frac{120}{2^n} > \beta\alpha\chi - \frac{q \cdot 120}{2^n}$: donc à plus forte raison (puisque $k > \frac{120}{2^n}$), on aura $\beta\alpha\chi - \frac{q \cdot 120}{2^n} < k$. De même, puisque $\frac{q \cdot 120}{2^n} < \beta\alpha\chi$, on aura $(q+1)\left(\frac{120}{2^n}\right) - \beta\alpha\chi < (q+1)\left(\frac{120}{2^n}\right) - \frac{q \cdot 120}{2^n}$; c'est-à-dire ; $(q+1)\left(\frac{120}{2^n}\right) - \beta\alpha\chi < \frac{120}{2^n}$, & à plus forte raison $< k$.

Corollaire I.

Donc on peut toujours trouver (*fig.* 32.) un angle $E\alpha e < \beta\alpha\chi$, ou un angle $F\alpha f > \beta\alpha\chi$, qui differe de $\beta\alpha\chi$ moins que d'un angle donné si petit qu'on voudra, & qui soit $= \frac{p \cdot 120}{2^n}$, p & n étant deux nombres entiers & positifs.

Corollaire II.

Donc si $\alpha\delta$ est la diagonale du rhombe fait sur les côtés $\alpha\beta$, $\alpha\chi$, & qu'on fasse αE & $\alpha F = \alpha\beta$, on pourra toujours

toujours ſuppoſer que la diagonale faite ſur $\alpha E, \alpha e$, differe de $\alpha \delta$ auſſi peu qu'on voudra, ainſi que la diagonale faite ſur $\alpha F, \alpha f$, les angles $E \alpha e, F \alpha f$ étant des multiples de $\frac{120}{2^n}$.

PROPOSITION VI.

Deux puiſſances égales $\alpha\beta, \alpha\chi$ (*fig.* 32.) formant un angle quelconque, donneront toujours pour la réſultante la diagonale $\alpha\delta$. Car ſuppoſons d'abord qu'elles donnaſſent αR, c'eſt-à-dire, plus que la diagonale; & ſoient ſuppoſées les puiſſances $\alpha E, \alpha e$, égales à $\alpha\beta, \alpha\chi$, & formant entr'elles un angle $\frac{p \cdot 120}{2^n} < \beta\alpha\chi$, & tel que la diagonale ſurpaſſe $\alpha\delta$ d'une quantité moindre que δR (ce qui eſt toujours poſſible par la Propoſ. V.); il s'enſuivroit donc que la force réſultante de $\alpha E, \alpha e$, ſeroit moindre que la réſultante de $\alpha\beta$ & $\alpha\chi$; ce qui eſt contre la Propoſ. IV.

Si αR étoit ſuppoſé $< \alpha\delta$; alors en ſuppoſant $F\alpha = \alpha\beta = f\alpha$, & l'angle $F\alpha f = \frac{p \cdot 120}{2^n}$ & $> \beta\alpha\chi$, on démontreroit de même que αR ne ſauroit être $< \alpha\delta$.

COROLLAIRE.

Donc deux puiſſances égales, formant un angle quelconque, équivalent toujours à une ſeule puiſſance repréſentée par la diagonale du rhombe formé ſur des

côtés proportionnels à ces puiſſances, & faiſant entre eux le même angle. Donc, comme M. Daniel Bernoulli l'a démontré, deux puiſſances quelconques, égales ou inégales, faiſant entr'elles un angle quelconque, équivalent à une ſeule repréſentée par la diagonale du parallèlogramme dont les côtés feroient comme ces puiſſances, & feroient le même angle. En effet M. Daniel Bernoulli a démontré d'une maniere très-rigoureuſe & très-élégante (*Voyez* Mém. de Petersbourg, *Tome I*, pag. 135 & 136), qu'un corps pouſſé par deux forces qui font entr'elles un angle droit, doit décrire une ligne *égale* à la diagonale. Or de-là & des Propoſitions précédentes, il eſt aiſé de conclure que cette ligne doit être la diagonale même. Car ſoient AB, AC (*fig.* 33.), les deux forces qui font entr'elles un angle droit; & ſoient deux autres forces AB, AD, égales à celles-là, & faiſant auſſi un angle droit; il eſt clair, que comme les forces AC, AD ſe détruiſent, le chemin du corps en vertu de ces quatre forces, ſera $2\,AB$. De plus ſi les lignes Ae, Ae' (égales chacune à la diagonale AE) ſont le chemin du corps en vertu des forces AB, AC, & AB, AD, il eſt évident que les deux forces Ae, Ae' doivent faire parcourir au corps le même chemin que les quatre forces AB, AC, AB, AD, dont elles ſont les réſultantes; par conſéquent ces forces Ae, Ae', doivent faire décrire la ligne $2\,AB$. Or par les Théorêmes précédens les forces Ae, Ae', font parcourir $2\,Af$. Donc $Af = AB$. Donc les lignes Ae, Ae', doi-

vent tomber sur les diagonales AE, AE'. Donc la diagonale eſt le chemin du corps dans le cas où les deux forces font un angle droit.

Lorſque l'angle BAC (*fig.* 34.) n'eſt pas droit, il eſt aiſé de réduire ce cas au précédent; car au lieu de AB on peut ſubſtituer les forces rectangulaires AF, AG; ainſi au lieu des forces AB, AC, on aura les forces AG, AC, AF, ou, ce qui revient au même, à cauſe de $DC = AF$, les forces rectangulaires AG, AD, qui feront parcourir la diagonale AE du rectangle $AGED$. Or cette diagonale eſt la même que celle du parallèlogramme $BACE$.

Fin du Cinquiéme Mémoire.



SIXIÉME MÉMOIRE.

Sur les Logarithmes des quantités négatives.

EN 1747 & 1748, j'eus avec le célébre M. Euler une dispute par Lettres, sur les Logarithmes des quantités négatives, que ce grand Géometre prétendoit être imaginaires, & que je croyois être réels, ou du moins pouvoir être supposés tels. J'ai lû depuis dans une Dissertation de M. Euler sur ce sujet, imprimée en 1751 dans les Mém. de l'Académie Royale des Sciences de Prusse pour l'année 1749, que cette même question avoit été autrefois agitée entre Messieurs Leibnitz & Bernoulli; j'ai appris par l'Ecrit de M. Euler, que M. Bernoulli soutenoit le même sentiment que moi, & s'appuyoit en partie sur les mêmes raisons; ce que j'ignorois absolument, les Lettres que cite M. Euler de ces deux grands hommes, ne m'étant tombées entre les mains qu'après la lecture du Mémoire de M. Euler, & après toutes les réflexions que j'avois déja faites sur ce sujet. Mais outre les difficultés de M. Bernoulli, sur lesquelles je m'étois rencontré avec ce savant Mathématicien, j'en avois en-

core proposé à M. Euler plusieurs autres, qui me paroissoient assez fortes. M. Euler essaie dans son Mémoire de résoudre quelques-unes de ces objections, & laisse les autres sans réponse, ne les jugeant peut-être pas assez solides.

La lecture du Mémoire de M. Euler a rappellé mes idées sur les Logarithmes des quantités négatives, & j'ai cru devoir exposer ici les difficultés dont cette matiere me paroît susceptible; cependant je m'abstiens de prononcer; je me borne à faire voir que la question n'est pas aussi décidée qu'on pourroit le croire.

On appelle Logarithmes une suite de nombres en progression Arithmétique *quelconque*, répondans à une suite de nombres en progression Géométrique *quelconque*.

On suppose pour plus de facilité (car cette supposition est arbitraire) que le nombre qui représente l'unité dans la progression Géométrique, ait zero pour Logarithme. Du reste la progression Arithmétique est absolument à volonté, & peut suivre telle loi que l'on veut.

Non-seulement la progression Arithmétique qui répond à une progression Géométrique proposée (par exemple, 1, 2, 4, 8 &c.) est arbitraire, puisqu'il n'y a aucune liaison nécessaire entre ces deux progressions; mais encore, & par la même raison, la progression Géométrique qui répond à une progression Arithmétique proposée (comme o, n, $2n$, $3n$ &c.) est arbitraire aussi. Par exemple, ces nombres 1, — 2, 4, — 8, 16, — 32 &c.

qui sont en progression Géométrique, peuvent être supposés avoir pour Logarithmes, les nombres de la progression *o*, *n*, 2*n*, 3*n* &c.

Il est de plus évident, qu'en imaginant une progression Arithmétique quelconque, dont le premier terme soit zéro, & dont les termes répondent à ceux d'une progression Géometrique quelconque, on pourra trouver les Logarithmes de tous les nombres compris ou sous-entendus dans cette progression; par exemple, si la progression Géométrique est une progression de nombres entiers quelconques, comme 1, 2, 4, 8 &c. on pourra trouver les Logarithmes de tous les nombres moyens proportionnels à l'infini entre 1 & 2, 2 & 4, 4 & 8 &c. Car ces nombres peuvent être censés appartenir à une progression Géométrique continue.

C'est d'après cette théorie des Logarithmes, que les Géometres ont imaginé une courbe *BMN* (*fig.* 35.) qu'ils appellent Logarithmique, & dans laquelle les ordonnées *AB*, *PM*, *ZN*, *TV* &c. étant supposées en progression Géométrique, les abscisses correspondantes *AP*, *AZ*, *AT* &c. sont en progression Arithmétique; *AB* étant supposée 1, & l'abscisse qui lui répond en *A* étant $=o$. On a trouvé que cette courbe avoit une soutangente constante *PR*; & le Logarithme du rapport de *NZ* à *AB* est égal au nombre qui est désigné par le rapport de l'abscisse *AZ* à la soutangente *PR*.

Soit $AP = x$, $PM = y$; l'équation $y = c^x$ est celle que les Géometres donnent pour la Logarithmique;

elle signifie que si on nomme b la soutangente, a la ligne que l'on prend pour l'unité, & c l'ordonnée à laquelle répond une abscisse $= b$, on aura $\frac{y}{a} = \frac{c^{\frac{x}{b}}}{a^{\frac{x}{b}}}$; qui se change en $y = c^x$, en faisant $a = 1$, & $b = 1$.

Pour entamer présentement la question des Logarithmes des quantités négatives; voici à quoi elle se réduit. Soit imaginée la suite de tous les nombres naturels, depuis zéro jusqu'à l'infini, tant positifs que négatifs, $-\infty \ldots -2. -1.0.1.2.3$.&c. . . . . ∞; & soient imaginés au-dessous des nombres 1, 2, 3, &c. leurs Logarithmes, 0, p, q, &c. lesquels formeront une suite quelconque. Il est d'abord évident que le Logarithme de ∞ sera infini, & que le Logarithme de o sera égal au Logarithme infini de ∞ pris négativement. Mais quels seront les Logarithmes des nombres négatifs -1, -2, &c. ou, ce qui revient au même, que deviendra la serie des Logarithmes, répondante par son milieu à zéro, & se terminant de part & d'autre à deux nombres infinis, l'un positif & l'autre négatif? J'exposerai d'abord les raisons purement Métaphysiques, qui autorisent à penser que les Logarithmes des quantités négatives peuvent être regardés comme réels. A ces raisons j'en joindrai d'autres purement Géométriques, & qui me paroissent démonstratives; enfin je répondrai aux objections.

En premier lieu, il paroît difficile de concevoir com-

ment une ſerie terminée de part & d'autre par ∞ & $-\infty$ peut paſſer du réel à l'imaginaire, lorſque x n'a qu'une ſeule valeur en y, comme on le ſuppoſe dans la Logarihmique ; du moins ce paſſage ne peut avoir lieu dans les courbes Géométriques (*a*). J'avoue que la Logarithmique n'étant pas une courbe Géométrique, cette concluſion ne peut pas s'y appliquer en toute rigueur; mais elle ſuffit au moins pour faire préſumer qu'une quantité, telle que la repréſente l'abſciſſe de cette courbe, ne ſauroit paſſer bruſquement de $-\infty$ à l'imaginaire. Il eſt bien plus ſimple de penſer, que la ſerie des Logarithmes qui exprime les différentes valeurs de x, & qui devient $-\infty$ lorſque $y = o$, revient ſur ſes pas lorſque y devient négative ; & qu'elle repaſſe de $-\infty$ à $-100 \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ &c. & de-là à ∞, tandis que la ſerie qui exprime à l'infini les différentes valeurs négatives de y, ſavoir, $-1, -2, -3$ &c. parcourt de ſon côté ſucceſſivement tous les nombres négatifs poſſibles depuis o juſqu'à $-\infty$. Cette ſuppoſition n'a rien que de fort naturel. En effet ; 1°.

(*a*) Car pour que x n'ait qu'une ſeule valeur en y, il faut que la valeur de x exprimée en y, n'enferme aucun radical pair. Or cela poſé, la valeur de x ne deviendra pas imaginaire en faiſant y négative. Il ne peut donc y avoir de courbes Géométriques ſemblables à la Logarithmique, telle que la ſuppoſent ceux qui regardent les Logarithmes des nombres négatifs comme imaginaires ; c'eſt-à-dire, qu'il ne peut y avoir de courbe Géométrique, dans laquelle faiſant $y = \infty$ on ait $x = \infty$, & faiſant $y = o$, on ait $x = -\infty$, dans laquelle enfin x n'ait jamais qu'une ſeule valeur en y, & cependant devienne imaginaire lorſque y ſera négative.

puiſque

puiſque les Logarithmes répondans à une progreſſion de nombres quelconques, ſont arbitraires, qui peut empêcher de ſuppoſer que les deux progreſſions $-1-2-3-4$ &c.

$$\begin{matrix} -1 & -2 & -3 & -4 \; \&c. \\ 1 & 2 & 3 & 4 \; \&c. \end{matrix}$$

conſidérées comme des progreſſions différentes & indépendantes l'une de l'autre, ont les mêmes Log. o, p, q &c ?
2°. Dans la ſerie des nombres naturels

$$-\infty \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots \infty$$

ſoient pris les nombres 1 & -1, on aura $1 : -1 :: -1 : 1$; donc $-1^2 = 1^2$; donc 2 Log. $-1 = 2$ Log. $1 = o$; donc Log. $-1 = o$; or ſi Log. $-1 = o$, il s'enſuit, ſelon M. Euler même, (& cela eſt très-facile à prouver) que les Logarithmes des nombres négatifs ſont réels, ou peuvent être ſuppoſés réels. Tout ſe réduit donc à bien établir que Log. $-1 =$ ou peut être ſuppoſé $= o$. La preuve que nous venons d'en donner, paroît fort ſimple & ſans réplique; je tâcherai de faire voir dans la ſuite de cet Ecrit, le peu de ſolidité des réponſes qu'on a voulu faire à cette preuve; mais avant d'examiner ces réponſes, je vais diſcuter une objection à laquelle je ne ſache pas qu'on ait penſé, & qui mérite cependant quelqu'examen.

La progreſſion des nombres naturels 1, 2, 3 &c. pourra-t-on dire, n'eſt cenſée avoir des Logarithmes qu'en vertu de ce qu'on peut toujours regarder ces nombres 1, 2, 3 &c. comme appartenans à une progreſſion Géométrique, dans laquelle on a omis les termes intermédiaires. Or une telle progreſſion ne ſauroit s'étendre au-

de-là des limites, o d'une part, & ∞ de l'autre ; elle ne passera jamais au négatif, & aucun de ses termes ne peut être supposé avoir —. Donc &c.

Ce raisonnement est facile à réfuter. En effet supposons qu'on demande une courbe, dans laquelle les abscisses *étant en progression Géométrique*, les ordonnées soient entr'elles comme les quarrés de ces abscisses ; on prouveroit par la même raison que cette courbe ne pourroit avoir d'ordonnées réelles répondantes aux abscisses négatives. Car, diroit-on, dès qu'on suppose que les abscisses forment une progression Géométrique, on ne sauroit les supposer successivement positives & négatives ; donc la courbe ne s'étendra que du côté des x & des y positives. Cependant cette courbe seroit la parabole ordinaire $y = x^2$, dans laquelle x négatif rend y positif & réel. Il en est de même d'une infinité d'autres cas.

On dira peut-être, qu'en changeant l'énoncé du Problême, alors on voit que la courbe $y = x^2$, a des ordonnées réelles du côté positif & négatif des x ; par exemple, si on propose le Problême ainsi ; *les abscisses étant en progression Arithmétique, trouver la courbe dans laquelle les ordonnées soient comme les quarrés des nombres qui représentent ces abscisses*. Mais en ce cas on pourroit aussi énoncer le Problême de la Logarithmique, de la maniere suivante. *Trouver une courbe dans laquelle les abscisses étant en progression Arithmétique ou en progression quelconque, les ordonnées soient comme les Logarithmes de ces abscisses, ou plutôt en général*

comme les aires correspondantes $\int \frac{dy}{y}$.

Un pareil énoncé fera entiérement disparoître la difficulté tirée de l'impossibilité des quantités négatives dans la progression Géométrique, *o*, 1, 2, 4 &c. Difficulté d'ailleurs illusoire, puisque les ordonnées de la Logarithmique formant une suite continue & non interrompue depuis *o* jusqu'à l'infini, ne constituent pas plus une progression Géométrique, qu'une autre progression quelconque.

Il n'est donc nullement nécessaire que la progression ∞. . . . 3, 2, 1, 0, — 1, — 2 &c. appartienne à une progression Géométrique continue : il suffit que *o*, dernier terme de la progression positive, soit le commencement d'une autre progression *o*, — 1, — 2, — 3 &c. qui revient, pour ainsi dire, en sens contraire sur la premiere, & qui est comme *le complément* de cette progression Géométrique. Car si on cherche une moyenne proportionnelle entre 1 & 4, par exemple, on trouvera également le nombre 2 de la progression positive, & le nombre — 2 de la progression négative. D'où l'on voit ; 1°. que la progression négative est *le complément* de la positive, puisque ces deux progressions ensemble donnent toutes les moyennes proportionnelles possibles ; 2°. que le Logarithme de 2 & le Logarithme de — 2 doivent être les mêmes, puisque faisant Log. 1 = *o*, & Log. 4 = *p*, on aura Log. 2 & Log. — 2 = $\frac{p}{2}$.

L'objection proposée ne prouve donc rien contre l'opi-

nion dont nous tâchons d'expoſer ici les preuves ; & même cette objection approfondie devient elle-même une preuve de notre opinion. Mais comme l'équation $y = x^2$ donne la figure entiere de la parabole, voyons ſi l'équation $x = \int \frac{a\,dy}{y}$, ou $dx = \frac{a\,dy}{y}$ de la Logarithmique, pourra nous fournir quelques argumens en faveur des Logarithmes réels des quantités négatives. C'eſt ici où commencent nos preuves directes & Géométriques.

Pour cela ſuppoſons en général $dx = \frac{a^n\,dy}{y^n}$; n étant un nombre entier poſitif impair : il eſt certain qu'on pourra conſtruire la courbe à laquelle cette équation appartient.

Il faut d'abord tracer (*fig.* 36.) les hyperboles OPV, GFK, dans leſquelles l'abſciſſe $AN = y$, & l'ordonnée $PN = \frac{a^n}{y^n}$; il faut enſuite chercher l'aire $\int \frac{a^n\,dy}{y^n}$ répondante à une abſciſſe quelconque AR, en ſuppoſant que cette aire ſoit $= o$, lorſque $y = AN$; la courbe dont les ordonnées ſeront proportionnelles à ces aires, ſera la courbe cherchée.

Or l'on trouvera facilement qu'à une abſciſſe quelconque y, poſitive ou négative, il répond la même valeur de l'aire. Car ſoit $An = AN$, & $Ar = AR$; l'aire répondante à l'abſciſſe Ar ſera $NPOA + AnpG + npſr$. Or les aires $AnpG$, $npſr$ étant négatives par rapport à l'aire $NPOA$, qui eſt négative elle-même par rapport à l'aire $NPSR$; il s'enſuit que l'aire répondante à

l'abſciſſe négative Ar, c'eſt-à-dire, l'ordonnée x répondante à cette abſciſſe, équivaut à la quantité ſuivante $-NPOA+NPOA+NPSR=NPSR$; d'où il s'enſuit qu'à deux valeurs de y égales & de différens ſignes, il répond une même valeur de x. Donc toute courbe dans laquelle $dx=\frac{a^n dy}{y^n}$, n étant un nombre impair entier quelconque, a deux branches égales, ſemblables & ſemblablement ſituées de part & d'autre de la ligne des x. C'eſt auſſi ce qui ſe reconnoît par l'intégration de cette équation, comme M. Euler en convient.

Il eſt vrai que dans le cas de $n=1$, l'intégration n'a pas lieu. Mais la méthode que nous venons de donner pour conſtruire la courbe $dx=\frac{a^n dy}{y^n}$, par la quadrature d'une hyperbole, dont les ordonnées ſoient $=\frac{a^n}{y^n}$, leve toute difficulté. Car l'hyperbole ordinaire, dont les ordonnées ſont $\frac{a}{y}$, eſt préciſément dans le même cas que les autres; & il eſt impoſſible de rien établir ſur les aires répondantes aux abſciſſes de celles-ci, qui ne convienne également à l'hyperbole ordinaire.

L'exemple apporté par M. Euler, de la courbe $y=\sqrt{ax}+\sqrt[4]{[a^3(b+x)]}$, qui perd ſubitement un diametre dans le cas de $b=o$, ne conclud rien pour ce cas-ci; puiſque l'on voit clairement dans cet exemple la raiſon pour laquelle la courbe perd ſon diametre; & qu'au contraire la conſtruction précédente, tirée de la conſidération des

aires hyperboliques, prouve démonstrativement que la courbe $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$ doit conserver son diametre dans tous les cas. D'ailleurs il n'est pas inutile de remarquer que si la courbe $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3 (b+x)}$ perd son diametre dans le cas où $b = o$, ce n'est pas parce que y, supposée négative, donne x imaginaire, comme M. Euler prétend que cela doit arriver à la Logarithmique; c'est parce que l'équation du huitiéme degré qui résulte de $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3 + (b+x)}$, se divise alors en deux équations rationnelles du quatriéme, & que par conséquent l'équation appartient alors réellement au systême de deux courbes différentes, mais réelles, rapportées au même axe. Ainsi ce qu'on pourroit tout au plus conclure de cet exemple, c'est que pour avoir les Logar. des quantités négatives, il faudroit tracer au-dessous de l'axe *AT* (*fig.* 35.) une autre Logarithmique, semblable & égale à la premiere, qui à la vérité ne formeroit pas avec elle une seule & même courbe, mais qui n'en représenteroit pas moins les Logarithmes des quantités négatives, Logarithmes qu'il seroit impossible en ce cas d'exprimer autrement, qu'en supposant deux courbes différentes. En un mot, il s'ensuivroit tout au plus de l'exemple apporté par M. Euler, que l'équation générale qui renfermeroit les Logarithmes des nombres, tant positifs que négatifs, appartiendroit au systême de deux courbes différentes; mais il n'en seroit pas moins vrai que les Logarithmes des quantités négatives seroient ou

pourroient être supposés réels. Ainsi dans l'équation $x = y \pm \sqrt{aa + yy}$, si on fait y négative, x demeurera réelle; mais les deux équations $x = y \pm \sqrt{aa + yy}$, & $x = -y \pm \sqrt{aa + yy}$, appartiendront au système de deux courbes différentes.

Mais nous n'avons pas besoin d'avoir recours à cette considération; & il me paroît démontré, par les aires de l'hyperbole équilatere Apollonienne, que les deux Logarithmes, qui représentent, selon moi, les Logarithmes des quantités positives & négatives, appartiennent à un même système, à une même courbe & à une même équation, & que la Logarithmique est réellement composée de deux branches égales & semblables, semblablement placées au-dessus & au-dessous de son axe ou asymptote.

Voici une nouvelle preuve de cette Proposition. Que l'on considere l'équation $y = c^x$ de la Logarithmique, dans laquelle la soutangente est supposée $= 1$, & qu'on prenne $\frac{x}{1} = \frac{n}{2m}$, n & m exprimant des nombres impairs quelconques; on aura certainement deux valeurs pour c^x, l'une positive, l'autre négative; car alors $y = \pm \sqrt{c^{\frac{n}{m}}}$. D'où il s'ensuit qu'il y a du moins une infinité de valeurs de x, à laquelle répondent deux valeurs de y égales & de signes contraires; & qu'ainsi, comme on le voit (*fig.* 37.), la Logarithmique doit au moins avoir au-dessous de son axe une infinité de points conjugués aussi près les uns des autres que l'on voudra;

c'eſt auſſi de quoi M. Euler eſt convenu dans une de ſes Lettres.

Or je demande ſi une ſuite de tels points conjugués ne repréſente pas bien une courbe continue ? On dira peut-être que les deux valeurs de y n'ont pas lieu dans tous les cas, parce que $y = c^3$, ou $c^{\frac{1}{3}}$, par exemple, ne donne qu'une valeur réelle de y, & ainſi de pluſieurs autres. A cela on peut répondre, que dans l'équation $y = c^x$, c doit être ſuppoſé avoir deux valeurs égales, l'une poſitive, & l'autre négative. Car c eſt le nombre dont le Logarithme eſt l'unité : or il y a, ſelon moi, deux nombres, l'un poſitif, l'autre négatif, qui ont 1 pour Logarithme. On auroit tort de dire que je ſuppoſe ici ce qui eſt en queſtion ; je me propoſe ſeulement de montrer qu'en ſuppoſant deux valeurs à c, on ſauvera la contradiction, qu'une courbe compoſée d'une infinité de points conjugués, dont la diſtance eſt moindre qu'aucune ligne donnée, ne ſoit pas une courbe continue. Du reſte j'ai expoſé ci-deſſus les preuves directes qu'on peut apporter pour la réalité des Logarithmes des quantités négatives, & par conſéquent pour les deux valeurs de c.

On peut confirmer ces réfléxions par une autre. Soit Q (*fig.* 38.) un point quelconque pris dans l'axe ou aſymptote de la Logarithmique ; je dis qu'il répondra toujours à ce point deux ordonnées égales & de ſigne contraire QS, QR. Car ayant pris à volonté ſur l'axe les parties AQ, QP égales entr'elles, & tiré les ordonnées BA, PM ; il eſt clair que l'ordonnée au point Q ſera moyenne proportionnelle

proportionnelle entre BA & PM; or cette moyenne proportionnelle est également $+\sqrt{BA.PM} = QS$, & $-\sqrt{BA.PM} = -QS$ ou QR. Donc &c. C'est ainsi que dans une Parabole, l'ordonnée, qui est toujours moyenne proportionnelle entre le parametre & l'abscisse, est également positive & négative.

M. Euler objecte dans la Lettre dont j'ai parlé ci-dessus, que la courbe dont l'équation est $y = -2^x$, ou en général $= -a^x$, est composée d'une infinité de points conjugués infiniment proches, & que cependant cette courbe n'est pas continue, puisque, par exemple, l'ordonnée est imaginaire lorsque $x = \frac{1}{2}$.

Je réponds que $y = -a^x$, n'est l'équation que d'une partie de la courbe. Car $y = -a^x$ donne $ly = xl.-a$; or $l-a$ & $l+a$ étant égaux, il s'ensuit que l'on a également $ly = xl.-a$, & $ly = xla$; par conséquent $ly = xl\pm a$; ainsi l'équation de la courbe entiere est $y = \pm a^x$. On n'est pas plus en droit de prendre $y = a^x$, ou $y = -a^x$, pour l'équation de toute la courbe, qu'on ne le seroit de prendre $y = +\sqrt{x}$, ou $y = -\sqrt{x}$ pour l'équation d'une Parabole entiere.

Voilà les raisons qu'on peut apporter en faveur des Logarithmes réels des quantités négatives; raisons qui donnent, ce me semble, beaucoup de poids à celles de M. Bernoulli; il ne sera pas inutile d'examiner d'une maniere plus particuliere les preuves apportées par ce grand Géometre, & les réponses qu'on y a faites.

A la premiere raison de M. Bernoulli, tirée de ce que

$\frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}$, & que par conséquent $l. -x = lx$; on objecte que par la même raison on prouveroit que $L.2x = L.x$, & en général que $L.nx = L.x$. J'en conviens; mais je ne vois pas ce que cette conséquence peut avoir de choquant.

En effet qu'est-ce que $L.x$, en regardant x comme l'ordonnée d'une Logarithmique? C'est le Logarithme du rapport de x à une ordonnée b que l'on prend pour l'unité. Qu'est-ce que le Log. de nx? C'est en général le Logarithme du rapport de nx à une ligne quelconque c que l'on prend pour l'unité. Si on fait $c = b$, on trouvera aisément que Log. $\frac{nx}{c} = l\frac{x}{b} + l\frac{nb}{b}$, ou $l.nx = lx + ln$; mais si on fait $c = nb$, on aura $l\frac{nx}{nb} = l\frac{x}{b} = lx$. En général il est évident que si on prend $L.n$ pour zero, ou, ce qui revient au même, si on prend n pour représenter l'unité, $l.nx$ sera égal au Logarithme de x. Pourquoi donc en prenant -1 pour représenter l'unité, c'est-à-dire, pour le nombre dont le Log. $= 0$, n'auroit-on pas $L.nx = L.-x = L.x$? D'ailleurs on peut observer; 1°. qu'en faisant $l.nx = lx$, on ne donne point une infinité de branches à la Logarithmique, comme le croit M. Euler; puisque $l.nx$ & lx supposés égaux, appartiennent à la même Logarithmique, dont l'origine est supposée seulement en différens points; de même que $yy = ax \pm b$ représente, à proprement

parler, une seule & unique Parabole, dans laquelle l'origine des abscisses est plus ou moins avancée. 2°. Que quand $l.nx$ & lx, supposés égaux, appartiendroient à des Logarithmiques différentes; il ne s'ensuivroit pas pour cela qu'il en fût de même de lx & de $l.-x$; puisque nous avons prouvé par la construction des aires de l'hyperbole équilatere, que lx & $l.-x$ donnent à la Logarithmique deux branches égales & semblablement situées par rapport à l'axe.

Quant à ce qu'objecte M. Euler, que si Log. -1 étoit $=o$, on auroit aussi Log. $\sqrt{-1}=o$, & Log. $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=o$; ce qui renverse, selon lui, toute la doctrine des imaginaires; je ne vois point en quoi cette conséquence seroit absurde.

En effet tout système de Logarithmes est arbitraire en soi; & il est clair que o, o, o, o &c. formant une progression Arithmétique, je puis au-dessus d'une progression Géométrique quelconque, imaginer une suite de zeros qui seront chacun les Logar. du nombre qui leur répond. Ainsi posant o pour le Logarithme de 1 & de -1, j'aurai o pour le Logarithme de $\sqrt{-1}$ & de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

D'ailleurs on peut prouver par la Logarithmique même, que les Logarithmes des quantités imaginaires peuvent être réels. En effet (*fig.* 38.) la moyenne proportionnelle entre AB & la négative QR est imaginaire, & cette moyenne proportionnelle a pour Logar. $AO=\frac{AQ}{2}$.

Mais, dira-t-on, que deviendra donc alors cette Proposition, que le rayon est à la circonférence comme $\sqrt{-1}$ est à $4\,l\sqrt{-1}$? Je réponds, que si dans cette Proposition $l\sqrt{-1}$ n'est pas $= o$, mais imaginaire, cela vient du systême de Logarithmes que l'on suppose dans l'équation entre les arcs de cercle z & leurs sinus x. En effet $dz = \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$, donne $dz = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}$ $= \frac{-dx}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{xx-1}}$; d'où l'on tire $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ Log. $\frac{\sqrt{-1}}{x + \sqrt{xx-1}}$. Cette équation appartient à un systême de Logarithmes, tel 1°. que la soutangente de la Logarithmique qui le représente, soit $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire, imaginaire; 2°. que le Logarithme de $\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{xx-1}}$ soit imaginaire, en donnant à x toutes les valeurs possibles, depuis o jusqu'à l'unité. C'est un systême de Logarithmes particulier, qui n'a rien de commun avec l'équation de la Logarithmique $x = ly$, dans laquelle la soutangente est réelle, & dans laquelle y est supposée toujours réelle. Voilà donc, ce me semble, la contradiction sauvée.

Avant que d'aller plus loin, j'observerai que les réductions des Logarithmes en series ne peuvent rien prouver, ni pour, ni contre les Logarithmes réels des quantités négatives; 1°. parce que ces réductions ne donnent point toutes les valeurs possibles de la quantité qu'on

développe de la ſorte ; 2°. parce que la ſerie eſt ſouvent divergente, & par conſéquent fautive.

Il faut maintenant paſſer aux preuves poſitives, par leſquelles M. Euler tâche d'établir que les Logarithmes des quantités négatives ſont imaginaires. Ces preuves ſont fondées ſur ce que $l.\,\overline{1+\omega}^{n} = n\omega$ repréſente, ſelon lui, tous les Logarithmes ; ſuppoſition qui me paroît pouvoir être contredite ; car ω étant infiniment petit, & n infiniment grand, comme il le ſuppoſe, $\overline{1+\omega}^{n}$ ne ſauroit repréſenter que des nombres poſitifs.

D'ailleurs, en admettant même cette ſuppoſition, il me paroît évident que l'équation $1 + \frac{y}{n} =$ coſinus $\frac{2\lambda - 1}{n}.\Pi \pm \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\frac{2\lambda - 1}{n}.\Pi$, à laquelle parvient M. Euler, & dans laquelle $\Pi = 180^{\circ}$, $y = \text{Log.} -1$, & λ un nombre entier quelconque, donne non-ſeulement $y = \pm(2\lambda - 1)\Pi\sqrt{-1}$, comme le veut M. Euler, mais encore $y = 0$; puiſqu'en ſuppoſant $y = 0$ & $n = \infty$ dans l'équation $1 + \frac{y}{n}$ &c. on a $1 = 1$. De plus dans cette équation même $1 + \frac{y}{n} = \text{coſ.}\,\frac{\overline{2\lambda - 1.\Pi}}{n} \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\frac{2\lambda - 1}{n}.\Pi$, ſoit $\lambda = n = \infty$, on aura $1 + \frac{y}{n} = \text{coſ.}\,2\,\Pi \pm \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,2\,\Pi$, ou $1 + \frac{y}{n} = 1$; donc $y = 0$. Ainſi $y = 0$, eſt une des

valeurs de y que donne l'équation $1 + \frac{y}{n} = \&c.$ trouvée par M. Euler.

Enfin il me semble que M. Euler ne répond pas d'une maniere satisfaisante, p. 163, à l'objection tirée de ce que $2\,l. + a = 2\,l. - a$. Cette formule signifie (ou il faut renoncer à toutes les dénominations analytiques) que le double du Logarithme de $+ a$ est égal au double du Logarithme de $- a$, & non que la somme de deux différens Logarithmes de $+ a$, est égale à la somme de deux différens Logarithmes de $- a$. En effet soient 1 & a^2 deux nombres positifs & réels, qui ayent o & p pour Logarithmes; il est évident, comme nous l'avons déja dit, que la moyenne proportionnelle entre 1 & a^2 sera également a & $- a$, & que le Logarithme correspondant sera $\frac{p}{2}$. Donc $\frac{p}{2} = l. + a$, & $\frac{p}{2} = l. - a$. Il n'y a point d'argument ni de calcul, quelque subtil qu'il puisse être, qui soit capable de renverser une Proposition si simple.

De toutes ces réfléxions il s'ensuit, ce me semble, qu'on peut supposer indifféremment, ou réels, ou imaginaires, les Logarithmes des quantités négatives. Tout dépend uniquement du systême de Logarithmes qu'on choisira. Mais je ne crois pas qu'on soit fondé à soutenir exclusivement & en général, que les Logarithmes de toutes les quantités négatives soient imaginaires; comme on ne pourroit pas soutenir en général, ni que le Lo-

garithme de 1 est nécessairement $= o$, ni que le Logarithme d'une quantité positive & réelle est toujours nécessairement un nombre positif. Car on peut supposer une suite de nombres imaginaires en progression Arithmétique, qui répondent à des nombres positifs & réels en progression Géométrique, & qui par conséquent soient les Logarithmes de ces nombres. Il n'y a aucune liaison nécessaire entre une suite de nombres, & la suite des Logarithmes qui leur répondent. Mais quelque suite de Logarithmes qu'on suppose, les propositions fondamentales de la théorie des Logarithmes y seront toujours vraies; savoir, que si on fait Log. $1 = o$, $la = p$, $lb = q$, on aura Log. $ab = la + lb = p + q$, $l. \frac{a}{b} = la - lb = p - q$, & ainsi du reste.

Je comptois terminer ici ces recherches, lorsque le *Commercium Philosophicum & Mathematicum* de Messieurs Leibnitz & Bernoulli (imprimé à *Lausanne* 1745), m'est tombé entre les mains; & j'y ai lû avec soin toutes les Lettres qui roulent sur cette question, Tome II, pag. 269 & suivantes. Outre les remarques judicieuses de M. Euler sur ces Lettres, remarques qui sont renfermées dans son Mémoire de 1749, & auxquelles je renvoye, voici quelques observations que cette lecture m'a fait naître.

I.

M. Leibnitz, qui prétend que le rapport de 1 à -1

eſt imaginaire, parce que, ſelon lui, le Logarithme de — 1 eſt imaginaire, auroit dû, ce me ſemble, obſerver au contraire, que ſuivant les notions les plus communes de l'Algebre, le rapport de 1 à — 1 eſt exprimé par le quotient de 1 diviſé par — 1, & que par conſéquent ce rapport eſt $= -1$, c'eſt-à-dire, eſt une quantité réelle. Ce ſeroit une grande erreur de penſer que les Logarithmes expriment les rapports; ce ſeroit comme ſi on diſoit que $\frac{\sqrt{2}}{1}$ ou $\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ Log. 2, ou en général que $\frac{a}{b} = la - lb$. Rien ne ſeroit plus faux qu'une telle idée; il ne faut pour le ſentir, qu'un peu de connoiſſance de la théorie des Logarithmes. Il eſt vrai que pluſieurs Géometres, entr'autres M. Cotes, ont regardé les Logarithmes comme la meſure des rapports; mais par cette expreſſion (qu'on auroit tout auſſi-bien fait de ne pas adopter) ils n'ont apparemment voulu dire autre choſe, ſinon que les rapports étant égaux, les Logarithmes ſont égaux, & nullement que le Logarithme d'un rapport peut être pris pour le rapport même. En effet le cas de l'égalité des rapports eſt le ſeul où les Logarithmes ſoient entr'eux comme les rapports. Ainſi on peut dire que le Logarithme de $\frac{1}{2}$ eſt à celui de $\frac{2}{4}$ comme $\frac{1}{2}$ eſt à $\frac{2}{4}$; mais on ne dira jamais qu'en tout autre cas $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: la - lb : lc - ld$. En général on feroit beaucoup mieux, comme je viens de le dire, de ne point ſe ſervir de cette maniere d'exprimer ou de repréſenter

représenter les rapports par des Logarithmes, à cause des erreurs dans lesquelles elle peut induire. Quoi qu'il en soit, il est au moins certain que le rapport de 1 à -1 est $= -1$, suivant toutes les régles reçues, & n'est pas imaginaire. Je prie les Lecteurs de me pardonner à cette occasion une espèce de digression dont ils pourront tirer quelque utilité.

Qu'il me soit donc permis de remarquer, combien est fausse l'idée qu'on donne quelquefois des quantités négatives, en disant que ces quantités sont au-dessous de zero. Indépendamment de l'obscurité de cette idée envisagée métaphysiquement, ceux qui voudront la réfuter par le calcul, pourront se contenter de considérer cette proportion, $1 : -1 :: -1 : 1$; proportion réelle, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, & que d'ailleurs $\frac{1}{-1} = -1$, & $\frac{-1}{1} = -1$. Cependant si on regardoit les quantités négatives comme au-dessous de zero, 1 seroit > -1, & $-1 < 1$; ainsi il ne pourroit y avoir de proportion. Il est vrai que M. Leibnitz prétend que -1 n'est pas moyen proportionnel entre 1 & 1, non plus que -2 entre 1 & 4, quoiqu'il avoue que $-2 \times -2 = 1 \times 4$; parce que les quantités négatives, dit-il, entrent dans le calcul, sans entrer dans les rapports, & que des fractions ne sont pas la même chose que des rapports. J'avoue que je ne sens point la force ni la vérité de cette raison : elle tendroit à renverser toutes les notions Algébriques par des limi-

tations inutiles & forcées ; & elle ne seroit juste d'ailleurs, qu'en supposant que les quantités négatives sont au-dessous de zero, ce qui n'est pas. Les quantités négatives sont tout aussi réelles que les positives : elles n'en different que par le signe qui les précéde ; & ce signe ne sert qu'à indiquer & à corriger une fausse supposition qui a été faite, ou dans l'énoncé du Problême ou dans la solution qu'on en a donnée.

Par exemple, si je demande une quantité qui étant ajoutée à 20, donne une somme égale à 10, j'écrirai, pour résoudre ce Problême, $20 + x = 10$, d'où $x = -10$; ce qui me montre que j'aurois dû énoncer le Problême ainsi : *Trouver une quantité qui étant retranchée de* 20, (& non ajoutée), *le reste soit égal à* 10. Cette idée se vérifie par l'application de l'Algebre à la Géométrie, où l'on voit que les quantités négatives n'ont d'autre différence d'avec les quantités positives, que de se prendre du côté opposé.

M. Leibnitz auroit-il prétendu que l'ordonnée négative d'une Parabole n'est pas moyenne proportionnelle, aussi-bien que l'ordonnée positive, entre le parametre & l'abscisse? Non certainement. C'est que le signe — que porte l'expression Algébrique de cette ordonnée, n'indique que sa position, & n'influe nullement sur sa quantité. Or ce n'est que par sa quantité, qu'elle est moyenne proportionnelle entre le parametre & l'abscisse. Les grandeurs n'ont entr'elles de rapports que par leur quantité. Il ne peut y avoir de rapport entre $-a$ & b, qu'autant

qu'on compare la grandeur de a à celle de b; le signe — n'est qu'une dénomination, & n'indique qu'une fausse position ou une maniere d'être particuliere; ce signe n'ôte aucune réalité à la quantité qu'il affecte; & si le signe — se rencontre dans le quotient de $-a$ divisé par b, ce signe n'influe non plus en rien sur la quantité du quotient; il en est seulement la dénomination; il indique que le quotient de $\frac{a}{b}$, au lieu d'être ajouté aux quantités avec lesquelles il se combine dans le calcul, doit en être retranché. En un mot toute quantité par elle-même a le signe +; elle ne porte le signe — que relativement à une autre, exprimée ou sousentendue. Car supposons, par exemple, qu'un Problême soit réduit à l'équation $\begin{matrix} xx - bx - ab = 0 \\ + ax \end{matrix}$, dont les racines sont, comme l'on sait, $x = b$, $x = -a$; le signe — de la quantité a indique qu'elle doit être retranchée des quantités auxquelles b sera ou pourra être ajoutée. En effet, si au lieu de regarder x comme l'inconnue du Problême, on eût pris pour cette inconnue une autre quantité z qui fût égale à $x + 2a$, on auroit trouvé pour lors deux valeurs réelles & positives de z, savoir $2a + b$, & a ou $2a - a$; où l'on voit que des deux valeurs de x, l'une, savoir b, est ajoutée à $2a$, & l'autre, savoir a, en est retranchée: & en général, si au lieu de $2a$ on prend $c > a$ pour la grandeur exprimée ou sousentendue, à laquelle les valeurs de x doivent être ajoutées, on verra

clairement que la valeur négative de x indique une soustraction.

C'est le calcul, il faut l'avouer, qui a induit certains Géometres en erreur sur la valeur des quantités négatives. Ils ont remarqué que $a < 2a$, donnoit $a - 2a < o$, ou $-a < o$; d'où ils ont conclu que les quantités négatives étoient au-dessous de zero. Mais ils ne seroient pas tombés dans cette erreur, s'ils avoient considéré qu'une quantité au-dessous de zéro est une chose absurde, & que $-a < o$ ne signifie autre chose que $B - a < B$, B étant une quantité quelconque sousentendue & plus grande que a. La simplicité & la commodité des expressions Algébriques, consiste à représenter à la fois & comme en racourci un grand nombre d'idées; mais ce Laconisme d'expression, si on peut parler ainsi, en impose quelquefois à certains esprits, & leur donne des notions fausses (a).

(a) A l'occasion de cette remarque sur les quantités négatives, j'en ferai ici une autre qui est purement élémentaire, mais qui pourra servir à répandre un grand jour sur la théorie de ces quantités, jusqu'à présent assez mal développée par les Algébristes. Soit $by = \overline{a - x}^2$, l'équation d'une courbe; il est évident que tant que x est plus petit que a, $a - x$ est positif, & par conséquent aussi $\overline{a - x}^2$; mais pourquoi $\overline{a - x}^2$ reste-t-il positif quand x est $> a$, & que par conséquent $a - x$ est négatif? En voici la vraie raison. C'est que l'équation $by = \overline{a - x}^2$, n'est autre chose que $by = aa - 2ax + xx$. Or que x soit $<$ ou $> a$, $aa - 2ax + xx$ est toujours une quantité positive; dans le premier cas elle est le quarré de la quantité positive $a - x$; & dans le second cas elle est le quarré de la

II.

M. Bernoulli, p. 276, entreprend de prouver d'après l'équation $dy = \frac{dx}{x}$, que la Logarith. a deux branches égales & semblables; comme l'hyperbole, dit-il, a deux branches opposées. Pour prouver la similitude des branches de la Logarithmique, il se sert, p. 294, comme je l'ai fait, de l'argument tiré des aires hyperboliques, qui me paroît décisif sur cette matiere, & que j'avois

---

quantité positive $x - a$; ainsi l'équation $by = \overline{a - x}^2$, ou $by = aa - 2ax + xx$ en renferme proprement deux autres, savoir $by = \overline{a - x}^2$ quand x est $< a$, & $by = \overline{x - a}^2$, quand $x > a$. Ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit, que les quantités négatives indiquent une fausse supposition; car l'équation $by = \overline{a - x}^2$, quand x est $> a$, est proprement une fausse équation; la véritable est $by = \overline{x - a}^2$. Pourquoi donc les quantités $+b$ & $-b$, ont-elles toutes deux b^2 pour quarré? C'est qu'on peut toujours regarder b comme la différence $a - c$ de deux quantités, dont la seconde c est plus petite que la premiere a, si b est positif, & plus grande, si b est négatif; or dans le premier cas le quarré de b ou $a - c$ est $aa - 2ac + cc$; & si on suppose que c croisse tant qu'on voudra, cette quantité $aa - 2ac + cc$ reste toujours positive, & devient enfin le quarré de $c - a$ au lieu de celui de $a - c$. Ainsi la raison pour laquelle le quarré de $-b$ est b^2, c'est que si on regarde $-b$ comme représentant une quantité $a - c$ qui est devenue de positive négative, le quarré $aa - 2ac + cc$, reste toujours positif, soit que l'on ait $c < a$, ou $c > a$; donc le quarré de b reste toujours positif, soit que b soit positif, ou non; & quand b devient négatif, ou que a est $< c$, alors le quarré de $-b$ est proprement celui de $c - a$ ou de $+b$; puisque ce quarré est toujours $aa - 2ac + cc$.

aussi apporté à M. Euler, sans avoir encore aucune connoissance de ce que M. Bernoulli avoit pensé sur ce sujet. Mais il me semble que M. Bernoulli ne s'est point servi, comme l'a cru M. Euler, de l'argument tiré de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$. Je crois être le premier qui l'aye employé. J'avoue au reste que cet argument n'auroit pas beaucoup de force, si on se bornoit à l'intégration de l'équation; mais si on joint, comme je l'ai fait, à cette intégration, la construction de la courbe par le moyen de l'aire hyperbolique qui a pour ordonnée $\frac{1}{y^n}$, il me semble que l'argument qui en résulte par rapport aux Logarithmes des quantités négatives, devient sans réplique.

III.

M. Leibnitz, p. 278, prétend que la Logar. ne peut avoir d'ordonnées négatives, par la raison, dit-il, que les ordonnées positives ne sont jamais $= o$, & qu'une quantité positive ne passe au négatif qu'en passant par zéro. Mais pour sentir le peu de solidité de cet argument, il suffit de considérer l'hyperbole $y^2 = \frac{1}{x}$, qui est absolument dans le cas dont il est question ici, ayant deux branches égales & semblables des deux côtés de son axe, sans que l'ordonnée y devienne jamais zéro.

Mille autres exemples prouvent qu'il n'est point du tout nécessaire que quelqu'une des ordonnées positives

ſoit $= o$, pour que la courbe ait des ordonnées négatives. Par exemple, dans l'hyperbole ordinaire rapportée à ſon ſecond axe, on a $y = \pm \sqrt{aa + xx}$ & la valeur poſitive de y ne devient jamais zéro. C'eſt l'exemple qu'apporte M. Bernoulli. Il auroit pû ajouter, que même une ordonnée poſitive peut paſſer quelquefois au négatif, ſans paſſer par zéro, comme dans la courbe $y = \frac{1}{a-x}$, où y devient négative lorſque $x > a$, & infinie lorſque $x = a$.

Toutes ces réflexions n'échapperont pas ſans doute aux perſonnes verſées dans la Géométrie; mais j'ai cru devoir les expoſer ici en faveur des Mathématiciens moins exercés, entre les mains deſquels ce Mémoire pourra tomber.

I V.

M. Leibnitz avoit objecté, que ſi le Logarithme de -2 eſt réel, celui de $\sqrt{-2}$ devroit en être la moitié. M. Bernoulli nie cette conſéquence, & il me ſemble qu'en cela il ſe trompe; car dès qu'on ſuppoſe le Log. de $1 = o$, & le Logarithme de $-2 = p$, le Logarithme de $\sqrt{-2}$ ſera $= \frac{p}{2}$. M. Bernoulli appuye ſon ſentiment ſur ce que $\sqrt{-2}$ n'eſt pas moyen proportionnel entre -1 & -2, ce qui eſt vrai. Mais $\sqrt{-2}$, comme l'obſerve M. Leibnitz, & comme il eſt aiſé de le voir, eſt moyen proportionnel entre 1 & -2; & par conſéquent ſon Logarithme eſt la moitié du Logarithme

de — 2, en ſuppoſant celui de 10.

M. Leibnitz ajoute, p. 288, un raiſonnement Métaphyſique, auquel je ne répondrai pas, & que je me contenterai de rapporter, faute de l'avoir pû bien comprendre. L'élévation des nombres à un expoſant, dit-il, répond à la multiplication dans les Logarithmes ; n^e répond à $e \times$ Log. n. La multiplication dans les nombres répond à l'addition dans les Logarithmes; $n \times K$ répond à Log. n + Log. K. La ſimple poſition dans les nombres répond à la ſimple poſition des Logarithmes ; n répond à Log. n. Au contraire, continue toujours M. Leibnitz, l'extraction des racines dans les nombres répond à la diviſion dans les Logarithmes ; $\sqrt[e]{n}$ répond à $\frac{\text{Log. } n}{e}$. La diviſion répond à la ſouſtraction ; $\frac{n}{K}$ répond à Log. n − Log. K. Mais à quoi répondra — n ? M. Leibnitz prétend qu'on ne ſauroit trouver d'expreſſion réelle qui y réponde, parce que deſcendant de l'extraction des racines à la diviſion & à la ſouſtraction, on ne ſauroit, dit-il, rien trouver d'inférieur à la ſouſtraction. Dans une matiere toute de calcul comme celle-ci, on doit, ce me ſemble, ſe défier beaucoup d'un raiſonnement ſi abſtrait & ſi vague. Il peut ſervir d'exemple, entre pluſieurs autres, de l'abus qu'il eſt aiſé de faire de la Métaphyſique dans la Géométrie. D'ailleurs, pourquoi ne diroit-on pas qu'après avoir deſcendu juſqu'à la ſouſtraction, on revient enſuite ſur ſes pas, pour retomber dans les Logarithmes poſitifs ?

V.

V.

On voit auſſi par le *Commercium Epiſtolicum* de nos deux grands Géometres, qu'ils avoient examiné l'équation $y = c^x$; mais ſans que M. Bernoulli en ait tiré, comme je l'ai fait, les doubles valeurs de y, dans le cas où $x = \frac{n}{2m}$, ni qu'il ait obſervé, du moins d'une façon nette & préciſe, que la quantité c avoit deux valeurs dans cette équation.

Au reſte, il ſemble que Mrs Leibnitz & Bernoulli ont fini par ſe rapprocher un peu l'un de l'autre, du moins à quelques égards. Ils paroiſſent convenir, pag. 312 & 315, qu'il ne peut y avoir de diſpute ſur cette matiere, que dans la maniere de parler. Ils ſe ſeroient, ce me ſemble, expliqués plus clairement, en convenant que tout ſyſtême de Logarithmes eſt arbitraire; c'eſt pour cette raiſon que les Logarithmes des quantités négatives peuvent être, ou réels, ou imaginaires, ſelon le ſyſtême des Logarithmes que l'on choiſit.

Fin du Sixiéme Mémoire.



SUPPLÉMENT

Au Mémoire précédent, sur les Logarithmes des quantités négatives.

I.

Ce Mémoire étoit fini depuis plusieurs années, & je ne pensois pas même à le mettre au jour, lorsque j'ai trouvé dans le premier Volume des Mémoires de la Société des Sciences de Turin (dont j'ai déja parlé dans le Supplément au Mémoire sur les cordes vibrantes), un savant Ecrit sur les quantités imaginaires, où la question précédente est traitée. Cet écrit m'a fait naître de nouvelles réfléxions, qui m'ont paru mériter d'être soumises au jugement des Géometres.

L'Auteur de l'Ecrit dont il s'agit (M. le Chevalier Daviet de Foncenex) adopte le sentiment de M. Euler, & tâche de le fortifier par de nouvelles preuves. Il a bien senti la force de l'objection tirée de l'aire de l'hyperbole équilatere, & il a essayé d'y répondre. Il convient que les ordonnées des deux branches opposées de l'hyperbole équilatere, sont unies par le lien de la continuité; mais les aires, selon lui, ne le sont pas; la raison qu'il apporte de cette différence, c'est, dit-il, qu'en faisant l'abscisse x infiniment petite & positive dans l'hy-

perbole équilatere rapportée aux aſymptotes, l'ordonnée correſpondante devient infinie poſitive, & qu'en faiſant x infiniment petite & négative, l'ordonnée correſpondante devient infinie négative, ce qui eſt conforme aux principes de la Géométrie des courbes, ſuivant leſquels une quantité quelconque ne peut devenir de poſitive négative, ſans paſſer par zéro ou par l'infini; au lieu qu'il n'en eſt pas de même de l'aire de l'hyperbole, qui devient *poſitive & finie*, ſelon M. le Chevalier de Foncenex, lorſque x eſt poſitive & infiniment petite, & au contraire *négative & finie*, lorſque x eſt négative & infiniment petite. En effet, dit toujours ce ſavant Géometre, lorſque x eſt infiniment petite & poſitive, l'aire devient $\frac{m\,d\,x}{d\,x} = m$, qui eſt une quantité finie poſitive, & lorſque x eſt infiniment petite négative, cette aire devient $-m$. Ainſi, continue-t-il, l'aire de l'hyperbole ne peut franchir le paſſage du poſitif au négatif, ſans recevoir tout-à-coup un décroiſſement fini, au lieu qu'elle devroit paſſer, ſuivant la loi commune & néceſſaire, par le zéro ou par l'infini. Donc, conclut M. de Foncenex, il n'y a point de paſſage Algébrique des aires poſitives dans l'hyperbole équilatere aux aires négatives.

A cela je réponds; 1°. que lorſque x eſt poſitive & infiniment petite, il n'eſt nullement démontré, du moins par le raiſonnement qu'employe M. le Chevalier de Foncenex, que l'aire de l'hyperbole ſoit finie & $= m$; car la quantité $\frac{m\,d\,x}{d\,x}$ ne repréſente alors qu'une partie de

cette aire, ſavoir, le parallélogramme qui a pour hauteur x ou dx, & pour baſe $\frac{m}{x}$ on $\frac{m}{dx}$; or il ſera aiſé de voir, pour peu qu'on y faſſe d'attention, que l'aire de l'hyperbole eſt même beaucoup plus grande que la ſuite des parallélogrammes m, $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{4}$ &c. laquelle eſt $= 2m$. Je ne prétends point au reſte décider ici, ſi l'aire hyperbolique, qui répond à x infiniment petite & poſitive, eſt finie ou infinie; mais je crois ſeulement avoir bien prouvé par le raiſonnement précédent, que celui de M. Foncenex eſt inſuffiſant pour s'en aſſurer. 2°. J'accorde à M. de Foncenex, que la valeur de l'aire qui répond à x poſitive & infiniment petite, ſoit finie & poſitive; & je dis qu'elle eſt encore finie, mais toujours *poſitive* (& non pas *négative*, comme le prétend M. de Foncenex), lorſque x eſt infiniment petite négative; car x étant alors négative auſſi bien que dx, on a pour l'aire dont il s'agit $\frac{-m\,dx}{-dx} = m$; cette aire en effet n'eſt autre choſe, ſuivant le calcul de M. de Foncenex, que celle du parallélogramme qui a pour hauteur x, & pour baſe $\frac{m}{x}$; or x devenant négative, $\frac{m}{x}$ le devient auſſi, & l'aire redevient poſitive. M. de Foncenex ſemble en convenir lui-même, au moins implicitement, dans une des notes de ſon Mémoire, où il remarque fort bien, que ſi on prend (*fig* 36.) $AN = 1$, & par conſéquent l'origine des aires hyperboliques en N, les aires $NPRS$

répondantes aux nombres plus grands que l'unité, seront positives, & les aires *N P Q a* répondantes aux nombres *A a* plus petits que l'unité, seront négatives, comme le doivent être en effet les Logarithmes de pareils nombres. Or les aires *G p n A* sont de signe contraire aux aires *N P A O*, l'origine des aires étant prise en *N*, & les abscisses s'étendant le long de *N n K*; car les abscisses répondantes à ces aires demeurent de même signe, pendant que les signes des ordonnées varient. Donc, puisque les aires *N P Q A* sont négatives par rapport aux aires *N P R S*, les aires *G p n A* doivent être positives. Il n'est donc pas exact de dire, que l'aire de l'hyperbole passe *du positif au négatif* par un décroissement fini, en prenant l'origine des x en *A*, comme la prend M. de Foncenex; car cette aire dans ce cas demeure toujours positive, soit qu'on prenne x positif ou négatif. 3°. Quand même j'accorderois à M. de Foncenex, que l'aire hyperbolique est *finie* & *positive*, lorsque x est infiniment petite & positive, & *finie négative* lorsque x est infiniment petite & négative, & que cette aire devient de positive négative, lorsque x est négative; il ne seroit pas vrai de dire qu'elle passe du positif au négatif, sans passer par zéro ou par l'infini : il est évident au contraire qu'elle passe par zero; puisqu'en faisant x, non plus infiniment petite, ce qui est une supposition Métaphysique, mais $= o$ absolu, l'aire correspondante est aussi $= o$ absolu; & comme x ne sauroit devenir de positive négative, sans passer par zéro, il s'ensuit que l'aire passe aussi

par zéro dans ce moment; avec cette différence que x devient ensuite négative, & que l'aire reste toujours positive. Si l'on prétendoit que l'aire qui répond à $x = o$, n'est pas zéro elle-même, sous prétexte que l'ordonnée y est infinie, ce seroit renverser les premieres notions de la Géométrie, qui nous apprennent qu'une ligne, même infinie, ne peut être égale à une surface; & d'ailleurs je demanderois à ceux qui auroient cette prétention, si dans l'hyperbole $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, l'ordonnée est moins infinie lorsque $x = o$, que dans l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$; néanmoins dans cette premiere hyperbole, l'aire est $= 2\sqrt{x}$, & par conséquent $= o$ lorsque $x = o$.

La démonstration de M. Bernoulli, tirée des aires de l'hyperbole, subsiste donc, ce me semble, en son entier, & prouve qu'on peut regarder comme réels les Logarithmes des quantités négatives. Aussi M. de Foncenex semble-t-il se rapprocher de cette opinion à la fin de son Mémoire, lorsqu'il dit que *les deux branches de la Logarithmique ne sont pas moins réelles l'une que l'autre, & qu'elles auront leurs usages particuliers dans plusieurs cas*. Il est vrai qu'il prétend en même-tems que ces deux branches *sont isolées & indépendantes l'une de l'autre algébriquement, quoique liées par leur expression transcendante*; mais comme il ne le prétend que d'après le raisonnement que je viens d'examiner, il me semble que tout ce que j'ai dit dans mon Mémoire pour prouver

la liaison & la dépendance de ces deux branches, subsiste toujours.

En général, & on ne sauroit trop le répéter, le système des Logarithmes & des nombres auxquels ces Logarithmes répondent, dépend de la supposition primitive qu'on a faite. Si, par exemple, on prend $AN = 1$ (*fig. 36.*), & qu'on suppose l'origine des Logarithmes en N, on pourra prendre indifféremment les aires positives ou négatives du côté de NR, ou du côté de NA; dans le premier cas, la suite des abscisses sera $\infty \ldots 3 . 2 . 1 . 0 - 1 - 2 - 3 \ldots - \infty$, & la suite des Logarithmes sera de même forme; dans le second cas, la suite des Logar. sera au contraire $- \infty \ldots - 3 - 2 - 1 . 0 . 1 . 2 . 3 \ldots \infty$; les Logarithmes des nombres plus grands que l'unité, seront négatifs, & ceux des fractions seront au contraire positifs. Ce n'est donc point une régle générale que les Logarithmes des fractions soient négatifs par la même raison qu'on n'est pas obligé de supposer les abscisses positives de la Logarithmique du cô é de AT (*fig. 35.*), & qu'on peut les prendre du côté de AR.

Prenons maintenant l'hyperbole équilatere, dans laquelle l'équation au premier axe est $y = \sqrt{xx - aa}$: les secteurs de cette hyperbole seront, comme l'on sait, les Log. de $x + \sqrt{xx - aa}$. Or en faisant $a = 1$, & $x < 1$, cette quantité devient imaginaire, ainsi que le secteur hyperbolique; & en faisant x négative aussi-bien que $\sqrt{xx - 1}$, & $x > 1$, les secteurs hyperboliques redeviennent réels & positifs, étant opposés au sommet aux

secteurs correspondans de l'hyperbole opposée. C'est pourquoi la suite des nombres représentés par $x + \sqrt{xx - 1}$, va d'abord de ∞ à 1, en représentant par conséquent tous les nombres réels: ensuite elle passe de 1 à l'imaginaire, jusqu'à ce que $x = -1$: puis elle redevient -1 jusqu'à $-\infty$; & les Logarithmes correspondans forment une suite qui va d'abord de ∞ à o jusqu'au point où $x = 1$, ensuite passe par l'imaginaire jusqu'à ce que $x = -1$, & enfin repasse de o à ∞.

Voilà donc, dans deux cas differens, deux suites de nombres, & deux suites de Logarithmes très-différentes, quoique toutes deux assujetties à une loi Géométrique. Dans le premier cas, la suite de nombres & de Logarith. est par-tout réelle ; dans le second, les deux suites sont chacune imaginaires en leur milieu. Ces deux exemples, auxquels on pourroit en ajouter une infinité d'autres, suffisent pour prouver que tout systême de Logarithmes est différent, suivant la supposition sur laquelle ce systême est fondé.

M. de Foncenex prétend avoir renfermé tous les Logarithmes (réels ou imaginaires) dans l'équation suivante $\varphi\sqrt{-1} = l\,(x + \sqrt{xx - 1})$, ou $\varphi\sqrt{-1} = l\,(\text{cos}.\ \varphi + \text{sin}.\ \varphi\sqrt{-1})$, dans laquelle φ est l'angle dont le cosinus est x, & $\sqrt{1 - xx}$ le sinus. Dans cette équation, lorsque x est > 1, φ devient imaginaire & égal au secteur hyperbolique multiplié par $\sqrt{-1}$; de sorte que $\varphi\sqrt{-1}$ & $x + \sqrt{xx - 1}$, sont alors tous deux réels; & quand $x = -1$, on a $l - 1 = k\pi\sqrt{-1}$, π exprimant 180 degrés,

degrés, & k un nombre impair quelconque; ce qui est le Théorême de M. Euler. Cette équation de M. de Foncenex, ainsi que le raisonnement sur lequel il la fonde, demande plusieurs réfléxions. 1°. De ce que l'Elément du secteur hyperbolique est toujours à celui du secteur circulaire correspondant, comme $\sqrt{-1}$ est à 1, M. de Foncenex en conclud, que les secteurs sont toujours entr'eux dans ce même rapport. Or cette conséquence peut être contestée, parce que l'addition des constantes en intégrant fait que des intégrales peuvent n'être pas entr'elles comme leurs différentielles: & c'est en effet ce qui a lieu ici; car on sait que l'Elément d'un secteur circulaire a une infinité d'intégrales, par l'addition continuelle que l'on peut faire de la circonférence répétée tant de fois qu'on voudra. On peut s'assurer d'une maniere encore plus positive, dans le cas dont il s'agit, que $\varphi\sqrt{-1}$ ne représente pas en général le secteur hyperbolique; car quand $x = -1$, $\varphi\sqrt{-1}$ est $= k\pi\sqrt{-1}$, k marquant un nombre impair quelconque, au lieu que le secteur hyperbolique correspondant est $= 0$. 2°. Quand même on conviendroit que l'équation proposée renferme les Logarithmes réels & imaginaires à l'infini, il est certain qu'en faisant x négative & plus grande que 1, $\varphi\sqrt{-1}$ devient réel; & qu'ainsi les Logarithmes des quantités négatives se trouvent réels par cette équation. Mais il est bien plus naturel de ne regarder l'équation $\varphi\sqrt{-1} = l(\text{cos.}\,\varphi + \text{sin.}\,\varphi\sqrt{-1})$, comme présentant quelque chose de net à l'esprit, que dans la

seule supposition de $x < 1$ & de φ réel. Or dans cette supposition, qui emporte, comme nous l'avons dit, celle d'une soutangente imaginaire de la Logarithmique, on trouve à la vérité que Log. -1 est imaginaire; mais on remarquera qu'il n'est tel que parce que le nombre réel -1 se trouve dans la suite infinie représentée par cos. $\varphi +$ sin. $\varphi \sqrt{-1}$, dont tous les termes (ainsi que leurs Logarithmes), sont imaginaires, excepté dans le cas où cos. $\varphi = 1$ ou -1. A l'égard du cas où cos. $\varphi > 1$; ce cas n'est représenté, *ni d'une maniere nette, ni d'une maniere exacte*, par l'équation $\varphi \sqrt{-1} = l($cos. $\varphi +$ sin. $\varphi \sqrt{-1})$, ou $\varphi \sqrt{-1} = l(x + \sqrt{xx-1})$; *d'une maniere nette*, parce que φ est alors imaginaire, & qu'on n'a point d'idée nette de la valeur d'un arc de cercle imaginaire φ, ni par conséquent de $\varphi \sqrt{-1}$; *d'une maniere exacte*, parce que, comme il répond une infinité d'arcs circulaires réels à cos. $\varphi < 1$, il pourroit de même répondre (du moins le contraire n'est pas prouvé, & ne sauroit l'être) une infinité d'arcs de cercle imaginaires à cos. $\varphi > 1$; au lieu que $x > 1$ ne donne jamais qu'un seul secteur hyperbolique, parce que l'hyperbole est une courbe infinie qui ne rentre pas en elle-même. Ainsi l'équation des secteurs hyperboliques & celle des secteurs circulaires, sont deux équations absolument séparées, qu'il ne faut point chercher à lier ensemble par une même expression.

II.

M. de Foncenex, pour fortifier sa théorie sur les Logarithmes imaginaires, considere un corps ou point mobile *A* (*fig.* 39), poussé vers un centre *C* par une force $= \frac{1}{CP^n}$; & voici le raisonnement qu'il fait en conséquence de cette supposition. Soit, dit-il, $AC = a$, $AP = x$, u la vitesse en P; on aura $u\,du = \frac{dx}{(a-x)^n}$, & $\frac{uu}{2} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\overline{a-x}^{\,n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$; quantité qui est toujours réelle & positive, tant que n est un nombre impair, & qui représente en effet la loi de la vitesse du corps *A* des deux côtés du point *C*. Car prenant $Cp = CP$, on trouvera que la vitesse u en p est égale à la vitesse en P, comme cela doit être en effet, puisque le corps, après qu'il est arrivé au point *C*, doit repasser au-delà avec les mêmes degrés de vitesse (en sens contraire), qu'il avoit avant que d'y arriver. Or, ajoute M. de Foncenex, lorsque $n = 1$, la différentielle $u\,du = \frac{dx}{a-x}$ s'intégre par Logarithmes, & devient alors $\frac{uu}{2} = \text{Log.}\,\frac{a}{a-x}$. Dans le cas où x est $> a$, c'est-à-dire, où le corps est au-delà de *C*, $\frac{a}{a-x}$ devient négative; & on ne sauroit dire cependant, ajoute toujours l'Auteur, que Log. $\frac{a}{a-x}$ soit imaginaire, puis-

que cette qnantité exprime la moitié du quarré de la vitesse u^2, qui par la nature du Problême doit toujours être réelle & positive. M. de Foncenex en convient, & il semble en cela donner gain de cause à M. Bernoulli & à moi. Mais il prétend qu'alors les valeurs de uu, avant & après le passage au point C, ne sont pas unies par le lien de la continuité; parce qu'il y a, dit-il, un *saut* dans l'accroissement & le décroissement de la vitesse du corps au point C; cette vitesse étant finie un instant avant le passage, & redevenant finie un instant après. Pour moi je ne vois pas, je l'avoue, pourquoi il y a plus de *saut* dans le cas de $n = 1$, que dans celui de n égal à tout autre nombre entier impair, par exemple $= 3$; & il est certain que dans ce dernier cas les deux valeurs de uu, de l'aveu même de M. de Foncenex, sont unies par le lien de la continuité. Dans le cas de $n = 1$, comme dans celui de $n =$ à un nombre impair quelconque, la valeur de u est infinie en C, & la vitesse a également de part & d'autre du point C un accroissement & un décroissement graduel, & qui reçoit successivement toutes les valeurs possibles, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Je ne prétends point cependant tirer beaucoup d'avantage de cette valeur de uu lorsque $n = 1$, pour appuyer le sentiment que je soutiens sur la réalité des Logarithmes des quantités négatives. Car je conviens franchement que cette méthode d'argumenter de la solution d'un Problême de Méchanique à celle d'une question

de Géométrie, ne me paroît pas fort convaincante; & j'en trouve la preuve dans le Problême dont il s'agit. En effet, si on suppose dans ce Problême $n =$ à un nombre pair quelconque, il est aisé de voir que quand x sera $> a$, la valeur de uu sera négative, & par conséquent celle de u imaginaire; cependant il est évident que passé le point *C*, le mobile *A* aura une valeur réelle; de sorte qu'en *p*, par exemple, sa vitesse sera égale à ce qu'elle étoit en *P*, & dirigée dans le même sens. Cette contradiction du calcul avec le raisonnement, & l'impossibilité apparente de les concilier, ont fait croire à un très-grand Géometre qu'au point *C* le corps *A s'anéantissoit.* Mais, sans avoir recours à ce singulier dénouement, on peut expliquer le paradoxe d'une maniere bien plus simple & bien plus claire. Prenons, par exemple, $n = 2$ pour fixer les idées; il est clair qu'on aura $u\,du = \frac{dx}{(a-x)^2}$; par cette équation la valeur de $u\,du$ & par conséquent celle de du doit être toujours positive, soit qu'on ait $x < a$, ou $x > a$, c'est-à-dire, soit que le corps soit en deçà ou au-delà du point *C*. Cependant il est évident qu'au-delà du point *C* la vitesse décroît, & qu'ainsi du est négative. La raison pour laquelle le calcul ne peut exprimer la vitesse u après le passage au point *C*, c'est que par l'hypothèse la force est $\frac{1}{(a-x)^2}$, & que cette expression Algébrique est toujours positive, soit que x soit $<$ ou $>$ a. Cependant passé le point *C*, la force est

dirigée en sens contraire à ce qu'elle étoit auparavant; & il faudroit prendre alors $-\frac{1}{(a-x)^2}$ pour l'expression de la force; & pour l'équation de la vitesse, $u\,du = \frac{-dx}{(a-x)^2}$, qui donne la valeur de u telle qu'elle doit être. Voilà, ce me semble, le dénouement du paradoxe dans ce cas-là, & dans les autres semblables. Je reviens à mon sujet.

On pourroit faire contre l'argument tiré des aires hyperboliques, une objection que voici, & qui paroît avoir échappé à tous ceux qui ont jusqu'ici traité cette matiere.

Soit $AP = x$ (*fig.* 40.), $PM = y$, $AC = a$, & $y = \frac{1}{(a-x)^n}$, n étant un nombre pair positif; il est visible que cette équation sera celle d'une hyperbole du degré n, qui aura pour asymptote CO, & dont les deux branches BMQ, qmb, seront du même côté de l'axe Aa. Il est visible de plus, que l'intégrale de $y\,dx$, ou l'aire $ABMP = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^n}\right)$; & comme les deux branches BMQ, qmb appartiennent à une seule & même courbe, il semble que cette intégrale devroit exprimer aussi l'aire $AQqmp$, dans laquelle Ap est $> AC$. Cependant elle ne l'exprime pas. Car quand x est $> a$, l'intégrale précédente est toujours finie, au lieu que l'aire $AQqmp$ est infinie, étant composée des deux aires infinies $ABQC$, $qmpC$. Voilà donc un exemple où l'équation des aires n'est pas assujettie à la

loi de continuité, quoique celle des branches le soit. Or, dira-t-on, ne pourroit-il pas en être de même de l'hyperbole équilatere?

Je réponds que cet inconvénient n'a lieu que dans le cas où n est un nombre entier pair, & nullement dans celui où n est un nombre entier impair; or dans le cas de l'hyperbole équilatere, $n = 1$, qui est un nombre impair. La raison de cette différence entre le cas de n pair & celui de n impair, est assez facile à appercevoir. Dans le cas de n impair, les deux branches de l'hyperbole sont de deux différens côtés de l'axe, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'asymptote; & l'aire $ABQC$, qui est $= \infty$ lorsque $x = a$, redevient ensuite finie lorsque x est $> a$, parce que l'aire négative se retranche de l'aire positive; ainsi l'aire $\int y\,dx$, après avoir passé du fini à l'infini, redevient ensuite finie, ce qui est conforme à la nature des expressions Algébriques; il n'est donc pas surprenant que dans ce cas l'expression Algébrique de l'intégrale donne la vraie valeur de l'aire, soit pour le cas de $x < a$, soit pour celui de $x > a$. Au contraire dans le cas de $n =$ à un nombre entier pair, les deux branches étant du même côté de l'axe, l'aire qui devient infinie dans le cas de $x = a$, continue de l'être dans le cas de $x > a$. Or il n'y a point d'expression Algébrique, ou de fonction de x, qui étant infinie dans le cas où x a une certaine valeur, puisse continuer de l'être dans le cas où x aura une autre valeur quelconque plus grande ou plus petite. On ne doit donc pas s'étonner que l'expression Algébrique ne puisse

en ce cas repréſenter l'aire qui répond à une abſciſſe quelconque.

Si l'aire $ABQC$ étoit finie, les deux branches étant toujours du même côté de l'axe, alors le même inconvénient ne ſubſiſteroit plus, & l'expreſſion Algébrique indiqueroit également en ce cas les deux aires $APMB$, $ApmOB$. Soit, par exemple $y = \frac{1}{(a-x)^{\frac{2}{3}}}$; on aura l'aire $APMB = -3\,\overline{a-x}^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}$; l'aire $ABQC = 3a^{\frac{1}{3}}$; & l'aire $ABQgmp = 3a^{\frac{1}{3}} + 3\sqrt[3]{Cp}$, comme elle l'eſt en effet. Cet exemple prouve clairement que l'inconvénient propoſé vient uniquement de ce que l'aire étant infinie en C, continue de l'être par-delà.

Au reſte, il eſt à remarquer que dans ce cas-là même il ne manque à l'expreſſion Algébrique qu'une conſtante infinie, ſavoir $\frac{2}{n-1}\left(\frac{1}{0^{n-1}}\right)$, pour rendre l'intégrale égale à l'aire cherchée, lorſque $x > a$. C'eſt pourquoi ſi les deux équations, qui repréſentent les aires $ABMP$, $ABQgmp$, ne ſont pas exactement la même, elles ne different au moins que par cette conſtante infinie, qui ſeule, comme on vient de le dire plus haut, les empêche d'être unies par la loi de la continuité.

III.

A l'occaſion de ces Logarithmes des quantités négatives, je dirai auſſi un mot ſur la forme des quantités imaginaires

imaginaires, dont il eſt queſtion dans le même Mém. de M. de Foncenex. J'ai donné le premier, & M. Euler a donné après moi, par une méthode tout-à-fait ſemblable, la maniere de réduire toute quantité imaginaire à $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant réelles. J'ai employé pour cette recherche, comme M. Euler l'a fait auſſi, le calcul différentiel; non que je n'euſſe pû très-bien m'en paſſer; mais parce que cette méthode m'a paru plus analytique & plus directe qu'aucune autre, ne ſuppoſant abſolument aucune connoiſſance préliminaire de la réduction des arcs de cercle à des Logarithmes imaginaires; car j'avoue que par le moyen de cette réduction que M. de Foncenex ſuppoſe, on peut ſe paſſer du calcul différentiel; en remarquant cependant que cette réduction même ſuppoſe ce calcul, au moins implicitement.

M. de Foncenex prétend auſſi que la démonſtration que j'ai donnée dans les Mémoires de l'Académie de Berlin de 1746, de la réduction de toutes les racines imaginaires des équations, à $A+B\sqrt{-1}$, & que M. de Bougainville a très-bien développée dans ſon *Traité du Calcul intégral*, n'eſt pas aſſez rigoureuſe, parce qu'elle procéde par le moyen des ſeries. La valeur imaginaire, dit-il, qu'on trouve par cette méthode, n'étant qu'approchée, on pourroit ſoupçonner que la quantité qu'on néglige, quelque petite qu'elle ſoit, eſt préciſément celle qui empêche qu'on ne puiſſe exprimer l'inconnue par une expreſſion finie. On eſt d'autant plus à portée de former ce doute, ajoute M. de Foncenex, que, comme

M. d'Alembert l'a fait voir, il arrive souvent qu'un terme qu'on croyoit pouvoir négliger dans une serie, est cependant celui qui la fait changer de nature.

Ma réponse à cette objection est bien simple. J'ai démontré rigoureusement; 1°. que si on suppose que l'abscisse x d'une courbe soit très-petite, l'ordonnée correspondante (supposée réelle) peut être représentée par une serie infinie, & extrêmement convergente, telle enfin que plus on prendra de termes de cette serie, plus on approchera de la vraie valeur de l'ordonnée, ensorte qu'on en pourra approcher aussi près qu'on voudra; 2°. que si l'ordonnée est imaginaire, on trouvera toujours une quantité $A + B\sqrt{-1}$ égale à la somme d'un nombre quelconque de termes de la serie, & que les quantités A, B, seront représentées par une serie très-convergente, puisque les changemens que reçoivent A & B, à chaque nouveau terme qu'on prend de la serie, sont du même ordre que ce nouveau terme qui va toujours en décroissant très-rapidement; d'où il s'ensuit que les quantités A, B, demeurent toujours réelles, finies, & sont représentées chacune par une suite très-convergente, dont tous les termes sont réels. Donc la somme de chacune de ces suites, c'est-à-dire, à proprement parler, la limite de la somme d'un nombre quelconque de termes, est réelle; donc il y a toujours deux quantités réelles possibles A, B, telles que $A + B\sqrt{-1}$ représentera la somme de la suite *infinie* qui exprime la valeur de x. Je dis de la suite *infinie*, ce qui fait voir

qu'on ne *néglige aucun terme* dans cette démonſtration, comme le croit M. de Foncenex. Il eſt bien vrai, que comme on ne peut ſuppoſer la ſerie actuellement pouſſée à l'infini, on ne peut jamais trouver par le calcul que des valeurs approchées de A & de B; mais comme ces valeurs ſont toujours réelles, & formées par une ſuite très-convergente, on en conclud avec raiſon (ce qui eſt évident par ſoi-même), que la limite de ces valeurs, qui eſt la vraie valeur de A & de B, eſt auſſi une quantité réelle. Ma démonſtration eſt donc très-rigoureuſe. Je conviens ſeulement avec M. de Foncenex qu'elle eſt indirecte, étant tirée de la conſidération des courbes; mais ce léger inconvénient eſt compenſé par la ſimplicité & la ſingularité de la démonſtration, qui ne ſuppoſe preſqu'aucun calcul, & qui eſt d'ailleurs d'un genre aſſez neuf.

La démonſtration que M. de Foncenex donne du même Théorême, eſt plus directe que la mienne, étant déduite de la ſeule conſidération des équations: elle eſt d'ailleurs fort ingénieuſe & fort ſimple; elle ſuppoſe uniquement cette propoſition, que ſi on a une équation d'un degré quelconque s, & dont par conſéquent les racines ſoient au nombre de s, l'équation qui renfermera la ſomme des racines de ces équations priſes deux à deux, aura autant de racines qu'on peut combiner de fois deux à deux un nombre s de quantités. Cela paroît en effet très-naturel; mais en même-temps cela doit-il être ſuppoſé ſans démonſtation? Il eſt bien vrai que la combinaiſon de s racines priſes deux à deux, ne peut jamais donner

qu'un nombre $= \frac{s.(s-1)}{2}$; mais s'enſuit-il que l'équation qui donne les valeurs de la ſomme de ces racines priſes deux à deux, ſera préciſément du degré $\frac{s.(s-1)}{2}$? Ne ſeroit il pas poſſible que l'équation eût pluſieurs racines égales, ou bien que parmi les combinaiſons des racines priſes deux à deux, il y en eût qui donnaſſent des ſommes égales? Dans le premier cas l'équation pourroit être d'un degré plus grand que $\frac{s.(s-1)}{2}$, ſans avoir cependant réellement un nombre de racines plus grand que $\frac{s.(s-1)}{2}$; dans le ſecond cas, l'équation pourroit être d'un degré plus petit que $\frac{s.(s-1)}{2}$, & renfermer cependant toutes les ſommes des racines priſes deux à deux. Il falloit donc démontrer, & ne pas ſe contenter de le ſuppoſer, que l'équation dont il s'agit, eſt du degré $\frac{s.(s-1)}{2}$. Cela eſt d'autant plus néceſſaire, que ſi on ſe bornoit à la conſidération des racines d'une équation, pour déterminer le degré dont elle doit être, on ſeroit ſouvent expoſé à tomber dans l'erreur. Soit, par exemple, l'équation du quatriéme degré $x^4 + ax^2 + bx + c = o$, dont le ſecond terme eſt évanoui, & dont les racines ſont ſuppoſées imaginaires; il eſt certain que ces racines pourront être repréſentées par les quatre quantités $A + B\sqrt{-1}$, $A - B\sqrt{-1}$, $-A + C\sqrt{-1}$,

$-A-C\sqrt{-1}$; de sorte que si on suppose $p+q\sqrt{-1}$ pour l'expression générale de la racine, il semble que l'équation en p doive avoir quatre racines tout au plus, savoir deux égales & positives $+A$, & deux égales & négatives $-A$. Ainsi l'équation en p semble naturellement devoir être du quatrieme degré. Cependant si on substitue dans l'équation x^4+ax^2+bx+c, la quantité $p+q\sqrt{-1}$ à la place de x, & qu'on en fasse deux équations séparées, dans l'une desquelles soient les quantités réelles, & dans l'autre les quantités imaginaires, on parviendra à une équation en p qui sera du sixiéme degré. Je sais bien qu'on peut expliquer ce paradoxe, en disant que la supposition qu'on a faite de $x=p+q\sqrt{-1}$, n'emporte point la conséquence nécessaire que p & q soient réels : par exemple, si x étoit égale à $A+B\sqrt{-1}$, p pourroit être égale à A ou à $B\sqrt{-1}$, & $q=B$, ou $-A\sqrt{-1}$; de sorte que les valeurs de p & de q peuvent être renfermées dans une équation qui ait plus de racines qu'on ne lui en croiroit d'abord, quelques-unes de ces racines étant imaginaires. Mais en ce cas, je demande pourquoi il n'arrive pas la même chose dans les équations du second degré ; car si on a $xx+ax+b=o$, x ayant ses valeurs imaginaires, & qu'on fasse $x=p+q\sqrt{-1}$, on trouvera par une méthode semblable à la précédente, $p=-\frac{a}{2}$, & $q=\sqrt{-\frac{a^2}{4}+b}$; pourquoi ne trouve-t-on pas aussi $p=\sqrt{-b+\frac{a^2}{4}}$,

$p = -\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, $q = \frac{a}{2}\sqrt{-1}$? Les exemples & les raisonnemens précédens suffisent pour prouver que dans cette matiere, on ne doit point admettre sans démonstration toute conséquence, du nombre des racines d'une équation, au degré dont cette équation doit être. Je ne prétends pas pour cela que la proposition supposée par M. de Foncenex, soit fausse; je suis même très-porté à la croire vraie; mais il me semble qu'elle a besoin d'être démontrée.

Fin du sixiéme Mémoire & du Supplément.





SEPTIÉME MÉMOIRE.

Supplément aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Prusse de 1746 & 1748.

DANS ces Mémoires j'ai donné la méthode de réduire à la rectification des Sections coniques, & à la quadrature des courbes du troisiéme genre, un grand nombre de differentielles assez compliquées. Je vais dans cet Ecrit faire l'application de ces méthodes à la quadrature de la surface des cônes obliques; matiere qu'un Géometre très-célébre a déja traitée dans les *Nouv. Mém. de Petersb.* To. I, mais en réduisant la quadrature de cette surface à la rectification d'une ligne du sixiéme ordre.

Avant que d'entrer dans ce détail, je donnerai ici quelques remarques sur les differentielles qui se rapportent à la rectification des Sections coniques, pour simplifier à quelques égards certaines formules de mon Mémoire de 1746.

Je remarquerai donc d'abord que la differentielle $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+bb}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole

ſeule; car cette différentielle (voyez les Mémoires de Berlin de 1746, p. 208 & 209), ſe change (en faiſant $z + \sqrt{zz + bb} = y$) en $-\frac{bbdy}{\sqrt{2}.y\sqrt{y}.\sqrt{yy-bb}}$ $+\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{yy-bb}}$, dont la premiere dépend de la ſeconde, & dont la ſeconde dépend de la rectification de l'hyperbole ſeule.

De-là & des autres formules du même Mémoire, il s'enſuit; 1°. que $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{Azz+B}}$, B & A étant des quantités de ſigne quelconque, pourvû qu'elles ne ſoient pas toutes deux négatives, dépendent de la rectification de l'hyperbole ſeule; 2°. que par conſéquent $z^{+\frac{1}{2} \pm 2f} dz \times (B + Azz)^{\frac{+p}{2}}$, p & f exprimant des nombres entiers quelconques, dépend auſſi de cette ſeule rectification; car on a fait voir dans le Mémoire cité, que cette différentielle dépend de $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{Azz+B}}$. Il en eſt de même de $\frac{z^{\frac{1}{2} \pm 2f} dz}{\sqrt{Azz+B}}$.

A l'égard de $\frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{zz+bb}}$, cette différentielle dépend de la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole; & par conſéquent auſſi $\frac{z^{-\frac{1}{2} \pm 2f}}{\sqrt{zz+bb}}$, & ainſi du reſte; ſur quoi je renvoye au Mémoire déja cité.

On

On peut réduire à la rectification des Sections coniques celle de la premiere Parabole cubique ; car l'Elément de cette Parabole est $dx\sqrt{x^4+1}$, qui dépend de $\frac{dz\sqrt{zz+1}}{\sqrt{z}}$, ou de $\frac{zdz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+1}}+\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{zz+1}}$. Or, comme nous l'avons fait voir dans le Mémoire cité, la premiere de ces différentielles dépend de la seconde, & la seconde de la rectification de l'ellipse & de celle de l'hyperbole. Donc &c. Ainsi la rectification de la premiere Parabole cubique, ne dépend pas de la rectification de l'hyperbole seule, comme le croyoit M. Leibnitz. Voyez les Œuvres de M. Jean Bernoulli, To. 1. p. 137.

J'ai démontré, p. 216 des Mémoires de Berlin 1746, que la différentielle $\frac{du\sqrt{uu+2p'au+aa}}{u\sqrt{u}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole seule, pourvû que $p=\frac{q-1}{q+1}$, q étant le rapport du parametre au premier axe; on tire de cette équation $q=\frac{-p-1}{p-1}$; & comme q doit être positif, & que par conséquent p ne peut pas être supposé d'une valeur quelconque, on voit que l'équation précédente est limitée ; mais il est aisé de s'assurer en général, & par une autre méthode, que $\frac{du\sqrt{uu\pm fu+bb}}{u\sqrt{u}}$ dépend de la rectification de la seule hyperbole. Car il est évident que cette quantité est

$$= \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} \pm \frac{f\,du}{u\sqrt{uu \pm fu + bb}}$$

$+ \frac{bb\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{uu \pm fu + bb}}$; dont l'intégrale est $-$

$$\frac{2\sqrt{uu \pm fu + bb}}{\sqrt{u}} + 2\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}}$$

$\pm \int \frac{f\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{uu \pm fu + bb}}$. Or on trouvera que

$$2\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} \pm \int \frac{f\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{uu \pm fu + bb}}$$

dépend de l'hyperbole seule, parce qu'en faisant les transformations prescrites pag. 206 & 208 des Mémoires de Berlin de 1746, les quantités qui dépendent de la rectification de l'ellipse, se détruiront dans la transformée; car soit, par exemple, $u \pm \frac{f}{2} = z$, $AA = bb - \frac{ff}{4}$, & $z + \sqrt{zz + AA} = y$, on aura pour transformée

$$\frac{2\,dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{yy - AA \mp fy}} - \frac{2\,AA\,dy}{\sqrt{2}.y\sqrt{y}.\sqrt{yy - AA \mp fy}},$$

qui se réduit à la rectification de l'hyperbole &c.

De la surface des Cônes obliques.

Soit E (*fig.* 41.) le sommet d'un cône quelconque, la courbe RAM sa base, $EF = b$ la hauteur du cône, $FP = t$, $PM = y$; ayant mené la tangente MH, & du point F la perpendiculaire FH sur MH, on trouvera que $EH \times \frac{Mm}{2}$ est l'Elément de la surface conique:

donc cet Elément exprimé algébriquement, sera

$$\sqrt{dt^2+dy^2}\times\sqrt{bb+\left(t-\frac{ydt}{dy}\right)^2\frac{dy^2}{dt^2+dy^2}}$$

$=\sqrt{bbdt^2+bbdy^2+\overline{tdy-ydt}^2}$. Cela posé;

Soit la base du cône RAM un cercle dont C soit le centre; $CA=a$, ou $=1$, $CF=c$, $CP=z$; on aura $y=\sqrt{aa-zz}$; $t=c-z$; $-dt=dz$; & l'Elément de la surface conique sera $-\frac{dz\sqrt{bb+\overline{1-cz}^2}}{\sqrt{1-zz}}$. Soit $1-z=u$, & $u=\frac{1}{x}$; & soit de plus $bb+\overline{c-1}^2=A$, $-2cc+2c=B$: on trouvera que l'Elément dont il s'agit est $\frac{-dx\sqrt{cc+Bx+Axx}}{xx\sqrt{2x-1}}$

$$=\frac{-ccdx}{xx\sqrt{2x-1}.\sqrt{cc+Bx+Axx}}-\frac{Bdx}{x\sqrt{2x-1}.\sqrt{cc+Bx+Axx}}-\frac{Adx}{\sqrt{2x-1}.\sqrt{cc+Bx+Axx}}:$$

or $\frac{ccdx}{xx\sqrt{2x-1}.\sqrt{cc+Bx+Axx}}=$ (Mém, Acad. Berl. 1748.) $d[(x^{-1})\sqrt{2x-1}.\sqrt{cc+Bx+Axx}]$

$$+\frac{(2cc-B)dx}{2x\sqrt{2x-1}.\sqrt{cc+Bx+Axx}}-\frac{-2Axdx}{\sqrt{2x-1}.\sqrt{cc+Bx+Axx}}:$$

de-là il est aisé de conclure, comme il est démontré dans les Mémoires de Berlin de 1748, que la quadrature de la surface d'un cône circulaire oblique dépend de la rectification des Sections coniques, & de la quadrature d'une courbe du troisiéme genre, dont l'ordon-

née est $\sqrt{2-u} \times \frac{\sqrt{ccuu+Bu+A}}{\sqrt{u}}$, en supposant $x = \frac{1}{u}$, comme ci-dessus. Or il est aisé de trouver, par une construction Géométrique, l'ordonnée de cette courbe. Car elle sera $\frac{PM}{AP} \times EH$.

COROLLAIRE.

La quadrature de la surface conique ne dépendra plus de celle d'une courbe du troisiéme genre, si $-B+\frac{B}{2}-cc=0$, c'est-à-dire, si $B=-2cc$; or $B=-2cc+2c$; donc $c=0$; ce qui est le cas du cône circulaire droit; en effet l'Elément de la surface devient pour lors $\frac{-dz\sqrt{bb+1}}{\sqrt{1-zz}}$, & se réduit à la rectification du cercle; ce qu'on savoit d'ailleurs: dans tout autre cas la quadrature de la surface conique dépendra de celle d'une courbe du troisiéme genre.

De la Surface d'un Cône qui a pour base une Ellipse.

I.

Soit maintenant *RAM* une ellipse, dont *CA* soit un des demi axes, *C* le centre, *e* le demi axe conjugué à *CA*; on trouvera, par une méthode semblable, que l'Elément de la surface conique est . . . .

$$-\frac{dz\sqrt{bb\left(aa+\frac{ee}{aa}-1.zz\right)+ea-\frac{ecz^2}{a}}}{\sqrt{aa-zz}}.$$

Or en premier lieu si $c=o$, c'est-à-dire, si le cône est droit, l'Elément sera $-\frac{dz\sqrt{(b^2+e^2)a^2+\frac{e^2}{aa}-1.b^2z^2}}{\sqrt{aa-zz}}$.
Cette derniere quantité peut être supposée égale à $-dz\sqrt{b^2+e^2}.\frac{\sqrt{a^2+\frac{\varepsilon^2}{a^2}-1.zz}}{\sqrt{aa-zz}}$, ($\varepsilon$ étant une constante que nous allons déterminer), c'est-à-dire $=$ à $\sqrt{b^2+e^2}$ multiplié par un arc d'ellipse, dont les demi axes sont a & ε. D'où l'on tire $\frac{\varepsilon^2}{a^2}-1=\frac{\frac{e^2b^2}{a^2}-b^2}{bb+ee}$;

& par conséquent $\frac{\varepsilon^2}{a^2}=\frac{\frac{e^2b^2}{a^2}+e^2}{bb+ee}$; donc on aura le second axe ε de l'ellipse, dont la rectification donnera la quadrature de la surface conique.

I I.

Il est visible que la quadrature de la surface conique proposée se réduira à celle du cercle, dans les cas où on pourra faire ensorte que le radical du numérateur soit un quarré; car alors l'Elément sera $-\frac{dz(R+Sz)}{\sqrt{aa-zz}}$; or cela arrivera lorsque $e^4ccaa=(eecc+eebb-aabb)$

$(bbaa + eeaa)$; d'où l'on tire $cc = \frac{(a^2 - e^2)(bb + ee)}{ee}$; & par conséquent la quadrature de la ſurface conique ſe réduira à celle du cercle, lorſque c^2 aura cette valeur, qui eſt évidemment toujours réelle & poſitive, du moins lorſque $e < a$, c'eſt-à-dire, lorſque $2e$ eſt le petit axe de l'ellipſe.

III.

Barrow dans ſes *Lectiones Geometricæ*, a fait voir que la quadrature de la ſurface d'un cône elliptique, ſe réduiſoit à celle du cercle, lorſque ce cône faiſoit partie d'un cône circulaire droit. On en peut voir la démonſtration abrégée à la fin de l'article *Cône* de l'Encyclopédie. Or on peut prouver auſſi que ce cas revient au précédent: car ſoit $DB = b$ (*fig.* 42.), $BC = c$, $FO = 2a$ l'axe de l'ellipſe : ſoit menée la perpendiculaire OG à DF, & ſoit priſe $DH = DO$; enſuite par les points C & F, ſoient tirées SR, FT parallèles à OH; il eſt viſible que ſi l'ellipſe fait portion d'un cône droit, la Section paſſant par SR ſera un cercle, & qu'on aura le quarré du demi axe de l'ellipſe $ee = SC \times CR = \frac{OH \times FT}{4} = \frac{OH^2 \times DF}{4DH} = \frac{OH^2 \times DF}{4DO} = \frac{(OG^2 + \overline{FG - FH}^2) \cdot DF}{4DO} = \left[\frac{FO^2 \cdot DB^2}{DF^2} + \left(\frac{FO \cdot BF}{DF} - DF + DO\right)^2\right] \times \frac{DF}{4DO}$; d'où l'on tire $ee = \frac{aa - bb - cc}{2} + \frac{4aabb - 4a^2c^2 + 2a^4 + 2b^4 + 4b^2c^2 + 2c^4}{4\sqrt{bb + \overline{c+a}^2} \cdot \sqrt{bb + \overline{c-a}^2}}$,

Or le dénominateur de la seconde partie du second membre $= \sqrt{b^4 + 2bbcc + c^4 + 2aabb - 2aacc + a^4}$; par conséquent on aura $ee = \frac{aa - bb - cc}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^4 + 2bbcc + c^4 + 2aabb - 2aacc + a^4}$; or cette valeur de ee seroit précisément celle qu'on tireroit de l'équation ci-dessus $cc = \frac{(aa - ee)(bb + ee)}{ee}$. Donc &c.

I V.

La quadrature de la surface conique, qui a pour base une ellipse, se réduit à la rectification des Sections coniques, lorsque le coëfficient de zz dans le radical du numérateur est $= o$, c'est-à-dire lorsque $\frac{eecc}{aa} + \frac{bbee}{aa} - bb = o$. D'où l'on tire $bb = \frac{eecc}{aa - ee}$.

V.

Dans le cas dont on vient de parler, l'Elément de la surface conique se réduira à $-\frac{dz\sqrt{bbaa + eeaa - 2ce^2z}}{\sqrt{aa - zz}}$; & cet Elément seroit même réductible à la rectification du cercle, si $bbaa + eeaa - 2ce^2z$ étoit un multiple de $a - z$. Or cette condition donne $2ce^2 = bba + eea$; & mettant pour bb sa valeur $\frac{eecc}{aa - ee}$, on trouveroit $2c = \frac{acc}{aa - ee} + a$, ou $cc - 2c\frac{(aa - ee)}{a}$

$= ee - aa$. Or la valeur de $bb = \frac{eecc}{aa - ee}$, demande que a soit $> e$; ainsi soit $aa - ee = paa$, p étant un nombre quelconque plus petit que l'unité, on aura $c = pa \pm a\sqrt{pp - p}$. Donc puisque p est < 1, la valeur de c est imaginaire. Ainsi $bba + eea$ ne peut jamais être égal à $2ce^2$.

VI.

Puisque $bba + eea$ n'est jamais égal à $2ce^2$, on supposera $\frac{bbaa + eeaa}{2ce^2} - z = s$, & $\frac{bbaa + eeaa}{2ce^2} = M$, & la différentielle se changera en $\frac{-ds\sqrt{2ce^2} \cdot \sqrt{s}}{\sqrt{aa - MM + 2Ms - ss}}$; qui dépendra de la rectification de l'ellipse seule, si $aa - MM$ est une quantité négative, c'est-à dire, si $bba + eea > 2ce^2$, & de la rectification de l'hyperbole seule, si $MM < aa$, c'est à dire, si $bba + eea < 2ce^2$. Voyez les Mém. de l'Acad. de Berlin 1746.

VII.

Reprenons maintenant l'équation générale de l'Elément de la surface conique, qui a pour base une ellipse; & nous trouverons encore que cet Elément dépend de la quadrature des Sections coniques, lorsque le radical du dénominateur aura une racine commune avec le radical du numérateur; or on trouve que les deux facteurs du numérateur sont $z - \frac{eecaa}{eecc + e^2b^2 - b^2a^2}$

$\pm a$

$\pm \dfrac{a\sqrt{-eeccbbaa+(a^2b^2-e^2b^2)(bbaa+e^2a^2)}}{eecc+eebb-b^2a^2}$;
& ceux du dénominateur sont $a-z$ & $z+a$; on aura donc pour l'équation de condition $\dfrac{\mp eecaa}{eecc+e^2b^2-b^2a^2}$
$\pm \dfrac{a\sqrt{-eeccbbaa+(a^2b^2-e^2b^2)(bbaa+e^2a^2)}}{eecc+eebb-b^2a^2} = \pm a$;
d'où l'on tire $(eecc+eebb-bbaa-eeca)^2 = -eeccbbaa = (a^2b^2-e^2b^2)\times(bbaa+eeaa)$, ou $e^2(b^4+c^4+bbaa+ccaa-2bbca-2c^3a+2ccbb) - b^4a^2 - ccbbaa - a^4b^2 + 2bbca^3 = 0$. Donc $e^2 = \dfrac{bbaa(bb+\overline{c-a}^2)}{\overline{cc-ca}^2+bb(bb+cc+\overline{c-a}^2)}$. Il est facile de voir dans cette équation que $(bb+\overline{c-a}^2)$ est plus petit que le dénominateur; & qu'ainsi e^2 sera $< a^2$, c'est-à-dire que $2a$ sera le grand axe de l'ellipse.

VIII.

Si dans l'expression de l'Elément de la surface conique, on suppose, comme ci-dessus, $1-z=u$, & $u=\dfrac{1}{x}$, on trouvera, comme dans le cas de la surface conique circulaire, que la quadrature de la surface conique elliptique dépend de la rectification des Sections coniques, & de la quadrature d'une courbe du troisiéme genre; l'Elément sera, en prenant u pour variable, $\dfrac{du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{2-u}} \times \sqrt{bb(1+ee-\overline{1}.\overline{1-u}^2)+\overline{e-ec+cu}^2}$;

or ſoit $bb + \overline{e - ec}^2 = A$, $-2bb(ee-1) + 2c(e-ec) = B$, & $bb(ee-1) + cc = CC$, on aura pour l'ordonnée de la courbe du troiſiéme genre $\sqrt{CCuu + Bu + A} \times \frac{\sqrt{2-u}}{\sqrt{u}}$. La quadrature de la ſurface conique ne dépendra plus de celle de cette courbe, ſi $B = -2CC$, c'eſt-à-dire, ſi $-2cc = 2ce - 2cce$, ou, ce qui revient au même, ſi $c = \frac{e}{e-1}$. D'où l'on voit que e doit être > 1, c'eſt-à-dire, que e doit être le demi grand axe de l'ellipſe, & qu'outre cela, on doit avoir $c : a :: e : e - a$.

I X.

Si l'on fait $u = \frac{1}{x}$, on trouvera que la partie qui dépend de la rectification des Sections coniques, eſt

$$-\frac{Adx}{\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{CC + Bx + Axx}} + \frac{2Axdx}{\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{CC + Bx + Axx}};$$

ſoit $2x - 1 = t$, & ces deux quantités deviendront

$$\frac{Adt\sqrt{t}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{CC + \frac{Bt}{2} + \frac{Att}{4} + \frac{B}{2} + \frac{A}{4} + \frac{At}{2}}};$$

qui dépend de la rectification de l'hyperbole ſeule, ſi $\frac{B}{2} + \frac{A}{4} + CC$ eſt une quantité négative, ou ſi $Bt + At = 0$, c'eſt-à-dire, ſi $B = -A$; & ainſi du reſte.

X.

Juſqu'ici nous avons ſuppoſé que la perpendiculaire

EF tomboit sur un point *F* de l'axe *CF* prolongé. Mais si le point *F* où tombe la perpendiculaire, n'étoit pas dans l'axe, alors menant par ce point *F* une ligne *FC* (*fig.* 43.) parallèle à l'axe, & menant du centre *G* de l'ellipse une ligne *GC* perpendiculaire à *FC*, qui rencontre cette ligne *FC* en *C*, on aura, en conservant les mêmes noms que ci-dessus, l'Elément de la surface conique égal à une quantité de cette forme $-\frac{dz\sqrt{A+Bzz+Cz+L\sqrt{1-zz}\,(1+Rz)}}{\sqrt{1-zz}}$ quantité qui peut se simplifier en différentes occasions. Par exemple, si c étoit $=o$, c'est-à-dire, si le point *F* tomboit sur le point *C*, l'Elément seroit alors de cette forme $\frac{-dz}{\sqrt{aa-zz}}\times\sqrt{A+Bzz+L\sqrt{aa-zz}}$; or en faisant $\sqrt{aa-zz}=u$, cette quantité devient de la forme $\frac{du}{\sqrt{aa-uu}}\times\sqrt{K+Lu^2+Mu}$, qui dépend aussi de la rectification des Sections coniques & de la quadrature d'une courbe du troisiéme genre; comme on le voit aisément en faisant $a=1$, $1-u=s$, & $s=\frac{1}{q}$, & en employant une méthode semblable à celle dont nous nous sommes servis pour trouver la surface d'un cône circulaire oblique. Mais en voilà assez sur cette matiere.

Fin du septiéme Mémoire.



ADDITION

Au Mémoire précédent.

EN ouvrant les Mémoires de Berlin de 1756, je trouve un savant Ecrit de M. Euler, qui a pour titre, *Exposition de quelques Paradoxes sur le Calcul intégral.* Le premier de ces Paradoxes consiste dans certaines équations différentielles, dont on trouve l'intégrale en les différentiant de nouveau. Si on jette les yeux sur les équations que M. Euler apporte en exemple de ce Paradoxe, on verra facilement qu'en faisant $\frac{dx}{dy} = z$; elles peuvent être toutes renfermées sous la forme générale $x - yz = \Delta z$, Δz désignant une fonction quelconque de z ou de $\frac{dx}{dy}$. Or j'avois déja fait cette curieuse remarque (à la vérité en peu de mots) dans les Mémoires de Berlin 1748, p. 276, Art. XXVIII. Voici ce que j'ai dit dans ces Mémoires. Si $x = yz + \Delta z$, *l'équation appartient en même-tems à une ligne droite & à une ligne courbe. Car la différentiation donne* $(y + \Gamma z)\, dz = 0$; *d'où l'on tire, ou bien* $dz = 0$, *qui appartient à une ligne droite, ou bien* $y = - \Gamma z$, *qui est à une ligne courbe.*

On voit donc que dès 1748 (& même dès 1747, comme le prouve la date du Mémoire), j'avois considéré les

équations dont il eſt queſtion, & dont la propriété eſt d'appartenir en même-tems à une ligne droite & à une ligne courbe, & d'être intégrées par la différentiation. Je ne prétends point au reſte diſputer à M. Euler l'avantage d'avoir auſſi fait cette remarque, qui vraiſemblablement lui avoit échappé dans mon Mémoire de 1748; puiſqu'il ne l'a point cité. Mais comme ce grand Géometre l'a jugée digne d'être expoſée en détail dans un Mémoire exprès, je crois pouvoir obſerver que je ſuis le premier qui l'aye faite. A l'égard des autres paradoxes dont il eſt queſtion dans le ſavant Mémoire de M. Euler, je lui dois la juſtice que perſonne ne les avoit remarqués avant lui.

Fin du ſeptiéme Mémoire & de l'Addition.





HUITIÉME MÉMOIRE.

Remarques sur quelques questions concernant l'attraction.

I.

J'AI dit dans mes *Recherches sur la cause générale des Vents*, Art. 31, p. 42, que si la Terre eût été un sphéroïde allongé, il n'eût pas été nécessaire d'avoir recours, pour expliquer ce phénomene, comme l'ont fait quelques Auteurs, à un noyau intérieur allongé; & qu'il auroit pû se faire qu'avec un noyau intérieur applati, la Terre eût été allongée vers les pôles. Cette vérité est une suite nécessaire & immédiate des formules que j'ai données au même endroit que je viens de citer. Cependant un Géometre Italien, qui a du nom dans les Mathématiques, l'a attaquée par cette considération, que si le noyau intérieur étoit applati, & qu'on dérangeât le fluide extérieur de son état d'équilibre, il n'y reviendroit jamais, au lieu qu'il y reviendroit de lui-même, si le noyau intérieur étoit allongé; d'où il conclud que

cette derniere hypothèſe eſt la ſeule propre à rendre raiſon de l'équilibre.

Je pourrois d'abord répondre que dans toutes les recherches qu'on a faites juſqu'ici ſur la *Figure de la Terre*, il n'a jamais été queſtion que de l'état d'équilibre ; & que juſqu'à ce Géometre, on n'avoit point encore penſé à y ajouter cette condition, que le fluide dérangé de cet état, ſe rétablît de lui-même. Ainſi, en partant de la maniere ordinaire d'enviſager cette queſtion, je ne devois point, ou du moins je n'étois pas obligé à faire entrer cette conſidération nouvelle dans mon calcul. Cependant, à l'exemple du Géometre dont je viens de parler, je vais y avoir égard, & je prouverai qu'il n'eſt pas néceſſaire, dans cette hypothèſe même, que le ſphéroïde intérieur ſoit allongé, pour que la Terre le ſoit.

Pour ne point répéter ce que j'ai dit ailleurs, je conſerverai les mêmes noms que dans l'art. 31 déja cité des *Recherches ſur les Vents* ; j'appellerai r le rayon du ſphéroïde tant intérieur qu'extérieur, parce qu'on ſuppoſe que le fluide qui couvre le noyau intérieur, ait très-peu de hauteur par rapport au rayon de ce noyau ; α' la différence des axes du noyau, α celle du ſphéroïde extérieur, ϕ la force centrifuge à l'équateur, p la peſanteur, Δ la denſité du noyau, & δ celle du fluide ; & on aura dans le cas de l'équilibre $\frac{\phi r}{2p} + \frac{3\delta\alpha + 3\alpha'(\Delta - \delta)}{5\Delta} - \alpha = 0$.

Si cette quantité, au lieu d'être $= 0$, eſt poſitive ou

négative, c'est-à-dire, si la force perpendiculaire au rayon osculateur, & par conséquent tangente à la courbe, n'est pas nulle, alors il n'y aura point d'équilibre; & le fluide ne pourra subsister dans cet état, & cherchera nécessairement à en prendre un autre, c'est-à-dire à s'applatir ou à s'allonger. Si la quantité dont il s'agit, est positive, c'est-à-dire, si la force tangentielle est dirigée des pôles vers l'équateur, le fluide tendra à s'applatir davantage, ou à s'allonger moins; si au contraire la quantité est négative, c'est-à-dire, si la force tangente à la courbe est dirigée de l'équateur vers les pôles, le fluide tendra à s'applatir moins ou à s'allonger davantage.

Or, pour que l'état d'équilibre soit tel, que si on dérange le fluide de cet état, il le reprenne de lui-même, il faut; 1°. que si le fluide est allongé & en équilibre, & qu'on le suppose moins allongé, la force qui dans le cas d'équilibre étoit zéro, soit négative dans le cas d'un moindre allongement; c'est-à-dire, que cette force soit dirigée de l'équateur vers les pôles. Car alors cette force (suivant ce qui vient d'être dit) tendra à remettre le fluide dans un état de plus grand allongement, & par conséquent dans l'état qu'il avoit, lorsqu'il étoit en équilibre. 2°. Il faut au contraire que si le fluide est plus allongé que dans l'état d'équilibre, la force qui étoit $=0$ dans le cas d'équilibre, soit positive dans le nouvel état d'allongement, c'est-à-dire, dirigée des pôles vers l'équateur, & tendante à diminuer l'allongement du sphéroïde, & à le remettre dans son état d'équilibre. 3°. Par la

la même raiſon, ſi le fluide eſt applati, dans le cas d'équilibre, il faut que la force dont il s'agit, ſoit négative dans le cas d'un plus grand applatiſſement, & poſitive dans le cas d'un applatiſſement moindre.

Donc en général, α' étant la différence des axes dans le noyau intérieur, & cette quantité étant poſitive ou négative, mais invariable, ſi nous ſuppoſons que α ſoit la différence des axes du ſphéroïde extérieur, dans le cas d'équilibre, laquelle ſoit auſſi poſitive ou négative, ſelon que le ſphéroïde extérieur ſera applati ou allongé; imaginons que cette différence devienne $\alpha + \rho$; enſorte que le fluide, par quelque cauſe que ce ſoit, devienne plus ou moins applati, ou bien (ce qui eſt la même choſe) moins ou plus allongé, ſavoir plus applati ou moins allongé, ſi ρ eſt poſitif, & moins applati ou plus allongé, ſi ρ eſt négatif; on aura; 1°. puiſque le fluide eſt en équilibre dans le cas où la différence des axes eſt α, l'équation $\frac{\phi r}{2p} + \frac{3\delta\alpha + 3\alpha'(\Delta - \delta)}{5\Delta} - \alpha = 0$.

2°. Dans le cas où $\alpha + \rho$ ſera la différence des axes, on aura en ſubſtituant $\alpha + \rho$, au lieu de α dans l'expreſſion précédente, une quantité qui devra être négative, ſi ρ eſt poſitif, & poſitive, ſi ρ eſt négatif, de quelque ſigne que ſoit d'ailleurs α; c'eſt-à-dire que $\frac{3\delta\rho}{5\Delta} - \rho$ doit être négative ſi ρ eſt poſitif, & poſitive ſi ρ eſt négatif. Donc 3δ doit être $< 5\Delta$.

Donc, pour que le fluide reprenne de lui-même ſon

état d'équilibre, il n'eſt point néceſſaire que le noyau intérieur ſoit allongé dans le cas où le fluide ſupérieur le ſeroit lui-même, il ſuffit que la denſité du fluide ſoit plus petite que $\frac{5}{3}$ de celle du noyau.

I I.

Une nouvelle conſidération va achever de mettre dans le plus grand jour ce que nous venons de dire. Nous avons démontré, p. 43 des *Recherches ſur la cauſe générale des Vents*, que ſi on fait $5\Delta = 3\delta - f$, on aura $\alpha = \frac{\frac{\phi r}{2p} - \frac{\alpha'}{5}\left(2 + \frac{f}{\Delta}\right)}{\frac{-f}{5\Delta}}$. D'où l'on voit que ſi le fluide eſt en repos, & ne tourne pas, c'eſt-à-dire, ſi la force centrifuge ϕ eſt nulle, on aura $\alpha = \frac{\alpha'(2\Delta + f)}{f}$. Suppoſons à préſent que le fluide tourne; il eſt évident que cette rotation doit tendre à l'applatir davantage ou à l'allonger moins; donc $\frac{\phi r . 5\Delta}{-2pf}$ doit être une quantité poſitive, de quelque ſigne que ſoit d'ailleurs la quantité $\frac{\alpha'(2\Delta + f)}{f}$ qui exprime la différence des axes dans le cas de $\phi = o$. Donc f doit être négative, c'eſt-à-dire, que 5Δ doit être plus grand que 3δ; préciſément comme on l'a vû ci-deſſus.

Si le noyau intérieur étoit allongé, enſorte que α' fût négatif, & ſi de plus f étoit poſitif, c'eſt-à-dire, que 5Δ

fût plus petit que $3\,\delta$, alors ϕ étant $= o$, le ſphéroïde extérieur ſeroit allongé, puiſqu'alors $\frac{\alpha'(2\Delta+f)}{f}$ ſeroit négatif ; mais ſi on ſuppoſe qu'en cet état d'équilibre, le ſphéroïde vienne à tourner, il tendra à devenir moins allongé par la rotation ; au lieu qu'il doit l'être davantage pour qu'il y ait équilibre, puiſque f étant poſitif, la quantité $\frac{\phi r.5\Delta}{-2pf}$ eſt négative.

Ainſi, dans le cas où la Terre ſeroit un ſphéroïde allongé, l'hypothèſe d'un noyau intérieur ſolide & allongé ne ſeroit pas plus avantageuſe pour expliquer cet allongement, que celle d'un noyau intérieur ſolide & applati, ſi f étoit poſitive, c'eſt-à-dire, ſi $5\,\Delta$ étoit $< 3\,\delta$.

Ce n'eſt donc point la figure du noyau intérieur, comme le Mathématicien dont nous avons parlé ſemble l'avoir cru, qui empêche que l'équilibre troublé ne ſe rétabliſſe, ou qui contribue à le rétablir ; c'eſt le rapport de la denſité du fluide extérieur à la denſité du noyau ; ſi la denſité δ du fluide eſt $< \frac{5}{3}$ de la denſité Δ du noyau, l'équilibre dérangé ſe rétablira de lui-même ; ſi elle eſt plus grande, l'équilibre une fois dérangé ne pourra ſe rétablir.

Cet équilibre ſe rétablira donc, quand même la denſité δ du fluide ſupérieur ſeroit plus grande que celle du noyau, pourvû qu'elle fût $< \frac{5}{3}$ de cette denſité du

noyau. Il eſt vrai que la plûpart de ceux qui ont traité de la figure de la Terre, ont ſuppoſé que δ devoit toujours être $< \Delta$, les couches les plus voiſines du centre, devant ſelon eux, être les plus denſes. Mais cela n'eſt nullement néceſſaire. Voyez mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde, Troiſiéme Partie*, p. 187 & 188.

I I I.

Dans le même Ouvrage déja cité, *ſur la cauſe générale des Vents*, il s'eſt gliſſé une erreur de calcul qui n'influe en rien ſur le reſte de la Diſſertation ; mais qui étant corrigée, donne lieu à un réſultat curieux & important. Je ſuppoſe ici, pour ne point me répéter, qu'on ait l'Ouvrage devant les yeux ; il faudra réformer ainſi la fin de la page 155, & le commencement de la ſuivante. » Si » on fait tourner l'ellipſe *O M T* (*fig.* 44.) ſur *O C*, » le plan *M C Z* demeurant immobile ; *C T* deviendra » $r - \alpha \frac{-\epsilon A'^2 - 2\epsilon A' d A'}{rr}$, & z ne changera que » d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre ; d'où » il s'enſuit que *C M* dans ſa premiere poſition étant » $r + (\alpha + \frac{\epsilon A'^2}{rr}) \frac{zz - rr}{rr}$, elle ſera dans ſa » ſeconde poſition $r + (\alpha + \frac{\epsilon A'^2}{rr} + \frac{2\epsilon A' d A'}{rr})$ » $(\frac{zz - rr}{rr})$; enfin l'angle entre la ligne *C M* dans ſa » premiere poſition, & la ligne *C M* dans ſa poſition nou-

» velle, sera à l'angle $\frac{r\,d\,A'}{\sqrt{rr - A'A'}} :: \sqrt{rr - zz} : r$; de-là
» il s'ensuit que $k' = \frac{2\,\epsilon\,A'\,d\,A'\,(rr - zz)}{r^4}$ divisé par
» $\frac{d\,A'\sqrt{rr - zz}}{\sqrt{rr - A'A'}} = \frac{2\,\epsilon\,A'\sqrt{rr - A'A'}}{r^3} \times \frac{\sqrt{rr - zz}}{r}$.
Donc k' n'est pas égal à $\frac{6\,\epsilon\,A'\sqrt{rr - A'A'}}{5\,rr} \times \frac{\sqrt{rr - zz}}{r^2}$.
» Ainsi un sphéroïde qui n'est pas un solide de révolu-
» tion, & qui est par-tout de la même densité, ne sau-
» roit être en équilibre.

» Si le solide proposé n'est pas par-tout de la même
» densité, mais qu'il renferme un noyau dont C soit le
» centre, & dont les rayons r', $r' - \alpha'$, $r' - \alpha' - \epsilon'$
» soient peu différens des rayons correspondans CO, CK,
» CY; alors nommant p la force ou pesanteur en M
» suivant MC, & Δ la densité du noyau intérieur, on
» aura $p =$ à peu près $\frac{4\,n\,\Delta\,r}{3}$; & on trouvera que la
» force perpendiculaire au rayon CM, dans le plan
» $OMTC$, est $\left(\frac{4\,n\,\delta\,r}{3} \times \left[\frac{6\,\alpha}{5\,r} + \frac{6\,\epsilon\,A'^2}{5\,r^3}\right]\right.$
» $\left. + \left[\frac{4\,n\,\Delta\,r - 4\,n\,\delta\,r}{3}\right] \times \left[\frac{6\,\alpha'}{5\,r} + \frac{6\,\epsilon'\,A'^2}{5\,r^3}\right]\right) \times$
» $\frac{z\sqrt{rr - zz}}{rr}$; or le rapport de cette force à la force
» p sera égal à k, si $\delta\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\epsilon\,A'^2}{r^3}\right) + (\Delta - \delta)$
» $\left(\frac{\alpha'}{r} + \frac{\epsilon'\,A'^2}{r^3}\right) = \frac{5\,\Delta}{3}\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\epsilon\,A'^2}{r^3}\right)$:

» & comme cette équation doit avoir lieu, quel que » soit A', il s'ensuit que cette équation donne séparément » les deux suivantes ; 1°. $\frac{\delta\alpha}{r} + (\Delta - \delta)\frac{\alpha'}{r} = \frac{5\Delta\alpha}{3r}$, » ou $\alpha = \frac{(\Delta - \delta)\alpha'}{\frac{5\Delta}{3} - \delta}$; 2°. $\frac{\delta\beta}{r^3} + (\Delta - \delta)\frac{\beta'}{r^3}$ » $= \frac{5\Delta\beta}{3r^3}$, ou $\beta = \frac{(\Delta - \delta)\beta'}{\frac{5\Delta}{3} - \delta}$. A l'égard de la force » perpendiculaire à CM dans le plan MCZ, elle sera » $\frac{6A'\sqrt{rr - A'A'}.\sqrt{rr - zz}}{5r^3} \times \left[\frac{4n\delta r}{3} \times \beta + \right.$ » $\left.\frac{(4n\Delta r - 4n\delta r)}{3} \times \beta'\right]$; & le rapport de cette » force à p sera égal à k', si $\frac{\sqrt{rr - zz}}{5r} \times \left[\frac{\delta\beta + (\Delta - \delta)\beta'}{\Delta}\right]$ » est égal à $\frac{\beta\sqrt{rr - zz}}{3r}$; d'où l'on tire $\beta = \frac{(\Delta - \delta)\beta'}{\frac{5\Delta}{3} - \delta}$; » équation que la premiere condition a déja donnée.

» Ainsi, pour que le sphéroïde soit en équilibre en » vertu de la seule attraction de ses parties, ce sphéroïde » n'étant pas d'ailleurs un solide de révolution, il faut ; » 1°. que $\frac{\alpha}{\alpha'}$ soit $= \frac{\beta}{\beta'}$, c'est-à-dire que le noyau » & le sphéroïde soient semblables ; 2°. que $\frac{\alpha}{\alpha'} =$ » $\frac{3\Delta - 3\delta}{5\Delta - 3\delta}$. On voit aussi que si α' & β' sont égaux à » zéro, c'est-à-dire si le noyau intérieur est sphérique, &

» que de plus $5\Delta = 3\delta$, α & β pourront être tout ce » qu'on voudra, pourvû qu'on les suppose très-petits. » Dans ce seul cas le sphéroïde extérieur pourra être de » telle figure qu'on voudra, pourvû qu'il différe peu d'une » sphère ; & c'est le seul cas où il ne doit pas être sem- » blable au noyau intérieur.

I V.

» Si le sphéroïde tourne autour de l'axe OC, il en ré- » sultera une force suivant $VM = \frac{\phi . VM}{CK}$, ϕ étant la » force centrifuge en K ; & comme on suppose ϕ très- » petite par rapport à p, cette force suivant VM sera $=$ » $\frac{\phi\sqrt{rr - zz}}{r}$; & la force perpendiculaire au rayon » CM dans le plan $OMTC$ devra être diminuée de la » quantité $\frac{\phi z\sqrt{rr - zz}}{rr}$. Quant à la force perpendi- » culaire à CM dans le plan MCZ, elle ne recevra » aucune altération ; ainsi il n'y aura d'autres change- » mens à faire dans les calculs précédens, que de trans- » former l'équation $\frac{\delta\alpha}{r} + (\Delta - \delta)\frac{\alpha'}{r} = \frac{5\Delta\alpha}{3r}$, » en celle-ci $-\frac{5\phi\Delta}{6p} + \frac{\delta\alpha}{r} + (\Delta - \delta)\frac{\alpha'}{r}$ » $= \frac{5\Delta\alpha}{3r}$, ou $\alpha = \frac{-\frac{\phi r}{2p} + \frac{3\alpha'(\Delta - \delta)}{5\Delta}}{1 - \frac{3\Delta}{5\Delta}}$; à

» l'égard de la valeur de $\frac{\beta}{\beta'}$, elle ſera la même que
» dans l'Art. précédent, ſavoir $\frac{\Delta - \delta}{\frac{5\Delta}{3} - \delta}$; mais elle
» ne ſera plus égale à $\frac{\alpha}{\alpha'}$.

Il eſt donc évident; 1°. que l'on peut avoir (même en ſuppoſant un mouvement de rotation) un ſphéroïde dont les coupes par l'axe ne ſoient, ni ſemblables, ni égales, & qui ſoit néanmoins en équilibre, pourvû qu'il y ait au centre un noyau, dont la denſité ſoit différente de celle de la ſurface; 2°. que dans ce ſphéroïde la quantité β dépendra de la ſeule quantité β', & la quantité α de la ſeule quantité α', ſans que α dépende de β', ni β de α'; 3°. que la valeur de α ſera la même que ſi β' étoit $= o$, c'eſt-à-dire, ſi le noyau intérieur étoit ſphérique. Car cette valeur eſt la même que la valeur $\frac{\frac{\Phi r}{2p} + \frac{3\alpha'}{5}\left(\frac{\Delta - \delta}{\Delta}\right)}{1 - \frac{3\delta}{5\Delta}}$ qu'on a trouvé p. 42 de l'Ouvrage cité pour le cas d'un noyau ſphérique. La ſeule différence vient de ce que dans l'endroit cité, on regardoit α & α' comme poſitives, c'eſt-à-dire le ſphéroïde & le noyau comme applatis; au lieu qu'ici on regarde le ſphéroïde & le noyau comme allongés; & par conſéquent α & α' comme négatives.

Ainſi la diſſimilitude des méridiens n'empêcheroit point que

que la direction des graves ne pût être perpendiculaire à la surface de la Terre en un point quelconque. Nous avons fait voir de plus dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1754, que cette dissimilitude ne nuisoit point non plus aux phénomenes de la *Précession des Equinoxes*. Nous avons enfin prouvé dans la troisiéme Partie de nos *Recherches sur le systême du Monde*, que les observations ne fournissent pas des argumens suffisans en faveur de la similitude parfaite des méridiens. Donc la dissimilitude des méridiens de la Terre n'est jusqu'ici prouvée, ni par la théorie, ni par les observations.

V.

Dans l'Art. *Gravitation* de l'Encyclopédie, & dans la troisiéme Partie de mes *Recherches sur le systême du Monde*, p. 198 & 199, j'ai remarqué qu'un point placé sur une surface sphérique, éprouve de la part de cette surface, une attraction qui n'est que la moitié de celle qu'éprouveroit ce même point, placé au-delà de cette même surface à une si petite distance qu'on voudroit, pourvû que cette distance ne fût pas $= o$. J'ai essayé dans les mêmes endroits cités, & sur-tout dans l'Art. *Gravitation*, de rendre raison de ce paradoxe, en analysant & en décomposant, pour ainsi dire, le calcul par lequel on trouve la gravitation d'un point vers une surface sphérique. A cette analyse j'ajouterai ici quelques réfléxions.

Soit A (*fig.* 45.) le point attiré, $BC = r$ le rayon de la surface attirante, $AB = n$, $BM = x$, π le rapport de la demi-circonférence au rayon; la différentielle de l'attraction sera $\frac{2\pi r x (n + x)\, dx}{(nn + 2nx + 2rx)^{\frac{3}{2}}}$; cette différentielle est composée de deux parties, savoir $\frac{2\pi r n\, dx}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{2\pi r x\, dx}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}}$. Or il est d'abord évident, que quand $n = o$, la premiere différentielle s'évanouit, & que si n n'est pas $= o$, l'intégrale de cette premiere différentielle est $\frac{2\pi r n}{n + r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{nn + 2nx + 2rx}}\right)$, laquelle (en supposant n infiniment plus petite que r) se réduit à $\frac{2\pi r n}{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{nn + 2nx + 2rx}}\right)$ $= 2\pi AB \times \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AN}\right)$: & si le point N tombe en D, l'intégrale deviendra $2\pi AB \times \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}\right)$, qui se réduit à 2π, parce que $\frac{1}{AD}$ peut être négligé par rapport à $\frac{1}{AB}$. On voit donc comment une différentielle qui est $= o$ aussi-bien que son intégrale, lorsque $n = o$, peut devenir finie, en supposant n si petite qu'on voudra, pourvû qu'elle ne soit pas $= o$. J'avois déja fait cette remarque dans l'art. *Gravitation* de l'Encyclopédie; & M. de la Grange l'a faite aussi depuis dans le premier Volume des *Mémoires de l'Académie des Scien-*

ces de Turin. M. de la Grange remarque de plus, avec raison, que si AB est négatif, l'intégrale qui étoit 2π dans le cas de AB positif, devient alors $= -2\pi$. Ainsi voilà une quantité Algébrique qui, dans le cas de n positive, & si petite qu'on voudra, est $= 2\pi$, qui dans le cas de $n = o$ est $= o$, & qui dans le cas de n négative & si petite qu'on voudra, devient $= -2\pi$.

Pour adoucir (si je puis parler ainsi) cette espèce de paradoxe, d'une quantité qui s'évanouit tout-à-coup sans avoir passé auparavant par des diminutions successives, j'avois apporté dans *mes Recherches sur le système du Monde*, p. 199, III. Partie, l'exemple de la courbe $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(x+b)}$, qui, comme M. Euler l'a remarqué, perd subitement un diametre lorsque $b = o$. M. de la Grange m'objecte que cet exemple n'est pas analogue au précédent, parce que dans le cas de $b = o$, la courbe est composée d'un système de deux courbes différentes, lequel système conserve un diametre. J'en conviens, & je ne l'ignorois pas; aussi n'ai-je apporté cet exemple que pour montrer que ce qu'on appelle la *Loi de continuité* (dans quelque sens qu'on prenne ce mot) ne s'observe pas toujours dans les quantités Algébriques. Car il est d'ailleurs facile d'apporter un exemple plus direct, & plus analogue à celui dont il s'agit. Soit AC (*fig.* 46.) un quarré dont le côté $AB = b$; & soit $AE = n$, & $AF = \frac{bb}{n}$; il est clair que tant que AE ne sera pas $= o$ absolu, la surface $AEGF$ sera $= bb$;

mais quand $AE = o$, il n'y aura plus de ſurface, & $AEGF$ ſera $= o$; la ſurface ſe réduiſant alors à une ligne droite.

Cette derniere maniere d'expliquer le paradoxe en queſtion, me paroît, ſi je l'oſe dire, plus lumineuſe & plus ſimple que celle de M. de la Grange, qui mérite que je m'y arrête un moment. La différence finie entre les attractions, lorſque $n = o$, & lorſque n eſt finie & ſi petite qu'on voudra, dépend » ſelon lui, du point de » la ſurface B (*fig.* 45.) qui exerce une force finie, & » $= 2\,\pi$ ſur le point A, lorſque l'on fait évanouir leur » diſtance AB. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à réflé- » chir qu'un point de ſurface eſt néceſſairement un infi- » niment petit du ſecond ordre, & que la fonction AB^2 » de la diſtance évanouiſſante devient auſſi infiniment » petite du même ordre; d'où il s'enſuit que l'attraction » du point A (qui eſt proportionnelle à ce point diviſé » par la fraction donnée) deviendra finie, & on peut s'aſ- » ſurer d'ailleurs que cette attraction ſera $= 2\,\pi$. Ceci » poſé, quand on fait venir le point A à la ſurface de » dehors, on a l'attraction $= 4\,\pi$, qui eſt compoſée de » l'attraction $2\,\pi$ du point A, & de l'autre partie $2\,\pi$ qui » doit néceſſairement exprimer l'attraction du reſte de la » ſurface. Mais ſi l'on fait que le point A vienne toucher » la ſurface au-dedans, alors l'attraction $2\,\pi$ du point A » devra agir en ſens contraire, & jointe avec l'autre » partie $2\,\pi$ qui agit dans le même ſens qu'auparavant, » donnera $2\,\pi - 2\,\pi = o$ pour l'attraction dans ce cas;

» enfin si le point est d'abord placé sur la surface en B, » on exclut dans ce cas l'attraction du point de surface » B, & on a seulement 2π pour l'attraction totale, » comme le donne le calcul «.

1°. Je n'entends pas la distinction que veut mettre M. de la Grange, entre un point qui *touche une surface en dehors*, un point qui est *placé sur cette surface*, & un point *qui la touche en-dedans*. Car, comme une surface n'a point de largeur, un point qui coincide avec une surface, ne la touche proprement ni *en-dedans*, ni *en-dehors*, ou, si l'on veut, la touche en-dedans & en-dehors tout-à-la-fois; & un point qui ne coincide pas avec la surface, ne la touche point. Cette notion de la surface est adoptée de tous ceux qui connoissent les Elémens de Géométrie, & je ne vois point ce qu'on peut y opposer.

2°. Si par les mots de *toucher en dedans* ou *en-dehors*, M. de la Grange veut dire, être placé à une distance infiniment petite en-dedans ou en-dehors, alors l'expression s'entend; mais je ne conviens pas de ce que prétend l'Auteur, que le point de surface B, qui est *nécessairement un infiniment petit du second ordre*, exerce sur le point A une attraction finie & $= 2\pi$. Car 1°. pourquoi faut-il *nécessairement* regarder le point B de la surface comme un infiniment petit du second ordre? Ce point B n'est qu'un point sans étendue, incomparable en lui-même à quelque surface que ce soit. 2°. Si au lieu du point B on substitue en effet une surface circulaire, réellement infiniment petite du second ordre, dont l'abs-

ciſſe ſoit BL, & le rayon BO, on trouvera facilement (voyez l'Article GRAVITATION de l'Encyclopédie), que l'attraction de cette ſurface eſt $\frac{2\pi r(nn+nr)}{(2n+2r)^2}$ $\times\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right)+2\pi r\times$ $\left(\frac{2\sqrt{nn+2nx+2rx}-2n}{(2n+2r)^2}\right)$, qui ſe réduit (à cauſe de n infiniment petite) à $2\pi n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right)$ $+\frac{\pi}{r}\times(\sqrt{nn+2nx+2rx}-n)$, ou $2\pi-\frac{2\pi.AB}{AO}$ $+\frac{\pi(AO-AB)}{r}=2\pi-\frac{2\pi.AB}{AO}$, parce que $\frac{\pi.(AO-AB)}{r}$ eſt infiniment petit. Or cette quantité $2\pi-\frac{2\pi.AB}{AO}$ n'eſt $=2\pi$ que dans le cas où AO eſt infiniment grande par rapport à AB, parce que le terme $\frac{2\pi.AB}{AO}$ s'évanouit alors ; & il faut pour cela que BO ſoit infiniment grande par rapport à AB. Donc quand même on regarderoit le point de ſurface B comme une ſurface infiniment petite du ſecond ordre, on n'en ſeroit pas en droit de conclure que l'attraction de ce point ſur le point A eſt $=2\pi$.

M. de la Grange ſe ſeroit exprimé, ce me ſemble, plus exactement, s'il avoit dit, que tirant du point A la tangente AF, l'attraction de la portion de ſurface formée par l'arc BF eſt $2\pi-\frac{2\pi.AB}{AF}+\frac{\pi(AF-AB)}{r}$,

qui se réduit (dans le cas où AB est infiniment petite du second ordre) à 2π, parce qu'alors non-seulement AB & AF sont nulles par rapport à r, mais encore AB est nulle par rapport à AF. Ainsi tant que AB n'est pas $= o$ absolu, l'attraction de la surface formée par BF, est finie & $= 2\pi$; mais lorsque $AB = o$, cette surface & son attraction sur le point A s'évanouissent.

On peut encore considérer que la même surface BF qui exerce sur le point A une attraction finie, lorsque AB est infiniment petite du second ordre, n'exerce plus sur ce même point qu'une attraction infiniment petite, lorsque $AB = o$, BF restant toujours la même & infiniment petite. Le calcul en est facile à faire ; & on trouvera que l'attraction est $\frac{\pi . BF}{r}$. Ce résultat n'a rien de surprenant; car en regardant BF comme une ligne droite, & la surface qui en est formée, comme plane, l'attraction que souffre le centre B, seroit absolument nulle; mais la petite courbure de la surface fait que cette attraction est $\frac{\pi . BF}{r}$.

On peut remarquer en passant, que si on regarde BF comme infiniment petite du premier ordre, & par conséquent la surface engendrée par BF comme infiniment petite du second ordre, AB^2 sera infiniment petite du quatriéme; de sorte que, suivant le raisonnement de M. de la Grange, l'attraction de cette surface sur le point A seroit infiniment grande du second ordre, quoiqu'elle

ne ſoit réellement égale qu'à 2 π. Mais en voilà, ce me ſemble, aſſez pour faire voir que l'explication du paradoxe donnée par cet habile Géometre, eſt inſuffiſante; ce qu'on ne peut pas, ce me ſemble, dire de la nôtre. Dans l'Article *Gravitation* de l'Encyclopédie, j'en ai donné l'explication analytique, en montrant comment une partie de la différentielle & par conſéquent de l'intégrale, s'évanouit dans le cas de $n = o$. Ici j'en donne la vraie raiſon Métaphyſique, en montrant que l'attraction de la ſurface formée par BF, eſt toujours $= 2\pi$, excepté dans le cas où AB & BF ſont $= o$. Si le point A eſt au-dedans de la ſurface, par exemple en M, & que BM ſoit infiniment petite du ſecond ordre, on prouvera de même, que l'attraction de la ſurface formée par BN, eſt $= 2\pi$.

Fin du huitiéme Mémoire.



NEUVIÉME



NEUVIÉME MÉMOIRE.

Doutes sur différentes questions d'Optique.

JE me propose d'examiner dans ce Mémoire différens points fondamentaux de la théorie de la vision, & de montrer combien il reste encore d'incertitude sur ces différens points. On y verra que nous n'avons encore rien de bien assuré, ni sur le lieu apparent des objets, ni sur leur grandeur apparente, soit dans la vision directe, soit dans la vision réfléchie ou réfractée.

I.

Tous les Opticiens ont pris jusqu'à présent pour un axiome, que tout objet, ou plutôt tout point visible, est apperçu dans le rayon qui va de ce point visible à l'œil. Cette Proposition ne paroît devoir souffrir aucune difficulté, lorsque le rayon visuel est dans l'axe optique même; parce qu'alors le rayon visuel traverse l'œil en ligne droite, sans souffrir aucune réfraction. Mais il n'en est pas ainsi des rayons qui entrent dans l'œil obliquement, & qui viennent des côtés de l'objet. Car ces

rayons ſouffrent néceſſairement des réfractions dans les humeurs de l'œil; de ſorte que la partie du rayon qui frappe le fond de l'œil, & qui eſt la cauſe immédiate de la viſion, n'eſt pas en ligne droite avec la partie du rayon qui eſt venue du point viſible à l'œil. Ce n'eſt pas tout; le rayon qui frappe le fond de l'œil, n'affecte pas l'organe ſuivant ſa propre direction : mais ſon action ſur le fond de l'œil, doit s'exercer & s'eſtimer (conformément aux loix de la Méchanique) ſuivant une direction perpendiculaire à la courbure que le fond de l'œil forme en cet endroit. Or je demande maintenant, ſuivant quelle direction on apperçoit le point viſible? Eſt-ce ſuivant la direction du rayon qui va du point viſible à l'œil? L'expérience paroît le prouver, ou du moins telle eſt l'opinion générale des Opticiens. Mais 1°. il eſt difficile de faire cette expérience d'une maniere bien ſûre & qui ne laiſſe aucun doute; car tout point viſible placé hors de l'axe Optique, nous laiſſe toujours quelque incertitude ſur la véritable place où il eſt; & la preuve qu'on en peut donner, c'eſt la difficulté d'enfiler un anneau, par exemple, qui n'eſt pas vû dans la direction de l'axe Optique (*a*). D'ailleurs par quel moyen s'aſſurer de la di-

(*a*) Non-ſeulement il eſt néceſſaire que l'objet ſoit dans la direction de l'axe Optique, pour être jugé à la véritable place où il eſt; mais il faut encore qu'il ſoit vû des deux yeux à la fois, & qu'il ſe trouve par conſéquent au concours des deux axes. Car qu'on ferme un œil, & qu'on tâche enſuite d'enfiler l'anneau, on éprouvera plus de difficulté que quand on a les deux yeux ouverts. C'eſt un fait dont les Ecrivains d'Optique conviennent.

rection précise du rayon visuel, à quelques minutes ou même à un degré près ? J'avoue que cette détermination me paroît très difficile, & que l'estimation de la direction de ce rayon sera toujours un peu vague & incertaine. 2°. En accordant même que l'on apperçoive le point visible suivant la direction du rayon visuel qui entre dans l'œil, le fait paroît inexplicable. Car enfin ce n'est point cette partie de rayon qui produit la vision; c'est la partie qui vient tomber au fond de l'œil après avoir été rompue, & qui ne se trouve point en ligne droite avec la partie du rayon visuel qui entre dans l'œil. Comment & par quel principe l'ame démêle-t-elle que l'objet n'est pas dans la direction du rayon qui produit immédiatement la sensation, mais dans une autre direction suivant laquelle elle n'est point réellement affectée ?

Dira-t-on, ce qui paroît le parti le plus naturel, que l'objet est vû dans la direction de la perpendiculaire menée du point où le rayon rompu vient tomber sur le fond de l'œil ? Mais 1°. cette perpendiculaire pouvant s'écarter très-sensiblement de la direction qu'avoit le rayon incident, lorsqu'il est entré dans l'œil, ne s'ensuivroit-il pas que les points visibles placés hors de l'axe Optique, seroient apperçus ailleurs qu'ils ne sont réellement; & qu'ainsi les objets les plus proches de l'œil, & dont il est le plus à portée de juger, paroîtroient d'une grandeur différente de celle dont ils sont en effet ? 2°. Comme chaque point visible est vû des deux yeux, puis-

qu'il envoye des rayons à chaque œil, la perpendiculaire dont il s'agit, seroit différente pour chaque œil, & pour l'ordinaire même placée dans des plans différens ; ainsi le point visible, placé hors de l'axe Optique, devroit alors paroître double. Or c'est ce qui n'arrive pas.

Les mêmes difficultés auront lieu, si on suppose que l'objet soit vû dans la direction même de la partie du rayon qui vient frapper le fond de l'œil ; & il y faudra ajouter de plus la difficulté de concevoir comment on voit l'objet dans la direction de ce rayon, & non dans celle de la perpendiculaire, suivant laquelle l'organe est réellement affecté.

I I.

Pour développer davantage, & soumettre au calcul les difficultés qu'on vient d'exposer, soit *Q R S* (*fig.* 47.) la cornée, dont je suppose que le centre soit en *B* ; *A B* l'axe Optique passant par le centre de la cornée & des autres humeurs de l'œil ; *L B* un rayon qui vienne d'un point placé lors de l'axe Optique ; l'angle *A B L* étant d'ailleurs supposé très-petit, comme il le doit être : car le rayon *L S* ou *L B* doit toujours tomber sur un point *S* de la cornée qui soit très-près du sommet *R* ; puisque ce rayon *L B*, pour opérer la vision, doit passer par la prunelle dont le diametre est très-petit, & beaucoup plus petit que celui de la cornée.

Le rayon *L B* qui ne souffre aucune réfraction en *S*, parce qu'il est perpendiculaire à la cornée, tombe en *x*

sur la premiere surface *P M u* du crystallin, dont je suppose que le centre soit en *E*; là il souffre une réfraction qui l'approche de la perpendiculaire *u E*, & qui change sa direction en *u O*. Ce rayon *u O* tombe en *V* sur la seconde surface *P N V* du crystallin, dont je suppose que le centre soit au point *C*; le rayon *u O* se rompt au point *V* en s'éloignant de la perpendiculaire *C V*, & devient le rayon *V i* qui tombe sur le fond de l'œil en *X*, & qui, suivant les loix de la vision, doit former en ce point *X* l'image ou foyer du point visible, qui a envoyé le rayon *L S* ou *L B*. Si donc *K* est le centre du cercle *X Z D* que forme le fond de l'œil, il semble que l'objet doive être apperçu dans la direction du rayon *X K Y*, suivant laquelle s'exerce l'action du rayon *i X*; direction qui n'est pas la même que celle du rayon incident *L S*. Ainsi le point visible qui a envoyé le rayon *L S*, ne seroit point vû dans la place où il est réellement: & d'ailleurs il devroit arriver presque toujours qu'il seroit vû double; parce que la ligne *X Y* ne sera pas pour l'ordinaire dans le même plan pour chaque œil.

Afin d'appliquer ici les nombres, & d'arriver à un résultat qui nous donne une idée plus précise de la difficulté, supposons avec M. Petit le Médecin (*a*), que $RB = 3$ lig. $\frac{3}{4}$; que $RM = 1$ lig. $\frac{1}{4}$ (*b*); donc $BM =$

(*a*) Mém. de l'Acad. 1728, pag. 296.
(*b*) Ibid. p. 298.

2 lig. $\frac{1}{2}$; supposons encore avec le même M. Petit (*a*); $ME = 4$ lignes; $MN = 2$ lignes (*b*); donc $BN = \frac{1}{2}$ ligne, & $BE = 1$ ligne & demi; supposons de plus, toujours avec M. Petit, CN ou $CV = 2$ lig. $\frac{1}{2}$ (*c*); supposons enfin avec M. Jurin (*d*), que la réfraction de l'humeur aqueuse dans le cryſtallin soit comme 13 à 12; & du cryſtallin dans l'humeur vitrée comme 12 à 13; on aura d'abord $BO = \frac{1}{1} BE$; angl. BOu ou BOV $= ABL - \frac{BuE}{13} = ABL \times (1 - \frac{BE}{13\,ME})$; $OVG = BOV \times \frac{CO}{CV}$; $iVo = \frac{1}{12} OVG$; & par conséquent MiV, ou $BOV + iVO = ABL \times (1 - \frac{BE}{13\,ME}) + ABL \times (1 - \frac{BE}{13\,ME}) \times \frac{CO}{12\,CV}$; enfin l'angle $MKY = MiV \times \frac{iZ}{KZ} = MiV \times (1 + \frac{iK}{KZ})$.

Or suivant les valeurs numériques supposées ci-dessus, on a $BE = \frac{3}{2}$, $ME = 4$; donc $\frac{BE}{13\,ME} = \frac{3}{8\,.\,13}$: on a de plus $BO = \frac{1}{13} BE = \frac{3}{2\,.\,13}$; $BN = \frac{1}{2}$; $CN = 2\frac{1}{2}$; donc $CO = CN + NB + BO = 3 + \frac{3}{26}$; enfin

(*a*) Mém. 1728, p. 300; & Mém. 1730, p. 5 & 7.

(*b*) Mém. 1730, p. 7.

(*c*) *Ibid.* p. 7.

(*d*) *Eſſai upon diſtinct and indiſtinct viſion*, Art. 111. Cet Eſſai eſt imprimé à la fin de l'Optique de M. *Smith*.

$CV = \frac{5}{2}$; & $12\,CV = 30$; donc $MiV = ABL \times \left(1 - \frac{3}{8.13}\right) \times \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{260}\right) = ABL \times \left(1 + \frac{1947}{27040}\right)$ = environ $ABL\left(1 + \frac{1}{13}\right)$.

Or à cauſe de la petiteſſe de la ligne uV, & du petit angle qu'elle fait avec AB, les angles Miu, MiV peuvent être pris ſenſiblement l'un pour l'autre ; donc ſi on fait l'angle $Lu\lambda = \frac{1}{13} ABL$, la ligne $u\lambda$ pourra être cenſée dans la direction du rayon Xi. Donc ſi on voyoit dans la direction de ce rayon Xi ou $u\lambda$ le point viſible qui a envoyé le rayon Lu, la grandeur apparente de l'objet ſeroit de $\frac{1}{13}$ environ plus grande qu'elle n'eſt en effet (*a*).

III.

Si on ſuppoſe, ce qui paroît le plus naturel, que la viſion ſe faſſe ſuivant la ligne XK, l'angle MKY ſera à très-peu-près $= ABL\left(1 + \frac{1}{13}\right)\left(1 + \frac{iK}{KZ}\right)$; ainſi l'angle ABL & la grandeur apparente de l'objet, ſeront aug-

(*a*) Cette grandeur apparente diminueroit un peu, ſi on ſuppoſoit le rayon ME de la premiere convexité du cryſtallin $= 6$ lignes, & non pas 4, comme M. Petit dit l'avoir obſervé dans pluſieurs ſujets ; car alors on auroit $BE = \frac{7}{2}$; & $MiV = ABL\left(1 - \frac{7}{12.13}\right) \times \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{7}{780}\right) = ABL + \frac{149 \times 865}{156 \times 780} = ABL\left(1 + \frac{7205}{121680}\right) =$ environ $ABL\left(1 + \frac{1}{16}\right)$; ce qui donne encore une augmentation ſenſible. D'ailleurs les dimenſions ſur leſquelles a été fait le calcul qui donne $MiV = ABL\left(1 + \frac{1}{13}\right)$, ſont les dimenſions les plus ordinaires.

mentées de la quantité $\frac{1}{13} + \frac{14 . iK}{13 . KZ}$. Il ne s'agit plus que de trouver les valeurs de iK & de KZ.

Selon M. Jurin (*a*), RZ (*fig.* 48.) $= 9$ lig. $\frac{2}{5}$; selon M. Petit (*b*), $RD = 1$ lig. $\frac{2}{5}$; donc $DZ = 8$ lig. Selon le même M. Petit (*c*), $DQ = 2$ lig. $\frac{1}{2}$; donc Da ou $\frac{DQ^2}{DZ} = \frac{25}{8.4}$; donc $aZ = 8 + \frac{25}{32}$; & $KZ = 4 + \frac{25}{64}$; or $BZ = RZ - RB = 9\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4} = 6 + \frac{8 - 15}{20} = 6 - \frac{7}{20} = 5 + \frac{13}{20}$; & BO, comme on l'a vû ci-dessus $= \frac{3}{26}$. Donc $OZ = BZ - BO = 5 + \frac{13}{20} - \frac{3}{26}$. Et par conséquent OK, ou $OZ - KZ = 1 + \frac{13}{20} - \frac{25}{64} - \frac{3}{26}$. Enfin Oi (*fig.* 47.) $=$ à-peu-près $\frac{NO \times CO}{12\, CV_1} = (\frac{1}{2} + \frac{3}{26}) \times (\frac{1}{10} + \frac{1}{260}) =$ à-très-peu-près $\frac{1}{20} + \frac{3}{260} + \frac{1}{2.260} = \frac{1}{20} + \frac{7}{520} = \frac{33}{520}$. Donc iK, ou $Oi + OK = \frac{520 + 338 + 33 - 60}{520} - \frac{25}{64} = \frac{520 + 311}{520} - \frac{25}{64} =$ à-très-peu-près $1 + \frac{3}{5} - \frac{25}{64} = 1 + \frac{67}{320}$. Donc l'angle ABL est surpassé par l'angle MKY, de la fraction $\frac{1}{13} + \frac{14}{13} \times (1 + \frac{67}{320}) : (4 + \frac{25}{64}) = \frac{1}{13} + \frac{14 . 387}{13 . 281 . 5} = \frac{6823}{18265} =$ environ $\frac{1}{3}$, & même un peu plus. C'est pourquoi l'image de l'objet paroîtroit augmentée à-peu-près

(*a*) *Essai upon distinct and indistinct vision*, Art. 136.

(*b*) Mém. de l'Acad. 1728, p. 2;8.

(*c*) *Ibid.*

d'un

tiers, si le point visible d'où est parti le rayon *L B*, étoit vû dans la direction du rayon *X K*; or cela est contraire à l'expérience. Donc on ne sauroit supposer que la vision se fasse suivant des lignes qui passent par le centre *K* du globe de l'œil, quelque naturelle que cette supposition paroisse.

I V.

Suivant quelle ligne donc apperçoit-on les objets ou points visibles qui ne sont pas placés dans l'axe Optique ? C'est ce qui paroît très-difficile à déterminer éxactement & en toute rigueur. Cependant, comme l'expérience prouve que les objets de peu d'étendue, qui sont à la portée de nos yeux, ne paroissent pas sensiblement plus grands qu'ils ne le sont en effet; il s'ensuit que le point visible qui envoye le rayon *L S* sur la cornée, est vû sensiblement à sa place; & que par conséquent ce point visible *L*, dont l'image est en *X*, est vû sensiblement dans la direction du rayon *X L*. Pourquoi cela? C'est un fait que je n'entreprendrai pas d'expliquer. Mais voici quelque chose de plus.

Jusqu'ici on a fait voir que les objets, qui ne sont pas dans l'axe Optique, ont un lieu assez mal décidé, & qu'il est douteux que ce lieu soit précisément dans le rayon visuel qui part de l'objet pour arriver à l'œil. Je dis présentement que les objets même qui sont placés dans l'axe Optique, ne sont pas toujours vûs dans cet axe. En effet supposons qu'on dirige les deux axes Op-

tiques *A E*, *B E* (*fig.* 49.) vers une Etoile *E*; il eſt certain que cette Etoile nous paroît beaucoup plus près qu'elle n'eſt en effet : il eſt vrai qu'on n'eſtime ſa diſtance que d'une maniere très-imparfaite & très-vague ; mais il n'en eſt pas moins ſûr que cette diſtance apperçûe, ou apparente, ou préſumée, eſt fort au-deſſous de la diſtance réelle. Si donc on voyoit l'Etoile dans chacun des axes Optiques *A E*, *B E*, on la verroit dans chacun de ces axes aux points *e*, qui ſont incomparablement plus près de *A* & de *B*, que de *E*; ainſi on verroit deux Etoiles *e*, *e*, & la diſtance apparente *e e* de l'une à l'autre ſeroit à-peu-près égale à *A B*. Cependant l'expérience prouve qu'on n'apperçoît qu'une ſeule Etoile ; ainſi cette Etoile eſt vûe à-peu-près au point de milieu ε de la ligne *e e*, ſuivant des lignes *A* ε, *B* ε, différentes des axes Optiques. Il eſt vrai que ces lignes, quoique réellement différentes des axes Optiques, ne s'en écartent que fort peu ; mais enfin elles en different ; & cette expérience ſuffit pour prouver que les objets qui ſont à une diſtance conſidérable de l'œil, ne ſont point vûs exactement dans l'axe Optique, même quand on les regarde directement.

Donc en général, rien n'eſt moins certain que ce principe vulgaire d'Optique, que *les objets ſont vûs dans la direction du rayon qu'ils envoyent à l'œil.*

V.

C'eſt une grande queſtion entre les Opticiens, que de

ſavoir en quel endroit on rapporte l'image dans un miroir ou dans un verre. Les anciens Auteurs ont tous pris pour principe, qu'un objet vû par réfraction ou par réfléxion, eſt apperçu dans l'endroit où le rayon réfléchi ou rompu, coupe la perpendiculaire menée de l'objet ſur la ſurface réfléchiſſante ou rompante. Ce principe eſt vrai dans les miroirs plans; & c'eſt-là ſans doute ce qui a déterminé les anciens Opticiens à l'étendre aux autres ſurfaces. Ils auroient dû voir cependant qu'il n'y avoit entre les deux cas aucune analogie. Il y en auroit eû un peu davantage, s'ils avoient placé l'image dans l'endroit où le rayon réfléchi ou rompu rencontre la perpendiculaire menée de l'objet, non à la ſurface réfléchiſſante ou réfringente, mais à la ligne droite qui touche cette ſurface au point de réfraction ou de réfléxion. Car enfin ce point eſt celui par lequel le rayon viſuel eſt envoyé à l'œil; & ce rayon y eſt envoyé de la même maniere, que ſi le rayon incident tomboit ſur une ſurface plane, qui touchât au point de réfléxion ou de réfraction, la ſurface réfléchiſſante ou rompante. Il ſeroit donc plus naturel de rapporter le lieu de l'image à la perpendiculaire menée ſur cette tangente, qu'à la perpendiculaire menée ſur la ſurface, laquelle eſt abſolument indépendante de la poſition du rayon réfléchi ou rompu, & du point réfléchiſſant ou rompant. Cependant aucun des Opticiens anciens ne paroît avoir fait cette réfléxion; & tous ſe ſont accordés à placer le lieu de l'image dans le concours du rayon réfléchi ou rompu avec la cathete d'incidence.

VI.

Quelques-uns ſeulement, comme le P. Taquet, en adoptant ce principe, ſont convenus que l'expérience y étoit contraire en certains cas. Soit, par exemple, dit le P. Taquet, un objet placé au-delà du centre d'un miroir concave ; il eſt viſible que les cathétes d'incidence menées des deux extrémités de l'objet, ſe croiſent au centre; & que par conſéquent, ſi le lieu de l'image eſt dans ces cathétes, & que l'œil ſoit placé entre le centre & le miroir, l'image doit lui paroître renverſée. Cependant elle paroît droite. Il eſt donc conſtant que le principe des anciens Opticiens n'eſt pas général, & par conſéquent n'eſt pas vrai.

VII.

Barrow, Gregori & Newton ont ſuivi un principe en apparence bien plus plauſible. Un point viſible, diſent-ils, n'envoye pas à l'œil un ſeul & unique rayon; mais il envoye ſur la ſurface réfléchiſſante ou rompante, des rayons dont un certain nombre entre dans l'œil, à cauſe que la prunelle n'eſt pas un point Mathématique, mais qu'elle a une certaine largeur. Ainſi les rayons *O F*, *O f* (*fig.* 50.) qui partent d'un objet, & qui ſont réfléchis ou rompus avant d'arriver à l'œil & d'entrer dans la prunelle *L N*, y arrivent comme s'ils venoient directement du point *E*, où les rayons réfléchis ou rompus *F L*, *f N* concourroient étant prolongés, s'il eſt néceſſaire. Or,

comme les rayons *F L*, *f N* sont fort près l'un de l'autre, à cause du peu de largeur de la prunelle, leur point de concours *E* est sensiblement le même que si les rayons *F L*, *f N* étoient infiniment proches ; c'est-à-dire, que c'est le point où le rayon *F L* touche la caustique par réfléxion ou par réfraction; ce point est donc celui où l'objet est vû suivant ces Auteurs.

VIII.

Cette opinion paroît plausible ; cependant Barrow lui-même, à la fin de ses *Leçons Optiques*, avertit que l'expérience y est souvent contraire. Voici le cas. C'est celui où les rayons *F L*, *f N*, au lieu d'entrer dans l'œil divergens, y entrent convergens; ce qui peut arriver aisément, toutes les fois que la réfléxion ou la réfraction rapproche les rayons au lieu de les écarter. Car alors si on place l'œil entre le point *F* & le concours *E* des rayons, les rayons entreront convergens dans l'œil, & l'objet ne peut être vû en *E* (où l'on devroit le voir suivant ces Auteurs) puisque ce point *E* est derriere la tête. Barrow en apporte plusieurs exemples, entr'autres celui du P. Taquet, où l'œil est supposé proche d'un miroir concave, & l'objet ou point visible dans l'axe au-delà du centre.

Il avoue en même-tems que cette difficulté lui paroît insoluble. S'il m'est permis de le dire, il me semble qu'elle affoiblit peu le principe. Car quand les rayons entrent dans l'œil convergens, la vision doit être confu-

se; & le principe ne peut s'étendre qu'aux rayons qui entrent dans l'œil divergens; 1°. parce que ces rayons sont les seuls qui puissent produire une vision distincte, & par conséquent une vûe nette de l'image; 2°. parce que les rayons convergens se réunissent derriere l'œil, où certainement on ne peut rapporter l'image, dont on n'a d'ailleurs qu'une vision confuse.

I X.

C'est pourquoi le principe de Barrow pourroit subsister, ce me semble, s'il n'y avoit point d'autres raisons à y opposer que l'expérience rapportée ci-dessus; il faudroit seulement y ajouter cette restriction, qu'il ne s'agit que de l'image vûe par des rayons divergens. Mais ce principe paroît sujet à d'autres difficultés.

En premier lieu, la position des yeux peut être telle, que les rayons réfléchis ou rompus qui entrent dans chaque œil, & qui partent d'un même point, soient très-sensiblement différens, & forment entr'eux un grand angle. Supposant donc que ces rayons concourent entr'eux, il faudroit que ce concours fût le même que le point *E* de la caustique pour chaque rayon. Or c'est ce qui arrivera très-rarement. Dans tout autre cas, il y aura deux points *E* ou deux lieux de l'image très-sensiblement différens pour chaque œil, & par conséquent l'image paroîtroit double. Ce qui est contraire à l'expérience. Donc l'image n'est pas vûe au point *E*.

X.

De plus, si les deux yeux sont placés de maniere que les rayons qui entrent dans chaque œil, ne concourent point, parce qu'ils se trouveront, ou parallèles, ou dans des plans différens, il est visible que dans ce cas l'image ne paroîtra même dans aucun des deux rayons; autrement il faudroit, ou qu'elle fût vûe double, ou qu'on ne vît l'image que d'un seul œil; ce qui n'est pas.

Cette réflexion suffit pour répondre, en passant, à M. Wolf, qui prétend que l'objet est vû dans le point de concours des rayons qui entrent dans chaque œil. Car où verra-t-on l'objet quand ce point de concours n'existera pas? Ce qui est fort ordinaire.

X I.

Une autre considération rend le principe de Barrow encore plus douteux. Il est certain qu'en n'ayant égard qu'à la longueur *L N* de la prunelle, le concours des rayons qui y entrent, est en *E*. Mais si on a égard de plus, comme on le doit, à la largeur de la prunelle, le concours des rayons qui entrent dans la prunelle suivant cette largeur, peut être dans un point très-différent; savoir, dans celui où le rayon *L F* rencontre la cathéte d'incidence; de sorte que les rayons auront différens points de concours, entre lesquels on ne pourra déterminer celui auquel l'œil doit rapporter par préférence l'image de l'objet. De plus, les yeux peuvent être telle-

ment placés, qu'il y aura pour chacun deux images distinctes; ce qui fait quatre en tout; & dans quelque situation qu'on les suppose, il y aura au moins trois images; l'une dans la cathéte d'incidence, les deux autres dans les caustiques.

XII.

Une autre difficulté contre le principe de Barrow, peut se tirer d'une expérience que Barrow rapporte lui-même, comme favorable à son opinion. Il suspendit dans l'eau un fil chargé de plomb à sa partie extérieure, & dont la partie supérieure étoit hors de l'eau; & il apperçut distinctement, dit-il, l'image de la partie inférieure, qu'il voyoit par réfraction, séparée de l'image de la partie supérieure, qu'il voyoit par réfléxion. Or cette derniere image est constamment dans la perpendiculaire; donc la premiere image n'y étoit pas. Donc, conclud Barrow, les objets vûs par réfraction ne sont pas vûs dans la perpendiculaire. Cette conclusion est juste, si l'expérience est vraie; mais je dis que la même expérience prouve contre le sentiment de Barrow. En effet; pour que l'on voye les deux images distinctes & séparées, il faut qu'elles ne soient pas toutes deux dans un même plan perpendiculaire, passant par l'œil & par l'objet; autrement une de ces deux images couvriroit l'autre, & l'expérience seroit au moins fort douteuse. Donc, en supposant l'expérience exacte & vraie, les deux images sont dans des plans différens, Or l'image de la partie vûe

vûe par réfléxion, eſt conſtamment dans le plan perpendiculaire ; donc l'autre image n'y eſt pas. Donc, ſuivant cette expérience, l'image de l'objet vû par réfraction, n'eſt pas dans le plan perpendiculaire. Cependant, ſelon le principe de Barrow, elle y doit être. Donc ce principe n'eſt pas vrai.

XIII.

Au reſte je ſuppoſe ici que l'expérience ſoit exacte ; car l'ayant voulu vérifier, elle m'a paru très-incertaine, & je ſerois même porté à la croire fauſſe. Quand le fil & l'eau ſont bien en repos, les deux images paroiſſent preſque toujours ſe confondre, ou du moins ſe couvrir. Ainſi l'expérience en ce cas ne prouve, ni pour le principe de Barrow, ni pour celui des anciens.

Une autre expérience plus commune ſemble favorable au principe des anciens, au moins quant à la réfraction ſur les ſurfaces planes. Un bâton plongé obliquement dans l'eau & vû de côté, eſt vû briſé, & la partie briſée ſemble être dans le même plan perpendiculaire où ſe trouve la partie qui eſt hors de l'eau ; ce qui prouve que dans ce cas l'image de chaque point eſt vûe dans la cathéte. Suivant le principe de Barrow, la partie briſée devroit paroître dans un plan différent de celui où ſe trouve la partie extérieure.

XIV.

Je crois donc qu'à l'égard des ſurfaces planes réfrac-

tantes, le principe des anciens ne s'écarte pas sensiblement de la vérité. Mais je doute qu'il y soit conforme dans d'autres cas, & en particulier dans celui des surfaces courbes. Je doute que dans les miroirs convexes, par exemple, l'image de l'objet soit jamais hors du miroir. Cependant, si le principe des anciens étoit vrai, elle devroit y paroître quelquefois. Car soit *AP* (*fig.* 51.) un rayon prolongé jusqu'en *M*; en faisant *PO*=*PM*, *PO* sera le prolongement du rayon réfléchi; donc si le point *A* est tellement éloigné dans la ligne *AP*, que la cathéte *AC* ne coupe point la ligne *PO*, le point *A* sera vû, suivant le principe des anciens, au point *q* où la ligne *PO* prolongée rencontre la cathéte *AQ*. Le point *A* paroîtra donc hors du miroir. Or je doute qu'il y ait aucune expérience où il ait jamais été vû de la sorte dans un miroir convexe.

XV.

Suivant le principe de Barrow au contraire, l'objet doit toujours être vû au-dedans du miroir, lorsqu'il est convexe. En effet soit *PL* infiniment petite, & soit prise *Lm*=*LN*; l'objet sera vû suivant le principe dont il s'agit, au point de concours *p* des rayons *Lm*, *PO*. Or ce point *p* est évidemment entre *P* & *O*.

Quoi qu'il en soit, on voit assez par tout ce qui a été dit jusqu'ici, qu'aucun des principes imaginés par les Opticiens sur le lieu de l'image, n'est suffisamment fondé en raison, & sur-tout qu'aucun de ces principes ne suffit à tous les cas.

XVI.

M. Smith dans ſon Optique en imagine un autre. Il prend d'abord pour principe, que la grandeur apparente de l'image eſt proportionnelle à l'angle viſuel. Enſuite ſuppoſant que *AB* (*fig.* 52.) ſoit l'objet, *AEB* l'angle ſous lequel il ſeroit vû à l'œil nud, & *aEb* l'angle ſous lequel on voit l'image, il fait *ab* = & parallèle à *AB*, & il prétend que l'image eſt vûe en *ab*. Mais 1°. M. Smith ſuppoſe que la grandeur de l'image eſt ſimplement proportionnelle à l'angle viſuel; ce qui eſt faux dans l'Optique directe, & du moins très-incertain dans la Catoptrique & la Dioptrique. 2°. Si l'image eſt rapportée en *ab*, elle ne devroit paroître, ce me ſemble, que de la grandeur *ab* = à celle de l'objet; c'eſt-à-dire qu'elle ne devroit paroître ni augmentée, ni diminuée; ce qui eſt contre l'expérience.

Ces objections contre le principe de M. Smith, ſont d'autant plus fondées, que dans l'Art. 156 de ſon Ouvrage, il explique la convergence apparente des lignes parallèles, par le ſeul principe de la diminution des angles. Il regarde donc, ou paroît regarder ce principe comme la ſeule cauſe de la grandeur apparente des objets. Or 1°. il eſt conſtant que ce principe ne ſuffit pas à expliquer les loix de cette grandeur apparente. 2°. Si on appliquoit ici à la viſion directe le principe de M. Smith pour le lieu apparent dans la viſion réfléchie ou réfractée, on trouveroit que chaque diſtance de deux arbres corresſ-

pondans, devroit paroître à l'endroit même où elle est réellement; d'où il seroit aisé de démontrer que chaque distance devroit paroître la même, & que par conséquent les deux lignes seroient jugées parallèles, ce qui n'est pas. Il faut donc que M. Smith convienne que son principe n'est pas applicable à la vision directe; or pourquoi la vision réfléchie ou réfractée suivroit-elle d'autres loix?

XVII.

Depuis que cet Ecrit est composé, il a paru un Traité postume de M. Bouguer, intitulé *Traité d'Optique*, dans lequel M. Bouguer fait la même remarque que nous avons faite §. XI, sur la double image que forment les rayons qui entrent dans chaque œil. Mais il se borne à cette remarque, sans dire d'ailleurs laquelle des deux images est apperçûe de préférence, sans observer qu'au lieu de deux images, il y en aura souvent quatre, & au moins trois; & enfin sans faire mention des autres objections dont le principe de Barrow est susceptible, ni de celles qu'on peut opposer au principe de M. Smith.

On demandera sans doute quel principe il faut y substituer? Ma réponse sera, qu'il n'y a peut-être point sur ce sujet de principe général; que le lieu apparent de l'image varie vraisemblablement suivant une infinité de circonstances, dont la connoissance exigeroit des expériences multipliées, qu'on ne pourra peut-être réduire à une seule & unique loi.

XVIII.

On ſait que les objets, lorſqu'ils ſont éloignés, paroiſſent toujours plus petits qu'ils ne ſont. Mais perſonne, que je ſache, n'a cherché, ni trouvé de moyen de meſurer leur grandeur apparente. Voici ceux que j'ai imaginés.

Soit *B D* (*fig.* 53.) une longueur horizontale indéfinie; & ſoit *A* la poſition de l'œil. On propoſe de meſurer la grandeur apparente de la partie *B D*, qu'on ſuppoſe aſſez longue pour être vûe plus petite qu'elle n'eſt en effet. Il eſt certain 1°. que ſi l'œil *A* n'eſt élevé audeſſus du plan *B D* que de la hauteur du corps, ou même d'une diſtance peu conſidérable, les parties *B C* voiſines de *B* paroîtront de leur grandeur naturelle. Soit donc priſe une de ces parties *B C*, d'un pied de longueur, par exemple, & ſoient placés des objets remarquables en *E*, *F*, *D* &c. de ſorte que les parties *C E*, *E F*, *F D* paroiſſent toutes égales entr'elles & à *B C*; ce qui ſe peut faire très-aiſément. En ce cas ſi *n* eſt le nombre des diviſions de la partie *B D*, il eſt viſible que la longueur *apparente* de cette partie ſera = *n* fois *B C*.

2°. Il eſt à remarquer que le rapport de *B D* à *n B C* pourra être très-différent ſelon la poſition de l'œil. Je ſuis perſuadé, par exemple, que la même longueur *B D* paroîtra plus petite étant horizontale, que ſi elle étoit verticale. Il faudra de plus varier cette expérience pour toutes les lignes *B D*, horizontales, verticales ou incli-

nées, & pour tous les cas où ces lignes *B D* seront vûes directement ou obliquement, c'est-à-dire, où le plan *B A D* qui passe par *B D* & par l'œil, sera perpendiculaire ou oblique au plan où se trouve placée la ligne *B D*. Car il y a tout lieu de croire que ces différens cas donneront des résultats différens.

On pourra examiner encore, si les parties *B E*, *E D* qui paroissent égales entr'elles, lorsqu'on les a divisées en deux ou en plusieurs parties par un ou plusieurs corps intermédiaires *C*, *F*, paroîtront encore égales, quand on aura supprimé ces corps intermédiaires ? Et si en laissant subsister les corps *C*, *F*, elles paroîtront encore égales, quand on aura mis entre les corps *B*, *C*, *E*, *F*, *D*, de nouveaux corps intermédiaires ? Je suis fort trompé si cette diversité de circonstances ne produit quelques variétés dans la grandeur apparente.

XIX.

Si la ligne *B D* (*fig.* 54.) est fort loin de l'œil, ensorte qu'une partie quelconque *B C* de cette ligne paroisse plus petite qu'elle n'est en effet ; on fera placer des objets remarquables en *C*, *E*, *D* &c. à d'assez petites distances l'un de l'autre ; ensorte que les distances *B C*, *C E*, *E D* paroissent égales entr'elles, & assez petites ; d'un pied, par exemple. Ensuite on dirigera du point *B* vers l'œil *A* un cordeau d'une couleur remarquable, & dont la position sera d'ailleurs arbitraire, pourvû qu'il vienne se terminer assez près de l'œil *A*, comme à quatre ou cinq pieds

de distance ; enfin par le point *C* on fera tendre un autre cordeau *Ca* de même couleur, & on le dirigera de maniere qu'il paroisse parallèle au premier cordeau *B A*. Alors on menera la ligne *A a* perpendiculaire à *B A*, & qui rencontre la ligne *Ca* en *a* ; cette ligne *A a* étant mesurée, donnera la longueur apparente de la ligne *B C* ; puisque (*hyp.*) *B A*, *C a* semblent parallèles. Connoissant la grandeur apparente de *B C*, on connoîtra celle de *B D*, en prenant *B C* autant de fois qu'il a de parties dans *B D*.

Il est visible qu'on peut aussi varier cette expérience en différentes manieres, selon la position de la ligne *B D* par rapport à l'œil ; & il y a tout lieu de croire, que selon ces différentes positions, les résultats seront différens.

X X.

Dans la premiere expérience, §. XVIII, la ligne *B D* (*fig.* 53.) paroît plus courte qu'elle n'est, parce que les points *D*, *F*, *E*, &c. sont vûs plus près de l'œil qu'ils ne sont réellement, comme en *d*, *f*, *e*, *c* &c. Car en général on juge toujours les objets éloignés plus près qu'ils ne sont. La ligne *B D* paroît donc comme en *b d* ; & comme on connoît par le §. XVIII, la grandeur apparente *b d*, & qu'on peut mesurer la grandeur réelle *B D*, on aura donc le rapport de *b d* à *B D*, ce qui donnera l'angle *d B D*. Car l'expérience prouve d'ailleurs que la ligne droite *B D* paroît toujours droite, quoique racourcie ; d'où il s'ensuit que *B c e f d* est une ligne droite.

Cet angle dBD est très-petit, puisque Bc doit être sensiblement égale à BC; & il faut de plus que les parties ce, ef, fd soient toutes sensiblement égales entre elles & à BC. Ainsi, après avoir calculé cet angle, & mesuré les parties BD, BF, BE, &c. on en conclura la longueur des parties df, fe, ec &c. & on verra si ces parties sont à-peu-près égales. Si elles ne le sont pas, c'est une marque qu'on n'a pas jugé assez exactement de l'égalité apparente des espaces BC, CE, EF &c. & on recommencera l'expérience & le petit calcul qui en est la suite pour trouver l'angle dBD.

XXI.

Mais on pourra trouver d'une maniere plus précise & plus facile cet angle dBD, & la grandeur apparente dB, par l'expérience suivante. Supposons que BD soit une rangée d'arbres, & $\zeta\delta$ la rangée parallèle. On cherchera par le §. XIX, la grandeur apparente de la distance $D\delta$ de deux arbres correspondans. Supposons qu'on la trouve de la quantité $B\beta$; on fera cette proportion; $D\delta$ ou $B\zeta$ est à $B\beta$ comme AD est à un quatriéme terme Ad; & cette quatriéme proportionnelle Ad donnera Bd & l'angle dBD. En effet la ligne $D\delta$ ne paroît plus petite qu'elle n'est réellement, que parce qu'elle paroît plus proche de l'œil, comme en d.

XXII.

De-là il est facile de conclure quelle devroit être la distance

diſtance *D* ♪, pour qu'elle parût égale à *B* Ϲ; car ſi on fait *Ad* eſt à *AD*, comme *B* Ϲ eſt à une quatriéme proportionnelle; cette quatriéme proportionnelle ſera la diſtance *D* ♪ qu'on cherche.

En faiſant le même calcul pour tous les points *F*, *E*, C&c. on réſoudra le Problême, qui conſiſte à *trouver ſuivant quelles lignes, des allées d'arbres doivent être plantées, pour être vûes parallèles.* Mais on peut s'épargner ce calcul par les conſidérations ſuivantes.

Il eſt certain que deux allées parallèles *B D*, Ϲ ♪, en paroiſſant convergentes, ne perdent point l'apparence de lignes droites. Il eſt certain de plus que le plan de l'allée paroît toujours ſenſiblement une ſurface plane; ainſi les allées *B D*, Ϲ ♪ paroiſſent convergentes, parce qu'on les rapporte ſur un autre plan, qui fait avec le plan de l'allée l'angle *dBD*; les lignes *B D* & Ϲ ♪ rapportées ſur ce plan, y forment des lignes droites, & doivent par conſéquent paroître telles.

Donc ſi on imagine ſur ce plan *dB*Ϲ (*fig.* 55.), la ligne droite Ϲ Δ parallèle à *B d*, & que par les points *A*, Ϲ, Δ, on faſſe paſſer un plan; ce plan formera ſur le plan de l'allée une ligne droite Ϲ ♪ qui ſera divergente de *B D*, & qui ſera la direction de l'allée qu'on cherche.

Pour trouver la direction de Ϲ ♪ d'une maniere plus ſimple, il n'y a qu'à mener *A O* parallèle à *B d*; le point *O* ſera celui où les lignes *D B*, ♪ Ϲ doivent concourir; & l'angle des lignes *D B*, ♪ Ϲ, ſera celui qui a pour tangente $\frac{B\,Ϲ}{B\,O}$.

XXIII.

Il y a plus de douze ans que j'avois fait cette remarque en travaillant à l'article *Parallélisme* de l'Encyclopédie; article auquel j'avois renvoyé d'avance dans l'article *Allée*, imprimé dès 1751. En 1755 M. Bouguer a donné à l'Académie des Sciences un Mémoire, où il remarque, comme moi, que la direction que doivent avoir des allées d'arbres pour paroître parallèles, doit être celle de deux lignes droites divergentes; & avant qu'il lût ce Mémoire, je dis à l'Académie que j'avois fait depuis long-tems cette réfléxion.

Les anciens Opticiens, comme les P. Fabry, Taquet & autres, ont cru que l'une des allées étant droite, l'autre devoit être hyperbolique; mais ils supposoient faussement que la grandeur des objets étoit uniquement proportionnelle à l'angle visuel. M. Varignon, prenant pour principe que la grandeur est proportionnelle au produit du sinus de l'angle visuel par la distance, trouve que la seconde allée doit être une ligne courbe convergente à la ligne droite; ce qui étant absurde, M. Varignon en conclut que le principe qu'il a adopté, ne vaut rien. Mais ce Géometre a fait deux paralogismes. 1°. Au lieu de la distance *apperçûe*, il prend la distance *réelle*. 2°. Au lieu de faire la grandeur apparente proportionnelle au sin. de $DA\delta$ (*fig.* 53.) multiplié par $A\delta$, il multiplie ce sinus par AD; en quoi il est clair qu'il se trompe. Il falloit multiplier le sinus par $A\delta$, ou la tan-

gente par AD, ou plutôt par la distance apperçûe Ad, & faire le produit égal à une quantité constante ; & pour lors M. Varignon auroit trouvé, comme nous, une ligne droite $\zeta\delta$ (*fig.* 55.) divergente d'avec BD, pour la direction de la seconde rangée.

Dans les Mémoires de 1755, M. Bouguer a remarqué de son côté, que M. Varignon avoit mal-à-propos substitué les distances *réelles* aux distances *apparentes*. Mais il n'a pas remarqué la seconde source d'erreur, celle d'avoir pris les distances AD au lieu des distances $A\delta$. M. Bouguer ajoute que le produit de l'angle $DA\delta$ par la distance apperçûe Ad doit être constant ; en quoi il ne s'exprime pas éxactement. Il falloit dire que le produit de la tangente de l'angle $DA\delta$ par la distance apparente Ad doit être constant, ou que le produit du sinus de cet angle par $\frac{A\delta \times Ad}{AD}$ doit être constant.

XXIV.

Une autre remarque que M. Bouguer n'a pas faite, c'est que la divergence des allées $\zeta\delta$, BD, pourroit être différente selon la distance $B\zeta$ des deux premiers arbres ; & selon la hauteur de l'œil AB. Par exemple, si l'angle dBD étoit toujours constant ou à-peu-près, il est visible que AO étant parallèle à Bd, & par conséquent l'angle AOB étant constant, l'angle $BO\zeta$ qui exprime la divergence des deux rangées d'arbres, varieroit selon que AB & $B\zeta$ varieroient.

Il pourroit donc très-bien arriver, qu'une allée d'arbres plantée pour être vûe parallèle d'un certain point de vûe, ne le paroîtroit plus, lorsqu'on se mettroit à un autre point; & qu'une personne placée à un certain point de vûe pourroit la voir parallèle, lorsqu'une autre personne de taille fort différente, placée au même endroit, ne la verroit pas de même. C'est sur quoi l'expérience seule peut nous instruire.

XXV.

Pour déterminer l'angle *D B d*, M. Bouguer donne dans son Mémoire des Méthodes différentes de celles que nous avons proposées ci-dessus, mais qui reviennent au même pour le fond. Il dit avoir fait là-dessus quelques expériences, & avoir trouvé (ce qui est en effet très-probable) que l'angle *D B d* varie suivant la variété des circonstances, c'est-à-dire, suivant la maniere dont le terrein est éclairé, l'intensité de la lumiere, la couleur du sol, & même l'endroit de l'œil où se peint l'objet.

Il ajoute que *B d* n'est pas éxactement une ligne droite; ou plutôt que le plan apparent *B* β Δ *d* n'est pas éxactement une surface plane, mais une espèce de conoïde, dont la concavité est tournée vers l'œil. Je doute de ce dernier fait, & voici mes raisons. 1°. Quand on regarde une seule rangée *B D* (*fig.* 53.) ou même deux rangées parallèles *B D*, β δ, elles paroissent sensiblement droites; or si le plan apparent de l'allée n'étoit pas sensiblement plan, la rangée apparente *B d* seroit concave, au lieu de

paroître droite, comme elle le paroît en effet. On dira peut-être qu'elle est réellement courbe, quoiqu'elle paroisse droite; mais comme il n'est question ici que d'apparences, l'*apparence* se confond avec la *réalité*, & ce qui ne *paroît* pas *sensiblement* courbe, ne l'*est* point du tout. 2°. Il paroît que M. Bouguer a conclu que *B d* étoit une ligne courbe, non de l'apparence de cette ligne envisagée dans sa totalité, mais de ce qu'ayant employé différens moyens pour déterminer l'inclinaison du plan ou de la ligne *B d*, ces moyens ne lui ont pas donné le même résultat; d'où il a conclu qu'on faisoit une fausse supposition en prenant la ligne *B d* pour sensiblement droite. Mais comme les différens moyens qu'on peut employer pour mesurer l'inclinaison de la ligne *B d*, ne sont pas d'une éxactitude rigoureuse, & peuvent être sujets à différentes erreurs, il n'est pas surprenant que ces moyens ne donnent pas absolument le même résultat; la différence pourra venir des erreurs des observations, à moins qu'elle ne fût trop grande pour être attribuée à ces erreurs; & je doute qu'elle soit assez grande pour cela. Mais ces observations, pour être bien faites, demandent un lieu vaste & commode, où on puisse les répéter & les varier; ce qui ne peut guères se trouver qu'à la campagne dans des plaines découvertes & étendues.

XXVI.

M. Bouguer assure, comme un fait certain, que si le

plan de l'allée n'est pas horizontal, mais qu'il s'éleve au-dessus de l'horison, l'angle *D B d* du plan apparent & du plan vrai sera d'autant plus grand, que le plan vrai sera un plus grand angle avec l'horison; il ajoute que si le plan s'incline à l'horison en-dessous, l'angle apparent *D B d* ira toujours en diminuant jusqu'à une certaine inclinaison, où le plan apparent se confondra avec le plan vrai; après quoi si le plan vrai s'incline encore, l'angle *D B d* deviendra négatif, & le plan apparent sera au-dessous du plan vrai. Ces expériences sont d'autant plus remarquables, & ont d'autant plus besoin d'être faites avec soin, répétées & variées en différentes manieres, qu'il en résulteroit peut-être des loix curieuses & singulieres sur la maniere dont nous jugeons de la distance apparente des objets, suivant la différente maniere dont ils sont placés.

On peut, par exemple, faire cette question, que l'expérience résoudra aisément. En supposant que le plan de l'allée ne soit pas horizontal, la distance de l'œil à ce plan est plus petite que si ce plan étoit horizontal. L'œil étant donc supposé à la même distance, & absolument dans la même position, par rapport au plan de trois allées, d'ailleurs semblables, mais l'une horizontale, les deux autres inclinées, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'horizon; on demande si les apparences seront les mêmes dans chacune de ces trois allées? Il y a lieu de croire que non; la difficulté sera d'expliquer pourquoi.

On peut aussi demander pourquoi la distance appa-

rente des arbres au ſpectateur, eſt dans certains cas plus petite, dans d'autres plus grande que la diſtance réelle, dans d'autres enfin égale à cette diſtance?

XXVII.

Les Opticiens ne ſont guères plus avancés ſur la théorie de la grandeur apparente des objets dans la viſion réfléchie ou réfractée, que dans la viſion directe. Entrons là-deſſus dans quelque détail.

Pour déterminer la grandeur apparente d'un petit objet placé un peu en-deçà du foyer d'une petite lentille, ou microſcope ſimple, ou à ce foyer même; voici comme M. Smith raiſonne, art. 118 & 119 de ſon *Optique.* Les rayons réfractés par la lentille, entrent dans l'œil à-peu-près parallèles, & l'objet vû diſtinctement en vertu de cette direction des rayons, eſt rapporté par l'œil ou jugé (ſelon M. Smith) à la plus petite diſtance, où l'œil peut voir diſtinctement les objets. D'un autre côté on démontre que l'objet eſt vû à travers la lentille, ſous le même angle qu'il paroîtroit à l'œil nû. Donc, conclud M. Smith, ſa grandeur apparente eſt à ſa grandeur réelle, comme la plus petite diſtance à laquelle on peut voir un objet diſtinctement, eſt à la longueur du foyer de la lentille; c'eſt-à-dire, comme environ ſept à huit pouces, eſt à cette longueur.

Or je demande 1°. pourquoi un point viſible, vû par des rayons parallèles ou à-peu-près parallèles, n'eſt rapporté qu'à la *plus petite diſtance* où on voit les objets

distinctement? Il semble au contraire qu'il devroit plutôt être rapporté à la *plus grande distance* où l'on peut voir distinctement les objets; puisque des rayons sensiblement parallèles doivent naturellement être supposés venir d'un point fort éloigné, & qu'ils affectent l'organe de la même maniere que s'ils venoient d'un pareil point. 2°. Cette maniere de déterminer la grandeur apparente & le lieu de l'image dans le cas des microscopes simples, est entiérement différente de la méthode du même M. Smith, expliquée ci-dessus §. XVI; & par conséquent ou cette derniere méthode du §. XVI n'est pas générale, & par conséquent est fautive, ou la méthode dont il s'agit dans le présent article est sujette à un inconvénient semblable. 3°. Pour déterminer la grandeur apparente d'un objet éloigné vû par un Telescope à deux verres, M. Smith n'a absolument égard qu'à la grandeur de l'angle (voyez art. 120 de son Opt.), & nullement à l'endroit où l'on rapporte & où l'on juge cette image, quoique les rayons qui viennent à l'œil soient sensiblement parallèles, comme dans le cas du Microscope simple & du Microscope composé. Pourquoi donc cette différence dans les deux théories des Microscopes simples ou composés, & des Télescopes? Pourquoi dans le premier cas suppose-t-on que l'objet est jugé à la distance de sept à huit pouces, & que cette distance apparente influe sur la grandeur apparente, tandis que dans le second cas, où les rayons entrent aussi parallèles dans l'œil, on ne fait aucune mention de cette distance apparente, & on fait

fait dépendre uniquement de l'angle visuel, la grandeur apparente ?

XXVIII.

Il est donc constant que l'on n'a point encore de Théorie satisfaisante sur les loix de la grandeur apparente des objets dans la vision réfléchie & réfractée. Il me semble qu'on ne doit pas être plus satisfait des méthodes imaginées jusqu'ici, pour déterminer *par l'expérience* la grandeur apparente des objets vûs par des verres ou des miroirs. Car toutes les expériences qu'on a proposées pour cela, sont tacitement fondées sur le prétendu principe, que la grandeur apparente est proportionnelle à l'angle visuel; elles supposent que deux lignes parallèles AB, CD (*fig.* 56.) paroissant dans le prolongement de deux autres lignes parallèles ab, cd, l'espace AC est toujours jugé égal à ac; quoique $ABDC$, $abdc$ soient dans des plans différens & parallèles. Or cette supposition est fausse. Car imaginons que le plan $abdc$ couvre le plan $ABDC$, & le cache à l'œil; alors AC, quoique couverte par ac, lorsque ac est placée devant, paroîtra néanmoins plus grande que ac, lorsqu'on aura ôté l'objet ac. Un nain placé devant un géant peut couvrir le géant à nos yeux, & cependant quand le nain aura été écarté, en restant toujours dans le même plan, il paroîtra plus petit que le géant. Donc puisque les lignes AB, ab, & CD, cd peuvent se couvrir sans que les lignes AC, ac soient jugées réellement égales, il s'ensuit que AB peut être

jugée dans le prolongemenr de *a b*, & *C D* dans celui de *c d*, ſans que les eſpaces *A C*, *a c* ſoient jugés égaux pour cela. Pour en donner une preuve frappante, ſuppoſons que *a c* ſoit d'un pouce, & que le plan *a b d c* ſoit placé à un pied de diſtance de l'œil; ſuppoſons de plus que *A C* ſoit de deux pouces, & que le plan *A B D C* ſoit placé à deux pieds de diſtance; je dis que ſi *C D* & *c d* ſe trouvent dans un même plan, les lignes *A B*, *a b* paroîtront dans le prolongement l'une de l'autre; ce qui eſt évident; & cependant les lignes *A C*, *a c* ne paroîtront pas égales. Car en les regardant ſéparément, la premiere ſera jugée de deux pouces, & la ſeconde d'un pouce, attendu qu'elles ſont l'une & l'autre peu éloignées de l'œil, qui par conſéquent les juge de la grandeur réelle dont elles ſont.

Tels ſont les doutes que l'on peut propoſer ſur les principes ordinaires de l'Optique; d'où il réſulte que dans cette ſcience preſque tout eſt encore à faire.

Fin du neuviéme Mémoire.





SUPPLÉMENT

A l'Art. 176 *du* TRAITÉ DE DYNAMIQUE, *nouvelle Edition.*

DANS cet Article, qui eſt éxactement ſemblable à l'Art. 145 de la premiere Edition du même Ouvrage, j'ai remarqué qu'il y avoit des cas où une boule, qu'on ſuppoſe infiniment dure, rencontrant à la fois quatre autres boules, ne communique point de mouvement à deux de ces boules, mais ſeulement aux deux autres.

Ce que j'ai avancé ſur ce ſujet, quoiqu'appuyé par des preuves qui me ſemblent démonſtratives, n'a pas frappé de même un ſavant Géometre, qui a cru pouvoir aſſigner les viteſſes des cinq corps après le choc. C'eſt ce que je vais éxaminer.

Je ſuppoſe qu'on ait ici ſous les yeux l'Art. 176 de la nouvelle Edition du *Traité de Dynamique*, ou l'Art. 145 de la premiere, que je prie le Lecteur de relire; je ſuppoſe auſſi qu'il ait ſous les yeux la figure répondante à ces Articles, que je vais employer ici.

Soit a la viteſſe de la boule A, dont je ſuppoſe que A ſoit la maſſe, & AL la direction avant le choc; D la maſſe de chacune des boules D & C, dont je ſuppoſe

que la vitesse avant le choc soit parallèle à AL, & $=b$; enfin soit E la masse de chacune des boules E, F, dont je suppose que la vitesse avant le choc soit parallèle à AL, & $=c$; il est visible que b & c doivent chacune être plus petites que a. Cela posé;

Si on nomme l'angle LAD, α, & l'angle LAE, β, x la vitesse perdue par la boule A suivant AL, z la vitesse communiquée aux boules D, C, suivant AD & AC, & y la vitesse communiquée aux boules E, F, suivant CE, CF; on aura par notre principe de Dynamique, les trois équations suivantes;

$(a-x)$ cos. $\alpha = z + b$ cos. α.

$(a-x)$ cos. $\beta = y + c$ cos. β.

$Ax = 2Dz$ cos. $\alpha + 2Ey$ cos. β.

D'où l'on tire

$$x = \frac{2D(a-b)\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2E(a-c)\,\text{cos}.\,\beta^2}{A + 2D\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2E\,\text{cos}.\,\beta^2}.$$

Par conséquent la vitesse $a-x$ de la boule A après le choc, sera

$$\frac{Aa + 2Db\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2Ec\,\text{cos}.\,\beta^2}{A + 2D\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2E\,\text{cos}.\,\beta^2}.$$

La vitesse $z + b$ cos. α de la boule D suivant AD, sera égale à $(a-x)$ cos. $\alpha = \frac{(Aa + 2Db\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2Ec\,\text{cos}.\,\beta^2)\,\text{cos}.\,\alpha}{A + 2D\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2E\,\text{cos}.\,\beta^2}$;

Et la vitesse de la boule E suivant AE sera de même, & par les mêmes raisons $= \frac{(Aa + 2Db\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2Ec\,\text{cos}.\,\beta^2)\,\text{cos}.\,\beta}{A + 2D\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2E\,\text{cos}.\,\beta^2}$.

Ces formules sont précisément semblables à celles

que le ſavant Géometre dont il s'agit, a trouvées par une méthode particuliere; ſur laquelle néanmoins on pourroit lui faire, ce me ſemble, quelques difficultés très-bien fondées, dans le détail deſquelles je n'entrerai point ici. Quoi qu'il en ſoit, comme le résultat eſt le même par ſa méthode & par la mienne, c'eſt uniquement à ce réſultat que je vais m'attacher.

Je dis donc qu'il faut néceſſairement que les viteſſes des corps D, E, après le choc, eſtimées ſuivant AD, AE, ſoient plus grandes que les viteſſes b, c, de ces mêmes corps avant le choc, eſtimées auſſi ſuivant AD, AE; car ſi les viteſſes étoient égales avant & après le choc, il n'y auroit point eu d'impulſion; & il eſt abſurde de dire qu'elles puiſſent être plus petites, puiſque l'effet néceſſaire du choc eſt d'augmenter la viteſſe du corps choqué.

Il faut donc qu'on ait

$Aa + 2Ec \operatorname{coſ}. \beta^2 > Ab + 2Eb \operatorname{coſ}. \beta^2$;

Et de plus

$Aa + 2Db \operatorname{coſ}. \alpha^2 > Ac + 2Dc \operatorname{coſ}. \alpha^2$.

Soit ſuppoſé, comme dans l'Art. 176 du *Traité de Dynamique*, *ſeconde Edition*, $c = o$; il eſt viſible que la ſeconde condition aura lieu, & que par conſéquent les boules E, F, recevront du mouvement par le choc de la boule A; mais la premiere condition n'aura lieu qu'au cas que Aa ſoit $> Ab + 2Eb \operatorname{coſ}. \beta^2$.

Donc ſi b differe très-peu de a, comme je l'ai ſuppoſé, enſorte que $b = a - \omega$, ω étant une très-petite

quantité, il faut pour que les boules C, D reçoivent quelque mouvement par le choc de la boule A, que la boule E soit assez petite pour qu'on ait $A\alpha > 2\,E\,b\,\text{cos}.\,\beta^2$. Dans tout autre cas les boules C, D, ne recevront point de nouveau mouvement par le choc de la boule A; elles conserveront seulement la vitesse b qu'elles avoient avant le choc; & tout se passera, ainsi que je l'ai dit dans l'endroit cité, de la même maniere que si la boule A choquoit les boules E, F, seules. En effet la vitesse des boules A, E, F, sera pour lors la même que si les boules D, C étoient absolument nulles, puisque ces boules ne contribuent en rien à altérer le mouvement de la boule A.

Prenons le cas où Aa est $= A\,b + 2\,E\,b\,\text{cos}.\,\beta^2$; c'est celui où les boules D, C, commencent à ne plus être poussées par le corps A. On a pour lors $z = o$, & la vitesse des boules E, F, qui est $= \frac{(Aa + 2\,D\,b\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2\,E\,c\,\text{cos}.\,\beta^2)\,\text{cos}.\,\beta}{A + 2\,D\,\text{cos}.\,\alpha^2 + 2\,E\,\text{cos}.\,\beta^2}$; se réduit (en mettant pour $A\,a$ sa valeur $A\,b + 2\,E\,b$ $\text{cos}.\,\beta^2$, & en remarquant que $c = o$) à la simple valeur de $b\,\text{cos}.\,\beta$, ou $\frac{A\,a\,\text{cos}.\,\beta}{A + 2\,E\,\text{cos}.\,\beta^2}$, à cause de $A\,a = A\,b + 2\,E\,b\,\text{cos}.\,\beta^2$; ainsi tout se passe exactement comme si D & C étoient $= o$.

A plus forte raison dans les autres cas, où z sera une quantité négative, & par conséquent impossible dans l'hypothèse présente, le choc des boules A, E, F, devra seul être considéré.

On remarquera même, que quoique la ſeconde condition ait toujours lieu, ſavoir, $Aa + 2 Db$ coſ. $\alpha^2 > Ac + 2 Dc$ coſ. α^2 (au moins lorſque $b > c$); cependant, lorſque z ſe trouve négative, les formules trouvées ci-deſſus pour les viteſſes des boules A, E, F, après le choc, ne peuvent plus ſervir, à moins que dans ces formules on ne regarde comme nuls les termes où ſe trouve D; parce qu'encore une fois les boules D, C, doivent être regardées alors comme n'exiſtant pas.

En voilà aſſez pour faire voir que je me ſuis exprimé très-exactement dans l'endroit cité de mon *Traité de Dynamique*. On peut éxaminer de la même maniere & par les mêmes régles, le cas où c ne ſeroit pas $= o$, ainſi que ceux où b ſeroit $< c$.

Fin du Tome premier.

FAUTES A CORRIGER

Dans ce premier Tome.

Page 5, *lig.* 10, *au lieu de* $d\xi$ & $d\vartheta$, lisez $\xi\,dx$ & $\vartheta\,dt$.

Page 27, *lig.* 10, avant y^2, mettez *un point & une virgule.*

Page 54, *lig.* 1, *au lieu de* $\sqrt{-1}$, lisez $\sqrt{2}$.

Page 60, *lig.* 13, avant Yp, mettez *un point & une virgule.*

Page 191, *lig.* 8, *au lieu de* les deux Logarithmes, *lisez* les deux Logarithmiques.

Page 241, *lig.* 10, au lieu de $(bb + \overline{c - a}^2)$, lisez $bb\,(bb + \overline{c - a}^2)$.

Page 255, *lig. derniere*, au lieu de $3\,\Delta$, *lisez* $3\,\delta$.

Page 257, *lig.* 10, *au lieu de* dissimilitude, *lisez* similitude.

Page 273, *lig.* 1, *au lieu de* tiers, *lisez* d'un tiers.

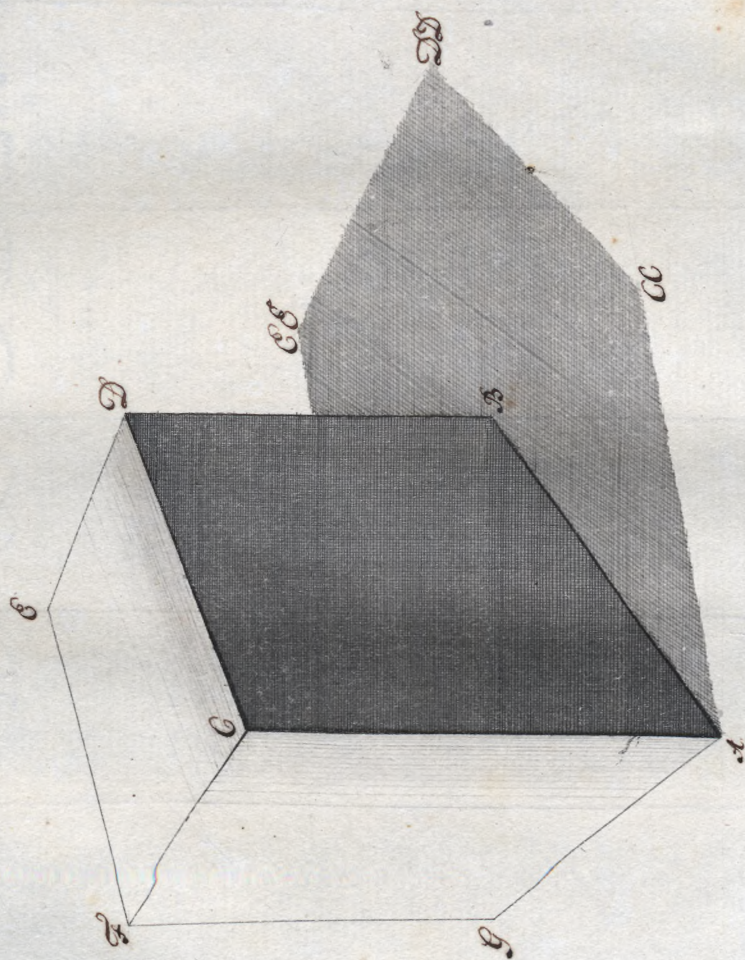
Page 280, *lig.* 10, *au lieu de* extérieure, *lisez* inférieure.

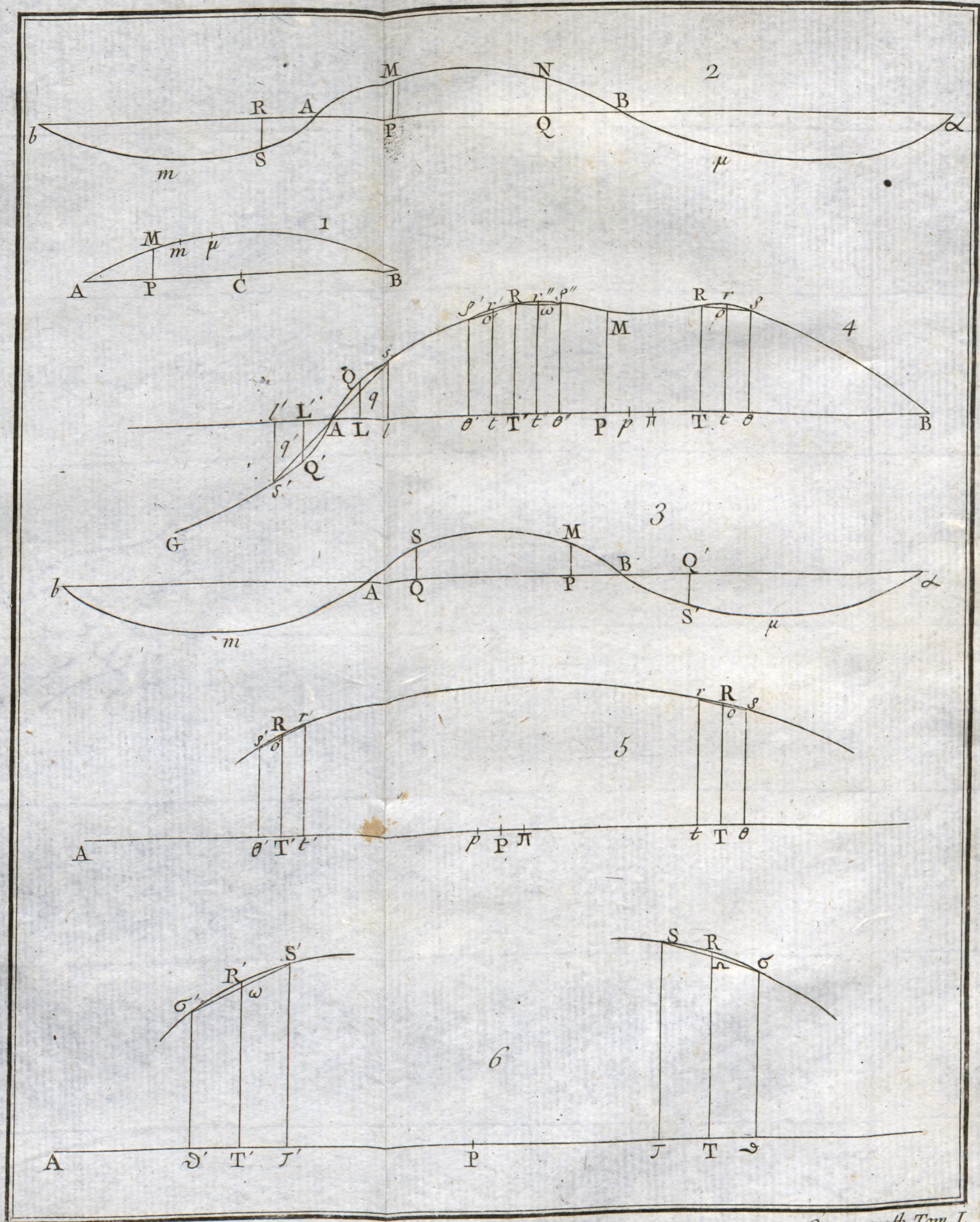
Fautes à corriger dans les Figures.

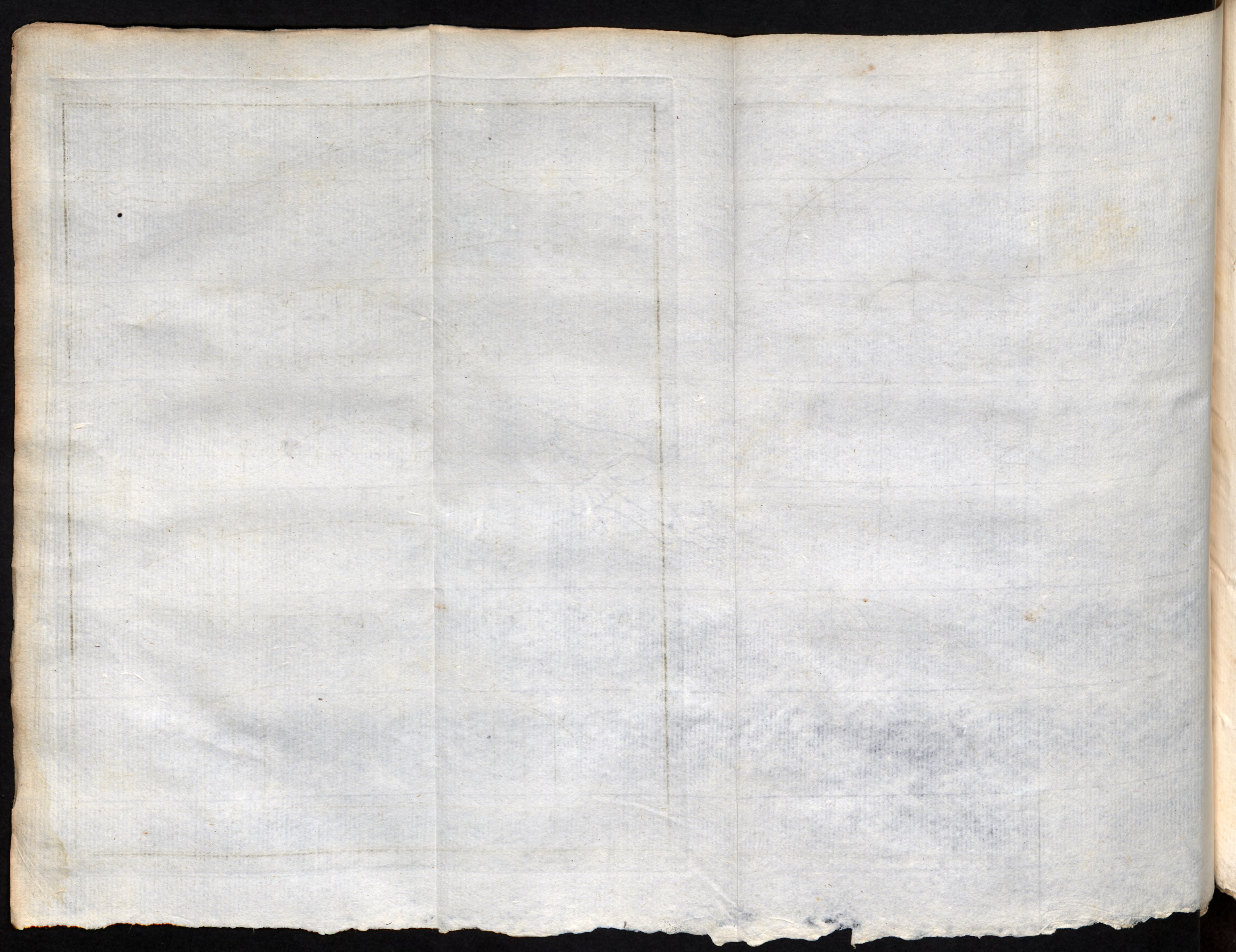
Dans la Figure 4, *Planche premiere*, il faut marquer d'un trait le t, qui est auprès de T', en cette sorte t'.

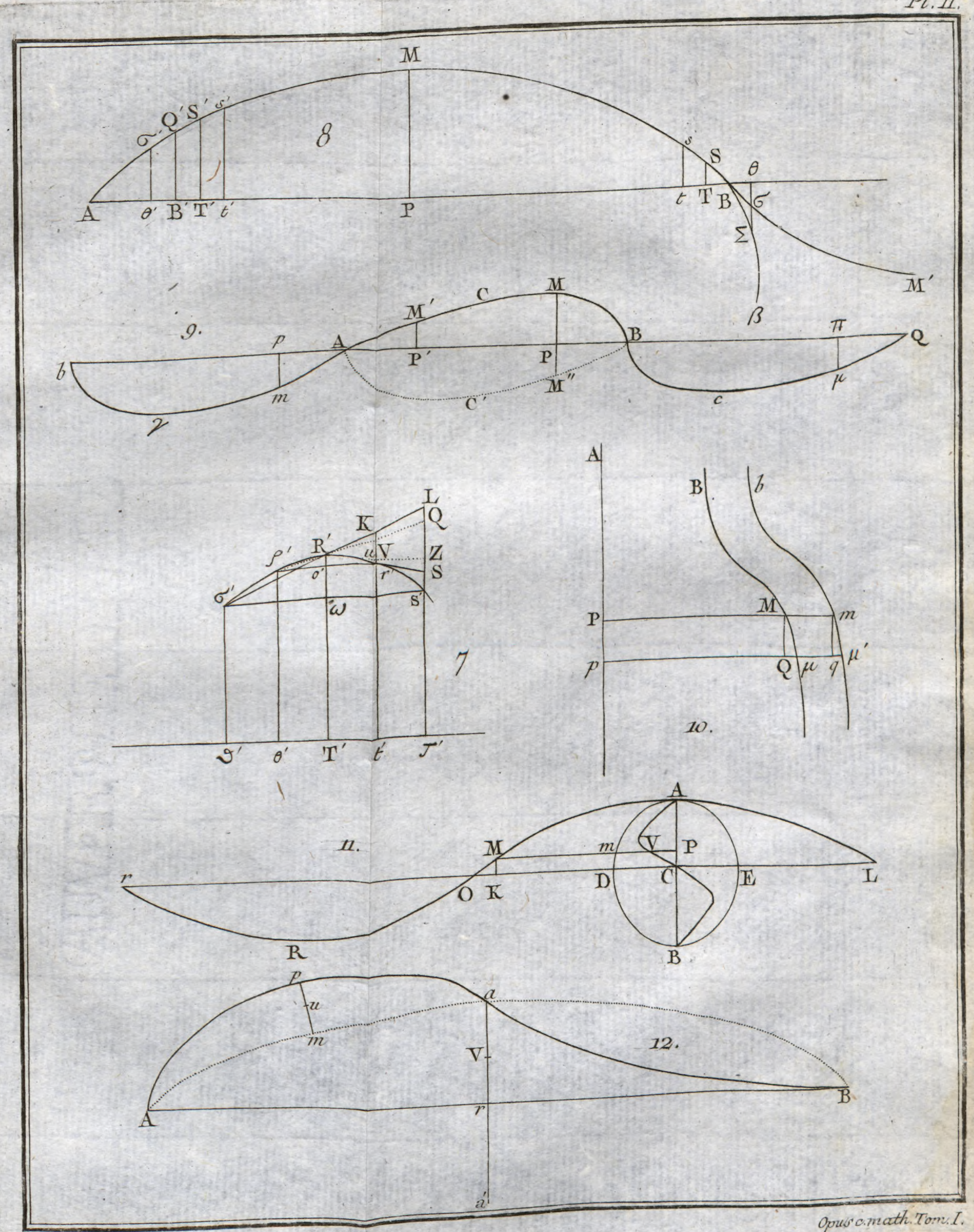
Dans les Fig. 4 & 5, *Planche premiere*, il faut marquer d'un trait la lettre R qui est au-dessus de T', en cette sorte, R'.

Dans la Fig. 7, *Planche* 2, il faut marquer d'un double trait la lettre S, qui est sans trait, en cette sorte S''.

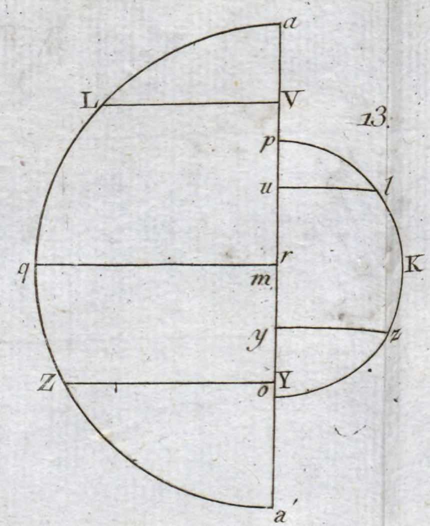


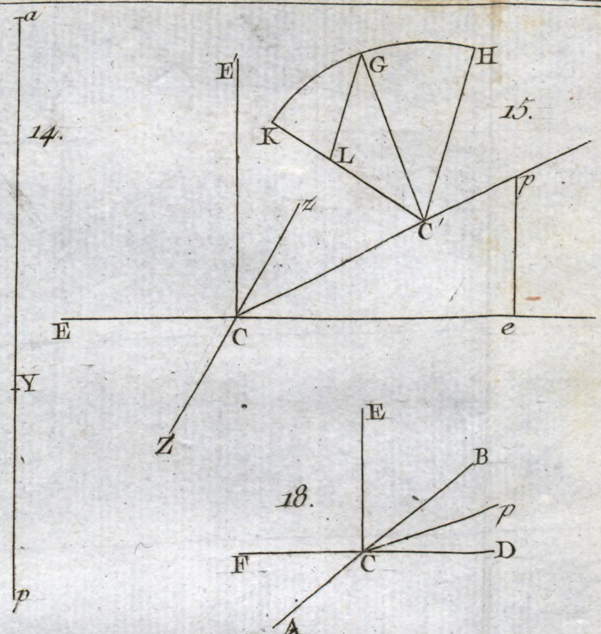

2
1
4
3
5
6

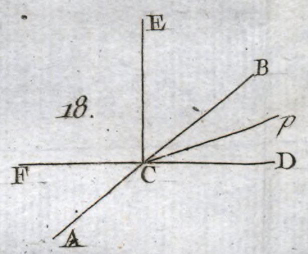


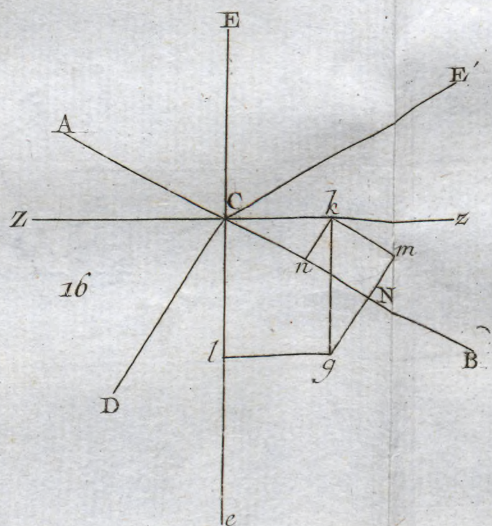


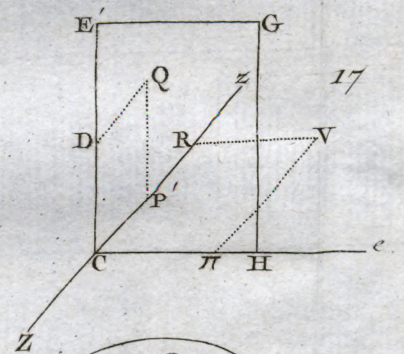
8
A
θ'
B'
T'
t'
Q'
S'
P
M
t
T
B
s
S
θ
Σ
β
M'
9.
b
p
m
A
M'
C
M
P'
P
M''
C'
B
c
π
μ
Q
7
L
K
Q
R'
ρ'
V
Z
S
σ'
ω
s'
T'
10.
A
B
b
P
M
m
p
Q
μ
q
μ'
11.
A
M
m
V
P
r
O
K
D
C
E
L
R
B
12.
p
u
m
a
V
A
r
B
a'

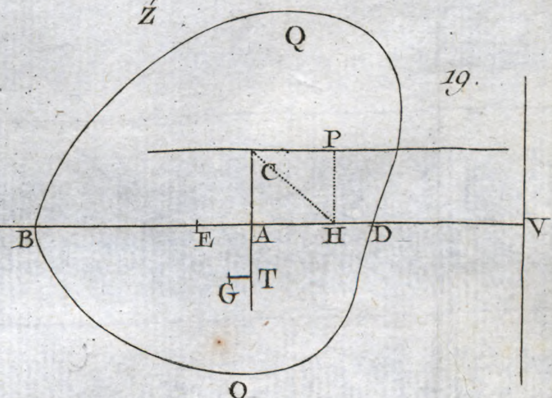

a
L
V
13.
p
u
l
q
r
m
K
y
z
Z
o
Y
a′
a
14.
Y
p

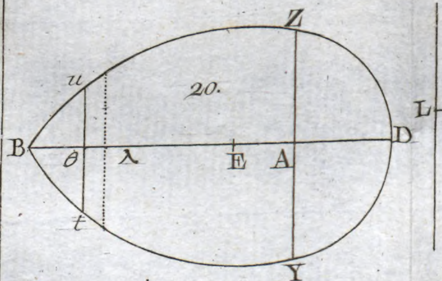

E
G
H
15.
K
L
p
z
C′
E
C
e
Z


E
B
18.
p
F
C
D
A

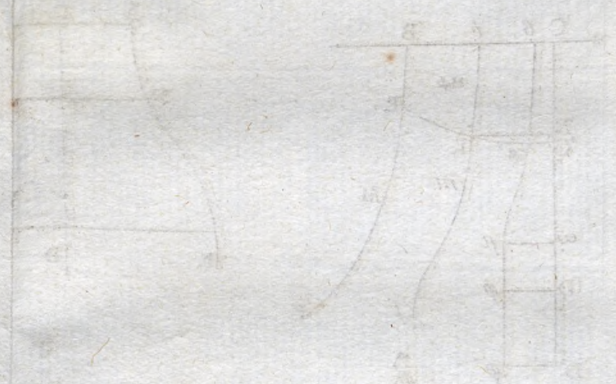

E
E′
A
C
k
Z
z
m
n
16
N
l
g
B
D
e

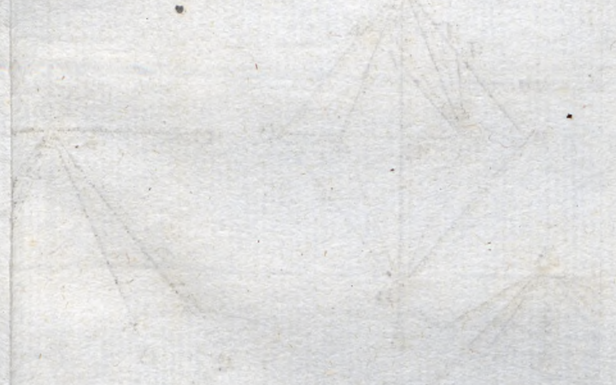

E′
G
Q
z
17
D
R
V
P′
C
π
H
e
Z


Q
19.
P
C
L
B
E
A
H
D
V
G
T
O

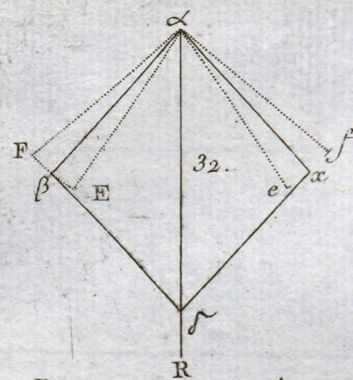

Z
u
20.
B
θ
λ
E
A
D
t
Y

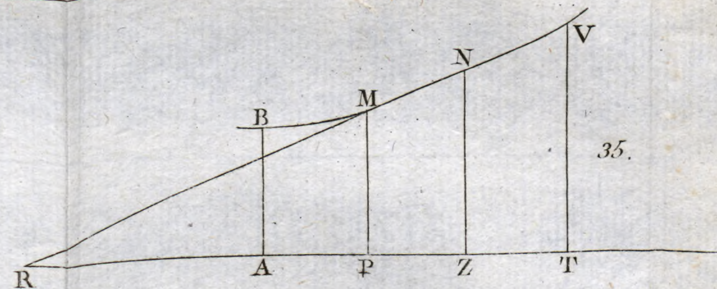


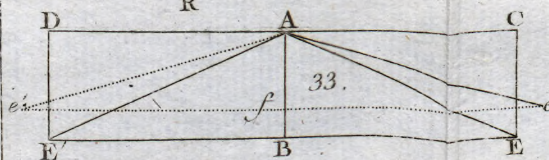


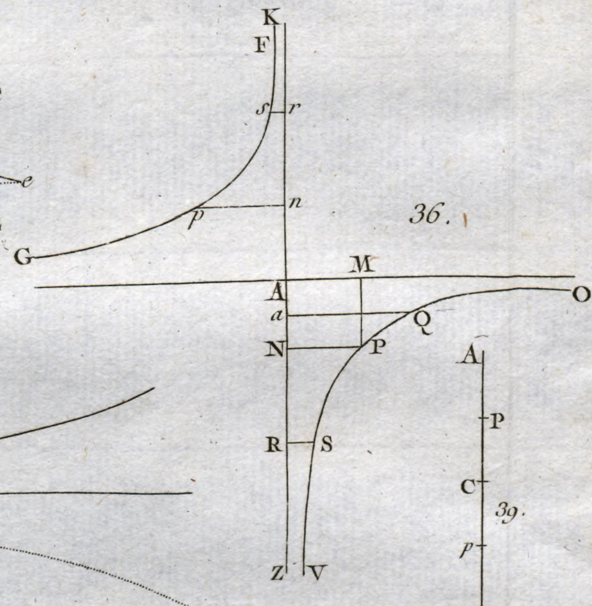


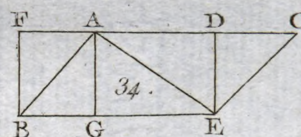


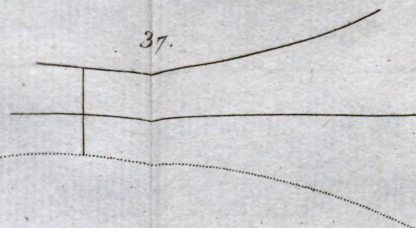

α
F
f
β
E
32.
e
x
R

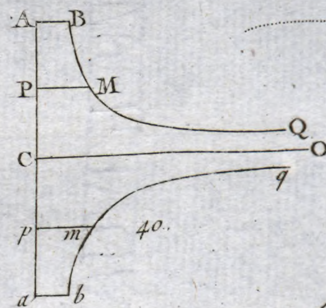

V
N
M
B
35.
R
A
P
Z
T

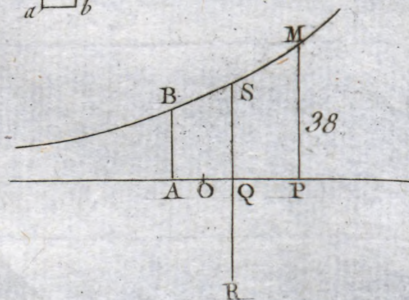

D
A
C
33.
e
f
e
E
B
E

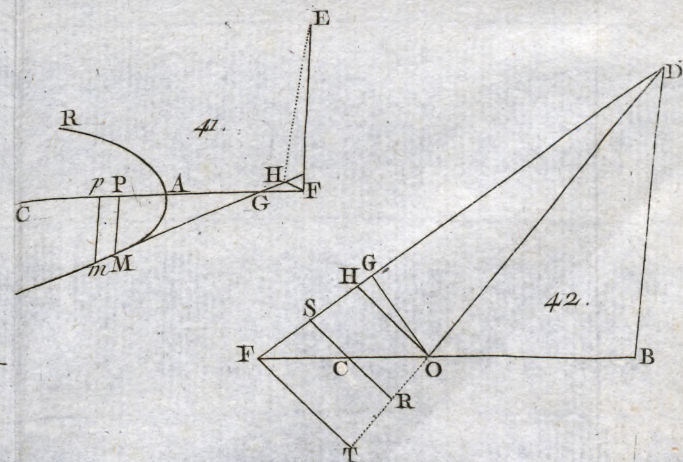

K
F
s
r
n
p
36.
G
M
A
O
a
Q
N
P
A
R
S
P
C
39.
p
Z
V

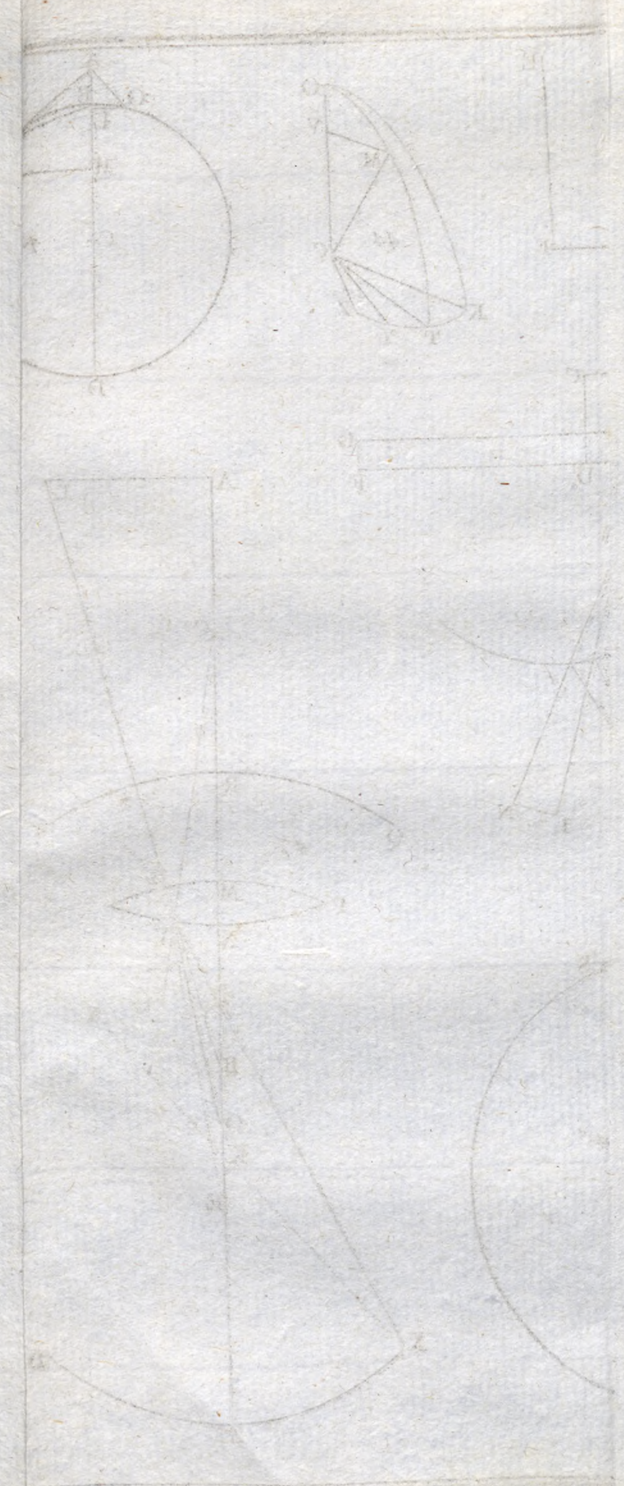

F
A
D
C
34.
B
G
E

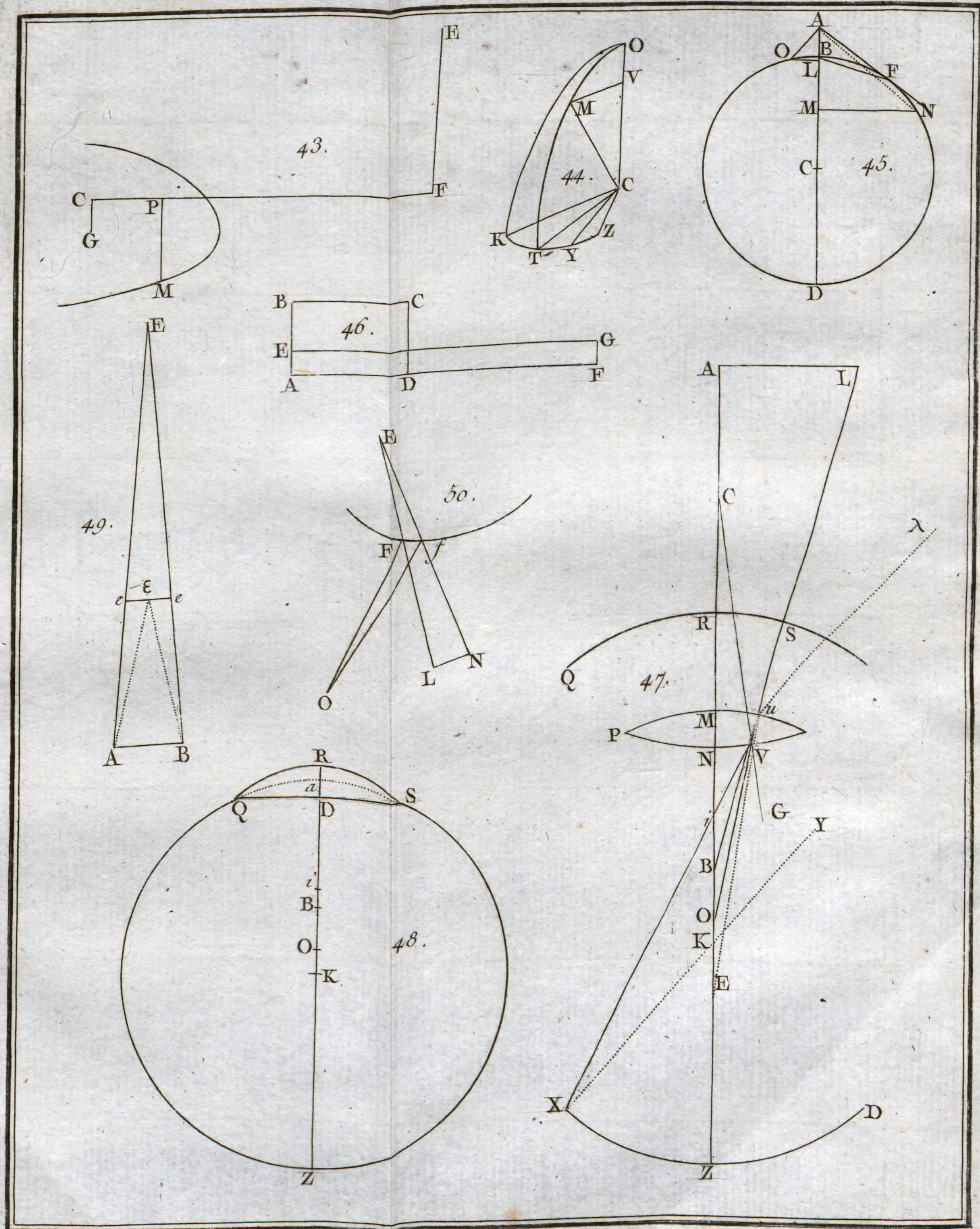

37.

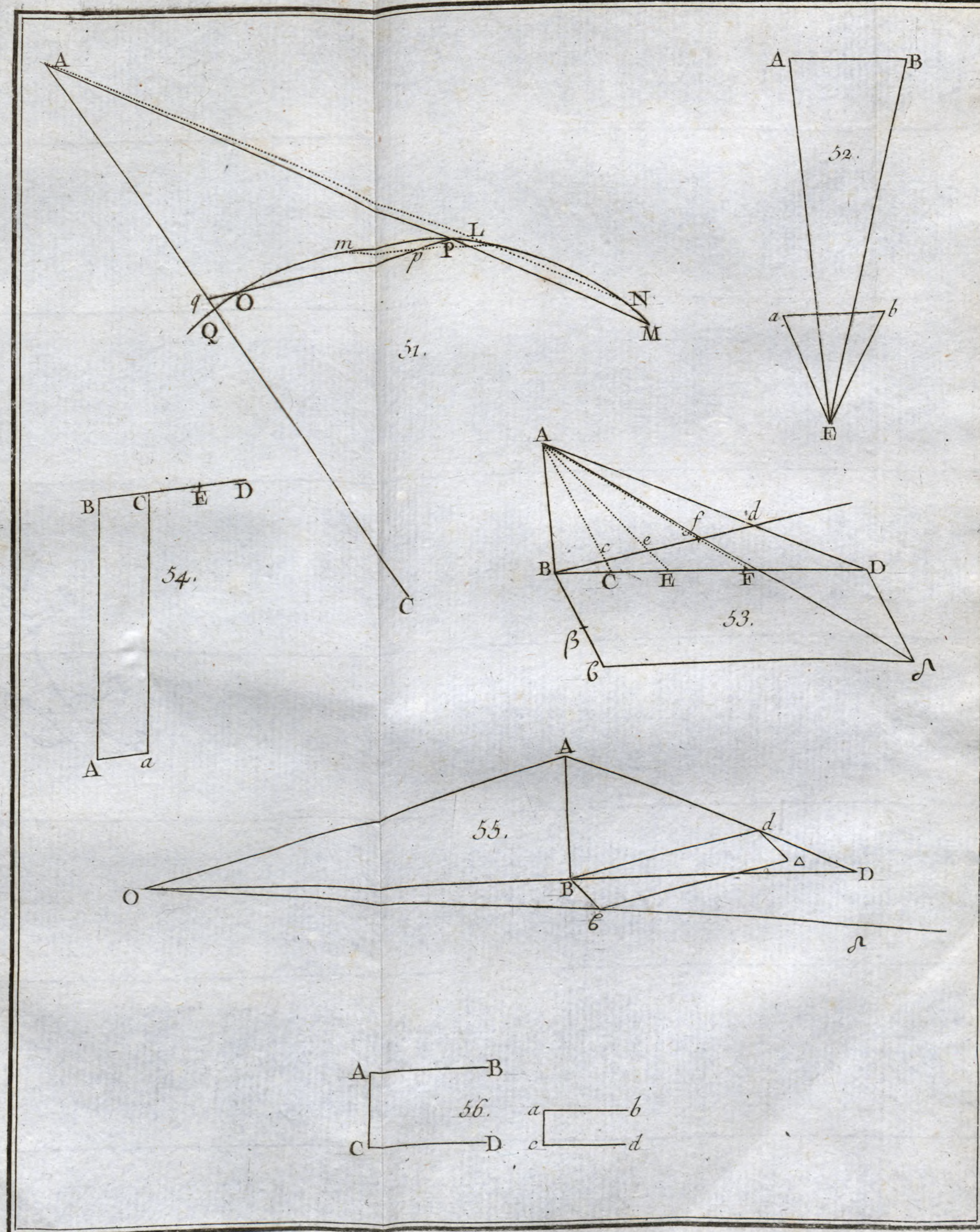

A
B
P
M
Q
C
O
q
p
m
40.
a
b


M
B
S
38
A
O
Q
P
R


E
D
R
41.
p
P
A
H
F
C
G
m
M
H
G
S
42.
F
C
O
B
R
T




43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.


A
L
m
p
P
q
O
Q
N
M
51.
C
A
B
52.
a
b
E
A
d
f
c
e
B
C
E
F
D
β
53.
B
C
E
D
54.
A
a
A
55.
d
Δ
D
O
B
A
B
56.
a
b
C
D
c
d

OPUSCULES MATHÉMATIQUES,

OU

MÉMOIRES sur différens sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, D'OPTIQUE, D'ASTRONOMIE &c.

Par M. D'*ALEMBERT*, *de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suéde, & de l'Institut de Bologne.*

TOME SECOND.



A PARIS,

Chez DAVID, rue & vis-à-vis la grille des Mathurins.

M. DCC. LXI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

TABLE DES MÉMOIRES

Contenus en ce second Tome.



OPUSCULES



OPUSCULES

MATHÉMATIQUES.

DIXIÉME MÉMOIRE.

Réfléxions sur le calcul des Probabilités.

I.



A régle ordinaire de *l'analyse des jeux de hazard*, est celle-ci : *multipliez le gain ou la perte que chaque événement doit produire, par la probabilité qu'il y a que cet événement doit arriver ; ajoutez ensemble tous ces produits, en regardant les pertes comme des gains négatifs ; & vous aurez l'espérance du joueur, ou, ce qui revient au même, la somme*

que ce joueur devroit donner avant le jeu, pour commencer à jouer but-à-but. Aucun Analyste, que je sache, n'a jusqu'ici révoqué cette régle en doute, & tous s'y sont conformés dans les calculs qu'ils ont faits des différentes probabilités. Il se trouve néanmoins des cas où elle paroît être en défaut, & qui vont faire la matiere de quelques réfléxions.

I I.

Le premier de ce cas est celui dont il est fait mention dans le Tome V des Mémoires de l'Académie de Petersbourg. Pierre joue avec Jacques à *croix* ou *pile*, à cette condition, que si Pierre amene *croix* au premier coup, Jacques lui donnera un écu; s'il n'amene *croix* qu'au second coup, deux écus; si au troisiéme coup, quatre écus; si au quatriéme, huit écus, & ainsi de suite en progression Géométrique; on demande l'espérance de Pierre, ou ce qu'il doit donner à Jacques pour jouer avec lui à jeu égal.

Suivant les régles ordinaires, la probabilité que *croix* arrivera au premier coup, est $\frac{1}{2}$, au second coup $\frac{1}{4}$, au troisiéme $\frac{1}{8}$, &c. & ainsi de suite; donc conformément à la régle ci-dessus, l'espérance ou l'enjeu de Pierre seroit $1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} +$ &c. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ &c. à l'infini $= \infty$; c'est-à-dire, que Pierre devroit donner à Jacques avant de commencer le jeu, une somme infinie, pour jouer avec lui à jeu égal. Or, indépendamment de ce qu'une *somme infinie* est une chimere, il n'y a personne

qui voulût donner pour jouer à ce jeu, je ne dis pas une ſomme infinie, mais même une ſomme aſſez modique. La régle paroît donc être en défaut, au moins pour ce cas.

III.

La premiere idée qui ſe préſente pour la juſtifier, eſt de dire, que ſi l'eſpérance où l'enjeu de Pierre ſe trouve infini, c'eſt parce qu'on ſuppoſe tacitement que le jeu doit ou peut durer un tems infini; c'eſt-à-dire, que *croix* peut n'arriver qu'après un nombre infini de jets. Or, dira-t-on, cette ſuppoſition eſt abſurde; car il faudra bien que *croix* arrive enfin après un nombre de jets *fini*, ſi grand qu'on voudra. Le jeu propoſé ne doit donc pas durer toujours, ne le ſauroit même, & par conſéquent l'eſpérance de Pierre n'eſt que finie.

IV.

A cela je réponds d'abord qu'on ſuppoſe gratuitement que *croix* doit arriver *néceſſairement* après un nombre fini de coups; car il eſt dans l'ordre des choſes poſſibles (telles que l'analyſe ordinaire des jeux de hazard les conſidere) que *pile* arrive à tous les coups, & que par conſéquent *croix* n'arrive jamais. L'analyſe des jeux de hazard (telle encore une fois que tous les Mathématiciens l'ont ſuivie juſqu'à préſent) ſuppoſe que toutes les combinaiſons ſont également poſſibles, chacune en particulier. Que l'on joue, par exemple, en 60

coups, au lieu de jouer en un nombre de coups indéfini; le nombre des combinaiſons poſſibles eſt 2^{60}, & ſur ces combinaiſons il y en a une qui n'amenera jamais *croix;* mais cette combinaiſon eſt regardée par les Analyſtes, comme étant auſſi poſſible, qu'aucune des autres combinaiſons priſe en particulier. Il eſt donc poſſible (au moins en ſuivant les principes adoptés juſqu'à préſent par les Analyſtes) que *croix* n'arrive jamais; & par conſéquent on ne doit point reprocher au calcul précédent, ni cette ſuppoſition, ni la conſéquence néceſſaire qui en réſulte, ſavoir une ſomme infinie pour l'eſpérance ou l'enjeu de Pierre; ou bien, ſi on attaque cette ſuppoſition, il faudra néceſſairement réformer, à pluſieurs autres égards, l'analyſe des probabilités; c'eſt ce que nous diſcuterons plus bas.

V.

En ſecond lieu, je veux bien ſuppoſer que *croix* arrivera enfin *néceſſairement* après un nombre fini de coups; il eſt au moins évident qu'on ne ſauroit fixer ce nombre de coups, qu'il eſt *indéterminé* ou *indéfini*; d'où je conclus deux choſes; 1°. que quelque ſomme finie qu'on aſſigne pour l'eſpérance ou l'enjeu de Pierre, cette ſomme pourra être au-deſſous de celle qu'il doit donner réellement à Jacques. Suppoſons, par exemple, qu'on aſſigne trente écus pour l'eſpérance de Pierre; on aura donc ſuppoſé que *croix* doit arriver *néceſſairement* en ſoixante coups; ce qui eſt abſurde. Car il eſt évident (§. précédent) qu'en ſe bornant à conſidérer ce qui eſt ri-

goureuſement poſſible, *pile* peut arriver ſoixante fois de ſuite; & d'ailleurs pourquoi *croix* arriveroit-il *néceſſairement* en ſoixante coups, plutôt qu'en cinquante-neuf ou en ſoixante-un? Il en ſera de même de toute autre ſuppoſition qu'on pourroit faire. 2°. Si on dit que la ſomme qui indique l'eſpérance de Pierre, eſt *finie* & *indéterminée*, on ne fait qu'éluder la queſtion; car il eſt évident qu'on peut ſuppoſer deux joueurs qui jouent enſemble aux conditions propoſées; il eſt évident de plus que Pierre doit avoir à ce jeu un grand avantage, & il s'agit de ſavoir comment eſtimer cet avantage inconnu; car il eſt évident encore que cet avantage n'eſt pas infini, quoique le calcul ſemble le donner plus grand qu'aucun avantage fini. Voilà donc un cas, très-poſſible dans les jeux de hazard, où la régle eſt en défaut; cette régle n'eſt donc pas générale.

V I.

En troiſiéme lieu, je ſuppoſe que l'on joue en un nombre fini de coups, par exemple, en cent coups; on trouvera que Pierre doit donner cinquante écus à Jacques. Or il n'y a point de joueur qui voulût donner cette ſomme en pareil cas; car il faudroit, pour qu'il rattrapât cette ſomme en jouant, que *croix* ne vînt qu'au ſeptiéme coup; & aſſurément Pierre croiroit trop riſquer d'attendre que ce cas arrivât.

V I I.

Un Géometre célébre de l'Académie des Sciences,

plein de ſavoir & de ſagacité, avec lequel je raiſonnois un jour ſur cette queſtion, m'en donna une ſolution qui paroît d'abord ſatisfaiſante, & qui eſt très-ſimple, quoique très-ingénieuſe. » On ne doit point ſuppoſer, me » dit-il, que le nombre des jets ſoit infini, ni même in» déterminé; car Jacques, quelque riche qu'on le ſup» poſe, n'a pas une ſomme infinie en argent à donner » à Pierre; il n'a, & ne peut avoir qu'une certaine quan» tité finie d'argent. Suppoſons-le riche de 2^{99} écus, ſom» me exorbitante, & qui paſſe le vraiſemblable; il eſt » évident qu'il ne pourra jouer au-delà de cent coups; » & qu'ainſi l'eſpérance ou l'enjeu de Pierre eſt cinquante » écus. Voilà ce que Pierre doit donner à Jacques pour » jouer avec Jacques à jeu égal: & en genéral ſi le bien » de Jacques eſt 2^x, ou entre 2^x & 2^{x+1}, il ne peut » jamais y avoir plus de $x+1$ coups poſſibles, & l'eſpé» rance ou l'enjeu de Pierre ſera $\frac{1+x}{2}$ écus «. Telle eſt la ſolution imaginée par ce ſavant Géometre.

VIII.

Mais la remarque faite dans le §. VI, montre, ce me ſemble, l'inſuffiſance de cette ſolution, toute ingénieuſe & toute ſimple qu'elle eſt. Car dans le cas propoſé, où le bien de Jacques eſt ſuppoſé 2^{99} écus, & où l'on joue en cent coups, il eſt bien certain que Pierre croiroit riſquer beaucoup au-delà de ce qu'il doit, en donnant cinquante écus à Jacques. Pourquoi cela? C'eſt, comme

nous l'avons dit, qu'il faudroit, pour que Pierre rattrapât ſa miſe & au-delà, que *croix* n'arrivât qu'au ſeptiéme coup ; que, ſuivant les régles ordinaires du calcul des combinaiſons, il y a 127 contre un à parier que *croix* arrivera plutôt, auquel cas Pierre perdra ſa miſe en partie ou en total ; & qu'une probabilité de 127 contre un eſt ſi petite, qu'on ne doit point riſquer une ſomme d'argent (même aſſez médiocre) vis-à-vis de cette probabilité, quand même le gain qui en pourroit réſulter, ſeroit immenſe. En voici la preuve. Qu'on propoſe à quelque homme que ce ſoit de gagner dix millions à une Loterie de 128 billets, où il n'y a que ce ſeul lot de dix millions ; ſon eſpérance & ſon enjeu par conſéquent, ce qu'il devroit donner pour jouer au pair (ſuivant les régles ordinaires des probabilités) ſeroit $\frac{10000000}{128} =$ 78125 ‡. Cependant quel ſeroit l'homme aſſez inſenſé pour riſquer cette ſomme ?

IX.

Dirat-on que cette ſomme ne peut pas être riſquée par cette ſeule raiſon, qu'étant trop forte, elle feroit une bréche trop conſidérable aux biens du Joueur ? Mais 1°. il s'enſuivra au moins de-là, que quelque grande que ſoit la ſomme eſpérée (qui eſt ici de dix millions) la miſe ne doit pas toujours y être proportionnelle, tout le reſte d'ailleurs égal ; & qu'ainſi il y auroit au moins à cet égard des modifications à donner à la régle, juſqu'à préſent admiſe par tous les Analyſtes, que la

mise doit être proportionnelle à la somme que l'on espere. 2°. Supposons qu'au lieu de dix millions, le lot ou la somme espérée ne soit que de 128 écus, il faudra que le joueur donne un écu pour sa mise ; & quoiqu'un des 128 billets doive sortir de la roue, & que ce billet puisse être absolument celui qui porte le lot, il n'est personne qui en ce cas ne doive regarder sa mise comme de l'argent perdu, par le grand risque qu'elle court. Il est vrai, que si le joueur n'est pas fort pauvre, cette perte l'incommodera peu ; mais enfin c'est toujours une perte ; & dans l'analyse des jeux de hazard, on considere la perte ou le gain d'une maniere absolue, & indépendamment de la fortune des Joueurs.

X.

Que conclure de ces réfléxions ? C'est que *quand la probabilité d'un événement est fort petite, elle doit être regardée & traitée comme nulle ; & qu'il ne faut point multiplier* (comme on l'a prescrit jusqu'à présent) *cette probabilité par le gain espéré, pour avoir l'enjeu ou l'espérance*. Par exemple, que Pierre joue avec Jacques en 100 coups, à cette condition que si Pierre amene *croix* au centiéme coup, & non auparavant, il recevra de Jacques 2^{100} écus : on trouve (en suivant la régle ordinaire) que Pierre devroit donner un écu à Jacques avant le jeu. Or je dis que Pierre ne doit pas donner cet écu ; parce qu'il le perdra *certainement*, & que *croix* arrivera *certainement*

certainement avant le centiéme coup, bien qu'il ne doive pas arriver *néceſſairement*.

X I.

Pour confirmer ce que je viens de dire, je ſuppoſe qu'on jette une piéce en l'air cent fois de ſuite : il eſt certain ; 1°. que le nombre des combinaiſons poſſibles eſt 2^{100}, c'eſt-à-dire, qu'il y a 2^{100} différentes combinaiſons poſſibles de la maniere dont *croix* & *pile* peuvent arriver, lorſqu'on jette la piéce en l'air cent fois de ſuite ; ce qui fait en tout $2^{100} \times 100$ coups. 2°. Que ſi par conſéquent on jette la piéce en l'air $2^{100} \times 100$ fois de ſuite, c'eſt-à-dire, qu'on recommence le jeu 2^{100} fois, il ſera arrivé 2^{100} combinaiſons de *croix* & *pile* pris dans cent jets conſécutifs. 3°. Que par conſéquent chacun des 2^{100} événemens ſe trouvera une fois, ou quelqu'un pluſieurs fois, parmi les 2^{100} combinaiſons que *croix* ou *pile* doivent produire dans ce cas. Or je dis qu'on peut parier ſans rien craindre, que de ces 2^{100} combinaiſons, celle qui amenera *croix* cent fois de ſuite, ou *pile* cent fois de ſuite, n'arrivera pas une ſeule fois dans les 2^{100} qu'on a (*hyp.*) recommencé le jeu, en jettant à chaque jeu la piéce en l'air cent fois de ſuite ; par conſéquent quelqu'une ou pluſieurs des combinaiſons, où *croix* & *pile* ſe trouvent mêlés, arriveront néceſſairement pluſieurs fois dans ces 2^{100} fois. J'ajoute que les combinaiſons qui arriveront le plus ſouvent, ſeront celles où *croix* & *pile* ſe trouveront le plus mêlés,

c'est-à-dire, où *croix* & *pile* ne se trouveront pas un grand nombre de fois de suite; d'où il s'ensuit, ce me semble, qu'on doit regarder les combinaisons où *croix* & *pile* se trouvent mêlés, comme les plus probables & les plus *possibles* de toutes. Pour rendre cela encore plus sensible, je suppose que 2^{100} Joueurs jettent en même-tems un écu en l'air, cent fois de suite; je dis que dans aucun de ces jets, on n'aura cent fois de suite ni *croix* ni *pile*, & que par conséquent il y aura plusieurs jets qui donneront la même chose; & que les jets où *croix* & *pile* sont entremêlés, sans se trouver un grand nombre de fois de suite, seront ceux qui seront répétés.

XII.

C'est qu'il faut distinguer entre ce qui est *métaphysiquement* possible, & ce qui est possible *physiquement*. Dans la premiere classe sont toutes les choses dont l'existence n'a rien d'absurde; dans la seconde sont toutes celles dont l'existence non-seulement n'a rien d'absurde, mais même rien de trop extraordinaire, & qui ne soit dans le cours journalier des événemens. Il est *métaphysiquement* possible, qu'on amene rafle de six avec deux dez, cent fois de suite; mais cela est impossible *physiquement*, parce que cela n'est jamais arrivé, & n'arrivera jamais. Dans le cours ordinaire de la nature, le même événement (quel qu'il soit) arrive assez rarement deux fois de suite, plus rarement trois & quatre fois, & jamais cent fois consécutives; & il n'y a personne

qui en toute ſûreté ne puiſſe parier tout ſon bien, quel que grand qu'il ſoit, que rafle de ſix n'arrivera jamais cent fois de ſuite.

XIII.

On peut donc, ce me ſemble, poſer pour régle, que quand la probabilité eſt fort petite, on doit dans l'uſage ordinaire de la vie, la regarder comme zéro, & la traiter comme telle. Or ſur cela on peut faire les queſtions ſuivantes.

1°. Quel eſt le terme où la probabilité commence à pouvoir être regardée comme nulle? Quelle eſt la fraction qui exprime le premier terme de cette ſuite de probabilités équivalentes à zéro?

2°. Suppoſé qu'on puiſſe fixer ce terme, & que ce ſoit, par exemple, quand la probabilité eſt $\frac{1}{1000}$, comment faudra-t-il eſtimer les probabilités qui différent très-peu de celle-ci, quoiqu'un peu plus grandes, par exemple, les probabilités $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{998}$, &c? S'il ne faut pas regarder ces probabilités comme plus petites qu'elles ne ſont en effet, je demande comment la probabilité $\frac{1}{999}$ devient tout d'un coup $= 0$ dans le cas où elle eſt $\frac{1}{1000}$? L'expreſſion de la probabilité peut-elle paſſer ainſi bruſquement & ſans gradation, d'une expreſſion finie à une valeur nulle? Et s'il faut regarder ces probabilités comme plus petites qu'elles ne ſont, je demande ſuivant quelle loi il faut les diminuer? Si l'Analyſte répond qu'il l'ignore, en ce cas il doit convenir que la régle

générale des probabilités eſt fautive & imparfaite ; ce que nous voulions prouver.

3°. S'il faut diminuer ces probabilités $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{998}$, $\frac{1}{997}$, $\frac{1}{996}$ &c. qui forment une eſpèce de ſerie, juſqu'à quel terme faudra-t-il les diminuer ? S'il ne faut les diminuer que juſqu'à un certain terme, pourquoi faut-il s'arrêter à ce terme-là ? S'il faut diminuer tous les termes, même ceux qui contiennent des fractions aſſez grandes, comme $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. pour lors la régle des probabilités ſe trouvera fautive & imparfaite, même dans le cas où la probabilité ne ſera pas fort petite.

XIV.

En voilà plus qu'il n'en faut, ce me ſemble, pour montrer aux Mathématiciens que la régle générale du calcul des probabilités eſt défectueuſe à certains égards. Je vais tâcher de le faire voir encore par d'autres exemples. Mais auparavant je propoſerai une idée qui m'eſt venue, pour eſtimer dans les cas précédens le rapport des probabilités.

Je ſuppoſe, par exemple, qu'on jette une piéce en l'air quatre fois de ſuite ; on aura 2^4 ou 16 combinaiſons différentes de *croix* & *pile* pris quatre à quatre. Si donc on recommence ce jeu un nombre de fois qui ſoit multiple de 16, ou, ce qui revient au même, ſi 32 ou 64 &c. Joueurs différens jouent à la fois ce jeu, chacun en particulier, en jettant chacun un écu en l'air quatre fois de ſuite ; il eſt évident que quelqu'une ou

quelques-unes des 16 combinaiſons ſe trouveront répétées. Or je crois que les combinaiſons qui ſeront répétées le plus rarement, & qui peut-être n'arriveront point du-tout dans un grand nombre de jets, ſeront celles dans leſquelles *croix* ſe trouve quatre fois de ſuite, ou *pile* quatre fois de ſuite. D'après cette expérience, répétée un grand nombre de fois de ſuite, on pourroit peut-être eſtimer le rapport des probabilités, par le nombre des événemens. Il eſt vrai que le réſultat pourra laiſſer des doutes; & que d'ailleurs l'expérience ſeroit impraticable, ſi le nombre des jets, au lieu d'être de quatre, ainſi qu'on l'a ſuppoſé, étoit beaucoup plus grand, comme de cent; mais voilà, ce me ſemble, le ſeul moyen de parvenir en ce cas à un réſultat qui ſoit au moins approchant du vrai.

XV.

Venons aux autres exemples que j'ai promis dans l'Article précédent, du peu d'éxactitude du calcul ordinaire des probabilités.

Dans ce calcul, en combinant tous les événemens poſſibles, on fait deux ſuppoſitions qui peuvent, ce me ſemble, être conteſtées.

La premiere de ces ſuppoſitions eſt, que ſi un même événement eſt déja arrivé pluſieurs fois de ſuite, par exemple, ſi au jeu de *croix* ou *pile*, *croix* eſt arrivé trois fois de ſuite, il eſt également probable que *croix* ou *pile* arriveront au quatriéme coup? Or je demande ſi cette

ſuppoſition eſt bien vraie, & ſi le nombre de fois que *croix* eſt déja arrivé de ſuite par l'hypothèſe, ne rend pas plus probable l'arrivée de *pile* au coup ſuivant? Car enfin il n'eſt pas vraiſemblable, il eſt même *phyſiquement* impoſſible que *pile* n'arrive jamais. Donc plus *croix* ſera arrivé de fois conſécutives, plus il eſt vraiſemblable que *pile* doit arriver le coup d'enſuite. Si cela eſt, comme il me paroît qu'on ne ſauroit guères en diſconvenir, la régle des combinaiſons des événemens poſſibles eſt donc encore défectueuſe à cet égard.

X V I.

Une autre ſuppoſition que l'Analyſe fait d'ordinaire, & qui a du rapport à la précédente, c'eſt que dans le nombre des combinaiſons poſſibles, celle qui amenera pluſieurs fois de ſuite le même événement, eſt auſſi poſſible que chacune des autres en particulier. Par exemple, dans un jeu où on doit jouer à *croix* ou *pile* en cent coups, on regarde la combinaiſon qui amenera *croix* cent fois de ſuite, comme auſſi poſſible que chacune de celles où *croix* & *pile* ſeront mêlés. Or je demande ſi cette ſuppoſition eſt bien juſte; puiſqu'il eſt *phyſiquement* certain (§. X & XI.) que *croix* n'arrivera jamais cent fois de ſuite, & qu'il ne l'eſt pas qu'une combinaiſon où *croix* & *pile* ſeroient mêlés à volonté, n'arrivera pas. On peut réduire ceci à la queſtion ſuivante. Que *A* repréſente *croix* & *B pile*, la combinaiſon *A A A A A A A A* &c. doit-elle être regardée comme

aussi possible que toute autre combinaison particuliere à volonté, par exemple *AABABABB* &c. où *croix* & *pile* sont mêlés sans ordre & sans suite? C'est ce que je ne crois pas, par la raison que j'ai déja dite plus haut; savoir, que la variété des événemens successifs est un phénomène constant de la nature; & que leur similitude constante ou répétée un grand nombre de fois, est au contraire un phénomène qui n'arrive jamais.

XVII.

Or si on ne doit pas regarder toutes les combinaisons comme également possibles; si on doit rejetter, ou au moins subordonner aux autres, celles qui ameneroient le même événement un très-grand nombre de fois de suite, quelle régle doit-on se faire sur ce sujet? Doit-on étendre cette restriction aux combinaisons qui ameneroient le même événement un petit nombre de fois de suite, par exemple, trois ou quatre fois? Et si on ne doit pas l'étendre jusqu'à ces combinaisons, quelle est celle où il faudra commencer? Voilà, ce me semble, des questions bien dignes d'exercer les Mathématiciens, supposé néanmoins qu'il soit possible de les résoudre.

XVIII.

Autre inconvénient où l'on tombe dans le calcul des Probabilités. J'ai déja remarqué dans l'*Encyclopédie*, au mot CROIX ou PILE, que dans ce calcul on fait souvent une énumération fautive des événemens possibles.

Par exemple, on demande combien on peut parier d'amener *croix* en deux coups? » Toutes les combinaisons » possibles, répond-on, sont celles-ci:

Premier coup.	Second coup.
Croix	*Croix*
Croix	*Pile*
Pile	*Croix*
Pile.	*Pile.*

» Or de ces quatre combinaisons la derniere seule fait » perdre, & les trois autres font gagner; la probabilité » est donc de trois contre un «.

Il est aisé de voir que cette énumération est fautive. Car dès que *croix* sera arrivé au premier coup, le jeu est fini, on n'en jouera pas un second; & ainsi les deux premieres combinaisons *croix croix*, *croix pile*, se réduisent à *croix* seule. Il n'y a donc que trois coups possibles;

Premier coup.	Second coup.
Croix	
Pile	*Croix*
Pile	*Pile*

D'où j'ai conclu à l'endroit cité, que la probabilité étoit seulement de deux contre un, & non pas de trois contre un. J'examinerai plus bas si j'ai eu raison de réduire la probabilité au rapport de deux à un; mais il est au moins bien certain que la maniere dont on prouve qu'elle est de trois à un, est un paralogisme.

XIX.

XIX.

Le paralogisme est encore plus grand, si l'on parie d'amener *croix*, non pas en deux coups, mais en cent coups de suite. Car dans ce cas, en suivant le raisonnement ordinaire, on suppose que la combinaison qui ameneroit *croix* cent fois de suite, est aussi possible qu'aucune des autres en particulier. Or cette supposition (§. XVI.) est au moins très-susceptible de contestation. Il est donc au moins démontré, que cette maniere de résoudre le Problême est incertaine, & peut-être fautive.

XX.

Je sai qu'on peut envisager la chose d'une autre maniere, & faire le raisonnement suivant. » La probabilité » que *croix* arrivera au premier coup est $\frac{1}{2}$; la probabi- » lité que *pile* arrivera au premier coup, est pareillement » $\frac{1}{2}$; or dans ce second cas, la probabilité que *croix* ar- » rivera au second coup est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, & celle que *pile* arri- » vera au second coup est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$; ainsi la somme des pro- » babilités favorables, est à celle des probabilités défa- » vorables, comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2}$ est à $\frac{1}{2 \cdot 2}$, ou comme » 3 à 1. Donc la probabilité est toujours comme trois à » un, même en ne considérant que les trois coups réel- » lement possibles; savoir, *croix* au premier coup; *pile* » & *croix* au premier & au second coup; ou bien *pile* » & *pile* au premier & au second coup «.

XXI.

Je réponds en premier lieu, que je ne ſai ſi on doit eſtimer par $\frac{1}{2 \cdot 2}$ ou $\frac{1}{4}$, la probabilité qu'on amenera *pile* ou *croix* au ſecond coup. Je conviens qu'il eſt incertain ſi on jouera un ſecond coup ou non; & que la probabilité qu'on jouera ce ſecond coup eſt $\frac{1}{2}$: mais la probabilité qu'on amenera *pile* ou *croix* au ſecond coup, ſuppoſe *néceſſairement* qu'on jouera ce ſecond coup: ainſi, multiplier la probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener *croix* ou *pile* au ſecond coup (en ſuppoſant qu'on joue ce ſecond coup), par la *probabilité* $\frac{1}{2}$ qu'on jouera ce ſecond coup, n'eſt-ce pas regarder à la fois ce ſecond coup comme devant avoir lieu, & comme étant néanmoins ſimplement probable? Ce qui me paroît impliquer contradiction. Sans difficulté $\frac{1}{2}$ eſt la probabilité d'amener *croix* à un coup quelconque, en ſuppoſant qu'on joue ce coup; mais s'il eſt incertain qu'on joue ce coup, ſi la probabilité qu'on le jouera, eſt $\frac{1}{2}$, alors multiplier la premiere probabilité $\frac{1}{2}$ par la ſeconde $\frac{1}{2}$, n'eſt-ce pas multiplier l'une par l'autre deux probabilités de différente nature, une probabilité (ſavoir la premiere) qui reſte toujours $=\frac{1}{2}$, & une probabilité (ſavoir la ſeconde) qui ne reſte pas toujours $\frac{1}{2}$, mais qui devient *certitude* dès qu'on la multiplie par la premiere? En effet la probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener *croix* ou *pile*, ſuppoſe néceſſairement qu'on jouera le coup; ainſi la combinaiſon de cette probabilité avec la ſeconde fait changer à celle-ci de nature, & la

ſuppoſe *certaine*, de ſimplement *probable* qu'elle étoit auparavant?

XXII.

Je réponds en ſecond lieu, que cette maniere d'eſtimer les probabilités, eſt ſujette à toutes les difficultés dont nous avons parlé au commencement de ce Mémoire. Car ſuppoſons qu'on joue, par exemple, en cent coups; la probabilité que *croix* n'arrivera qu'au centiéme coup, ſeroit ſuivant cette méthode $\frac{1}{2^{99}}$; ce qui ſuppoſe que la probabilité que *pile* arrivera 99 fois de ſuite, eſt $\frac{1}{2^{99}}$. Or je demande s'il eſt phyſiquement poſſible que *pile* arrive 99 fois de ſuite; & ſi par conſéquent on ne doit pas (§. XII.) regarder la probabilité $\frac{1}{2^{99}}$ comme égale à zéro? Si cela eſt, il s'enſuivra; 1°. que la régle eſt fautive, au moins dans le cas où on joue un grand nombre de coups de ſuite; 2°. qu'elle eſt au moins fort incertaine dans les autres, puiſqu'il n'y a pas de raiſon, par exemple, de ne pas diminuer la probabilité $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{16}$ de quelque petite partie, ſi la probabilité $\frac{1}{2^{99}}$ doit être regardée comme nulle.

XXIII.

Je viens maintenant aux difficultés qu'on peut faire ſur la méthode que nous avons donnée Art. XVIII,

pour déterminer le rapport des probabilités dans le cas où l'on joue à *croix* ou *pile* en deux coups. On convient d'abord (voyez l'*Encyclopédie* au mot GAGEURE) que les trois coups

Croix
Pile Croix
Pile Pile

sont à la vérité les seuls possibles; mais on prétend qu'ils ne le sont pas également; » car, dit-on, la probabilité » d'amener *croix* au premier coup est égale à celle d'amener *pile* au premier coup. Or la probabilité d'amener » *pile* au premier coup, est double de celle d'amener *pile* » au premier coup & *croix* au second, ou *pile* au premier coup & *pile* au second. Donc &c. «

Pour développer en quoi consiste, selon moi, le vice de ce raisonnement, j'emprunterai le langage des Logiciens; & je dirai que dans cet argument le *moyen terme* n'est pas le même dans les deux Propositions. Car le moyen terme dans la premiere Proposition, est la probabilité d'amener *pile* au premier coup, *avant d'avoir joué ce premier coup*. Dans la seconde Proposition, le moyen terme est la probabilité d'amener *pile* au premier coup, *comparée à la probabilité d'amener croix* ou *pile au second coup*. Or cette derniere probabilité (celle d'amener *croix* ou *pile* au second coup) suppose que le premier coup est joué, & qu'il a donné *pile*; ainsi cette derniere probabilité suppose que la premiere probabilité (celle d'amener *pile* au premier coup) n'est plus une *probabilité*,

mais une *certitude*. Le *moyen terme* eſt donc réellement différent dans les deux Propoſitions. En un mot il y a cette différence entre le coup *croix* & le coup *pile*, arrivant l'un ou l'autre au premier coup, que le coup *croix* n'amene point de ſecond coup, au lieu que le coup *pile* en amene néceſſairement un autre; ainſi il ne faut point comparer d'abord la probabilité de *croix* au premier coup, avec celle de *pile* au même premier coup, & enſuite la probabilité de *pile* au premier coup, avec la probabilité de *croix* ou *pile* au ſecond coup; mais la probabilité de *croix* au premier coup, avec celle de *pile* & *croix* au premier & ſecond coup, ou de *pile* & *pile* aux mêmes premier & ſecond coups.

XXIV.

Je ne voudrois pas cependant regarder en toute rigueur les trois coups dont il s'agit, comme également poſſibles. Car 1°. il pourroit ſe faire en effet (& je ſuis même porté à le croire), que le cas *pile croix* ne fût pas éxactement auſſi poſſible que le cas *croix* ſeul; mais le rapport des poſſibilités me paroît inapprétiable. 2°. Il pourroit ſe faire encore que le coup *pile croix* fût un peu plus poſſible que *pile pile*, par cette ſeule raiſon que dans le dernier le même effet arrive deux fois de ſuite; mais le rapport des poſſibilités (ſuppoſé qu'elles ſoient inégales), n'eſt pas plus facile à établir dans ce ſecond cas, que dans le premier. Ainſi il pourroit très-bien ſe faire que dans le cas propoſé, le rapport des probabilités ne fût ni de 3 à 1, ni de 2 à 1 (comme nous

l'avons supposé dans l'*Encyclopédie*) mais un incommensurable ou inapprétiable, moyen entre ces deux nombres. Je crois cependant que cet incommensurable approchera plus de 2 que de 3, parce qu'encore une fois il n'y a que trois cas possibles, & non pas quatre. Je crois de même & par les mêmes raisons, que dans le cas où l'on joueroit en trois coups, le rapport de 3 à 1, que donne ma méthode, est plus près du vrai, que le rapport de 7 à 1, donné par la méthode ordinaire, & qui me paroît exorbitant.

Pour bien fixer l'état de la question, tenons-nous en au cas où l'on joue en deux coups. Il est d'abord certain que la probabilité d'amener *croix* au premier coup, est égale à celle d'amener *pile* au même premier coup; la difficulté se réduit à savoir; 1°. quel est le rapport de la probabilité d'amener *pile* au premier coup, à la probabilité d'amener *croix* au second coup, quand on aura amené *pile* au premier, & que par conséquent *il devra y avoir* un second coup; 2°. si la probabilité d'amener *pile* au second coup, quand on aura amené *pile* au premier coup, est égale ou un peu plus petite que celle d'amener *croix* au second coup, quand on aura amené *pile* au premier; & si ces probabilités ne sont pas égales, quel en est le rapport?

XXV.

Lorsqu'on joue en plus de deux ou trois coups, alors le rapport des possibilités ou probabilités devient encore

infiniment plus difficile à déterminer. Il eſt évident en effet que ſi on joue en quatre coups, par exemple, il eſt plus probable qu'on amenera *croix* au premier coup, que *pile*, *pile*, *pile*, *pile* en quatre coups conſécutifs. Or le rapport de ces poſſibilités eſt encore, ſelon moi, inappréciable, quoique ces poſſibilités ſoient réellement différentes. Je dis plus: il peut ſe faire que *pile*, *pile*, *pile*, *croix*, ſoient plus poſſibles (§. XV.) que *pile* 4 fois de ſuite: or comment comparer ces probabilités? Comment aſſigner leur rapport?

XXVI.

C'eſt par cette conſidération de la différente poſſibilité des cas (lorſque le nombre des jets eſt tant ſoit peu conſidérable) que je vais répondre à une objection qui m'a été faite, & qu'on peut voir dans l'Art. GAGEURE de l'Encyclopédie. Il s'enſuivroit, dit-on, une abſurdité de ma maniere de compter les probabilités; ſavoir, qu'on ne pourroit jamais parier avec avantage, d'amener une des faces A, d'un dez à trois faces A, B, C, en tant de coups qu'on voudroit. Car ſoit n ce nombre de coups, on trouveroit toujours que la probabilité eſt de $2^n - 1$ contre 2^n.

Par exemple, ſi $n = 3$, on trouvera que les combinaiſons favorables ſont A, BA, CA, BBA, BCA, CCA, CBA; & que les combinaiſons défavorables ſont BBB, BBC, BCB, BCC, CBB, CBC, CCC, CCB; ce qui donne le rapport de 7 à 8, ou de $2^3 - 1$ à 2^3.

Cette objection suppose que tous les cas sont également possibles dans l'énumération faite à ma maniere; or ils ne le sont pas; car *A* au premier coup est plus possible, par exemple, que *B* quatre fois de suite. Il est vrai que je crois difficile d'en assigner le rapport, & que la théorie ordinaire des Analystes sur cet objet me paroît peu satisfaisante; mais il suffit, pour répondre à l'objection, que tous les cas ne soient pas également possibles.

XXVII.

Concluons de toutes ces réfléxions; 1°. que si la régle que j'ai donnée dans l'*Encyclopédie* (faute d'en connoître une meilleure) pour déterminer le rapport des probabilités au jeu de *croix* & *pile*, n'est point éxacte à la rigueur, la régle ordinaire pour déterminer ce rapport, l'est encore moins; 2°. que pour parvenir à une théorie satisfaisante du calcul des probabilités, il faudroit résoudre plusieurs Problêmes qui sont peut-être insolubles; savoir, d'assigner le vrai rapport des probabilités dans les cas qui ne sont pas également possibles, ou qui peuvent n'être pas regardés comme tels; de déterminer quand la probabilité doit être regardée comme nulle; de fixer enfin comment on doit estimer l'espérance ou l'enjeu, selon que la probabilité est plus ou moins grande.

XXVIII.

Je ne parle point ici des considérations relatives à l'état &

& à la fortune des joueurs; considérations essentielles sans doute à faire, mais qui demanderoient presqu'autant de régles que de cas particuliers. C'est d'après ces considérations qu'on a essayé de résoudre dans le To. V. des Mém. de Petersbourg, la question proposée ci-dessus Art. II. Les vûes qu'on propose sur cela, sont fines & ingénieuses. Mais il y avoit peut-être d'autres réfléxions plus simples à faire sur cette question, plus relatives à la question prise en elle-même, & plus indépendantes de l'état des joueurs; & ce sont, ce me semble, celles que nous avons faites au commencement de ce Mémoire, & qui ont fait naître nos autres doutes sur le calcul des probabilités. Ces doutes m'ont paru dignes d'être proposés aux Mathématiciens Philosophes. J'ai tout lieu de croire qu'ils en seront frappés comme moi, s'ils les examinent sans prévention.

Fin du dixiéme Mémoire.





ONZIÉME MÉMOIRE.

Sur l'application du Calcul des Probabilités à l'inoculation de la petite Vérole (a).

ON a tant écrit depuis quelques années pour & contre l'inoculation, & principalement en sa faveur, que le Public doit être aujourd'hui plus que suffisamment instruit sur ce sujet, & par conséquent fatigué d'avance de tout ce qu'on pourroit ajouter encore, pour éclaircir ou pour embrouiller la question. J'ai donc tout lieu de craindre que ce Mémoire n'ennuye déja par son seul titre ceux qui me font l'honneur de m'entendre. Je me propose au moins de ne pas les ennuyer long-tems; & pour leur tenir parole, j'entre promptement en matiere.

Cet écrit aura deux objets: 1°. de prouver que dans les calculs qu'on a faits jusqu'à présent en faveur de l'inoculation, on n'a point encore, ce me semble, envisagé la question sous son véritable point de vûe: 2°. que la

(a) Ce Mémoire a été lû à l'Assemblée publique de l'Académie Royale des Sciences, le 12 Novembre 1760.

difficulté, & peut-être l'impoſſibilité de réduire au calcul les avantages de l'inoculation, n'eſt point une raiſon pour la proſcrire.

On n'inocule gueres avant l'âge de quatre ans; depuis cet âge juſqu'au terme ordinaire de la vie, la petite Vérole naturelle détruit, ſelon les Inoculateurs, environ la ſeptiéme partie du genre humain (*A*); au contraire, ſelon eux, l'inoculation enleve à peine une victime ſur trois cens (*B*). Je ne prétends point leur conteſter ces faits, & je ne m'arrête qu'à la conſéquence qu'ils en tirent; donc, diſent-ils, le riſque de mourir de la petite Vérole naturelle eſt à celui de mourir de la petite Vérole inoculée, comme 300 à 7, c'eſt-à-dire, 40 à 50 fois plus grand.

Cette conſéquence, ainſi préſentée, peut être attaquée avec quelqu'apparence de droit par les adverſaires de l'inoculation. Car en ſuppoſant, diront-ils, que le nombre de ceux qui périſſent de la petite Vérole, ſoit 40 ou 50 fois plus grand que le nombre de ceux qui meurent de l'inoculation, s'enſuit-il que les deux riſques ſoient entr'eux dans le même rapport? La nature de l'un & de l'autre eſt bien différente. Quelque petit qu'on veuille ſuppoſer le riſque de mourir de l'inoculation, celui qui ſe fait inoculer ſe ſoumet à ce riſque dans le court eſpace de quinze jours, dans celui d'un mois tout

(*A*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.
(*B*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

au plus : au contraire le risque de mourir de la petite Vérole naturelle, se répand sur tout le tems de la vie, & en devient d'autant plus petit pour chaque année & pour chaque mois. Si l'on veut faire, continueront-ils, un parallèle éxact des deux risques, il faut que les tems soient égaux ; il faut comparer le risque de mourir de l'inoculation, non pas vaguement & en général au risque de mourir de la petite Vérole naturelle dans tout le cours de la vie, mais au danger qu'on court de mourir de cette maladie pendant le même-tems où l'on s'expose à mourir de l'inoculation, c'est-à-dire, dans l'espace de quinze jours ou d'un mois.

Il faut avouer que si on admettoit cette maniere de comparer les deux risques, elle donneroit beaucoup d'avantage aux adversaires de l'inoculation. En effet, on ne peut raisonnablement supposer (car on seroit démenti par les faits) que la petite Vérole emporte par mois (année commune) la trois centiéme partie du genre humain ; donc le nombre des victimes que la petite Vérole naturelle feroit périr en un mois, est beaucoup moindre que le nombre de celles qui seroient sacrifiées à l'inoculation. Donc on court moins de risque de mourir en un mois de la petite Vérole naturelle qu'on attend, que de la petite Vérole qu'on se donne. Or ne peut-on pas, diront les adversaires de l'inoculation, faire à chaque mois un raisonnement semblable ? Donc, ajouteront-ils, dans tout le cours de la vie, on ne pourra parvenir à aucun mois où l'inoculation soit réellement moins

à craindre que la petite Vérole naturelle ; par conſéquent on ſera toujours plus ſage d'attendre la petite Vérole que de ſe la donner (*C*).

Cet argument, qui n'a point encore été propoſé, que je ſache, d'une maniere auſſi frappante, a quelque choſe de ſpécieux. Cependant ſi le calcul des Inoculateurs eſt défectueux en ce qu'on y compare deux riſques dont la durée eſt différente, celui des adverſaires de l'inoculation pêche auſſi par le même côté, quoiqu'à la vérité ſous un autre point de vûe. Celui qui ſe fait inoculer, court, ſi l'on veut, plus de riſque de mourir de la petite Vérole dans le mois, que s'il attendoit cette maladie ; mais le mois étant paſſé, le riſque une fois couru s'éteint, & l'inoculé en eſt délivré ; celui au contraire qui attend la petite Vérole, court, ſi l'on veut, pour chaque mois un moindre riſque que l'inoculé ; mais le mois fini, le riſque ſe renouvelle, & peut même devenir de jour en jour plus grand, au moins juſqu'à un certain âge.

Ainſi, pour ſavoir ce qu'on gagne ou ce qu'on riſque à ſe faire inoculer, il ne ſuffit pas d'avoir égard au danger que l'on court en un mois de mourir de la petite Vérole naturelle ; il faut ajouter à ce danger celui que l'on court de mourir de la même maladie dans les mois ſuivans, juſqu'à la fin de la vie.

C'eſt ici que la difficulté du calcul commence à ſe faire ſentir. Non-ſeulement on n'a point encore d'ob-

(C) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

ſervations ſuffiſantes pour conſtater au juſte, ni même à-peu-près, quel eſt le riſque qu'on court à chaque âge de mourir de la petite Vérole naturelle dans le courant d'un mois : mais quand on pourroit apprétier éxactement ce danger, pour chaque mois pris ſéparément, comment apprétier enſuite le riſque total, réſultant de la ſomme de ces riſques particuliers, qui s'affoibliſſent en s'éloignant, non-ſeulement par la diſtance où on les voit, diſtance qui tout-à-la-fois les rend incertains, & en adoucit la vûe, mais par l'eſpace de tems qui doit les précéder, & durant lequel on doit jouir de l'avantage de vivre? Il faudroit pouvoir déterminer ſuivant quel rapport un riſque de cette eſpèce diminue, quand on l'enviſage dans le lointain, & fuyant, pour ainſi dire, devant nous. Problême qui me paroît inſoluble, & dont la ſolution d'ailleurs, quand elle ſeroit poſſible, ſeroit vraiſemblablement différente pour chaque individu, eû égard aux circonſtances où il ſe trouve (*D*).

Un très-grand Géometre, qui nous a donné ſur l'inoculation un ſavant Mémoire Mathématique, a cherché à répandre ſur ce ſujet toute la lumiere dont il l'a cru ſuſceptible.

M. Daniel Bernoulli ſuppoſe d'abord, que parmi tous ceux qui n'ont pas eû la petite Vérole, & qui ſont de même âge, cette maladie en attaque conſtamment un huitiéme chaque année; & qu'il périſſe auſſi un huitiéme

(*D*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

de ceux qui en ſont attaqués. D'après cette hypothèſe, il détermine, par une Analyſe très-ingénieuſe, la loi de la mortalité cauſée par la petite Vérole naturelle. Il ſuppoſe enſuite que l'inoculation enleve une victime ſur 200, & il en déduit la loi de mortalité dans l'hypothèſe de l'inoculation : comparant enfin les réſultats que les deux hypothèſes fourniſſent, il détermine pour chaque âge le tems qu'on peut eſpérer de vivre de plus, en ſe faiſant inoculer, qu'en attendant la petite Vérole.

Quelques éloges que cette théorie mérite, par l'habileté & la fineſſe avec laquelle l'Auteur l'a développée, elle laiſſe, ce me ſemble, beaucoup à deſirer encore.

En premier lieu, la ſuppoſition que fait l'illuſtre Mathématicien ſur le nombre de perſonnes de chaque âge qui prennent la petite Vérole, & ſur le nombre de ceux qui en meurent, paroît abſolument gratuite. Il n'eſt nullement certain, il eſt même plus que douteux, pour ne rien dire de plus, que la petite Vérole attaque conſtamment (à quelque âge que ce ſoit) la huitiéme partie de ceux qui n'ont pas eû cette maladie; & il eſt plus douteux encore qu'elle faſſe périr conſtamment (à quelque âge que ce ſoit) la huitiéme partie de ceux qu'elle attaque. Il faudroit ſavoir de plus, ſi l'inoculation emporte toujours, comme on le ſuppoſe, la même partie conſtante des inoculés, à quelque âge qu'on les inocule (*E*).

J'avouerai cependant que s'il n'y avoit que des diffi-

(E) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

cultés de cette eſpéce, qui empêchaſſent de fixer par le calcul les avantages de l'inoculation, ces difficultés n'auroient lieu, que vû l'imperfection actuelle de nos connoiſſances ſur cette matiere, & le petit nombre d'obſervations certaines qu'on a recueillies juſqu'à préſent. En formant avec le tems des tables éxactes de ceux qui prennent la petite Vérole à chaque âge, de ceux qui en meurent, & du ſort des inoculés, on parviendroit dans la ſuite à une connoiſſance préciſe de la mortalité du genre humain, dans l'hypothèſe qu'on laiſſe agir la petite Vérole naturelle, & dans l'hypothèſe de l'inoculation; & on auroit la différence de mortalité dans les deux cas.

Mais qu'apprendra-t-on par cette différence de mortalité? On apprendra, je le veux, que *la vie moyenne* de ceux qui ſe font inoculer, c'eſt-à-dire, le tems que chacun d'eux peut raiſonnablement eſpérer de vivre après avoir ſubi l'inoculation, ſurpaſſe la vie moyenne de ceux du même âge qui prennent le parti d'attendre la petite Vérole; on déterminera, pour chaque âge, de combien la vie moyenne dans le premier cas eſt plus grande que dans le ſecond; & par conſéquent on aura, en comparant ces deux riſques, le tems qu'on peut eſpérer d'ajouter à ſa vie en ſe faiſant inoculer.

Or cette connoiſſance ne me paroît pas ſuffire pour fixer d'une maniere ſatisfaiſante les avantages de l'inoculation. Afin de me faire mieux entendre, j'appliquerai à un exemple le raiſonnement que je vais faire. Je

ſuppoſe

ſuppoſe que la vie moyenne d'un homme de trente ans, ſoit trente autres années, c'eſt-à-dire, que, ſuivant les tables de mortalité connues, il puiſſe raiſonnablement eſpérer de vivre encore trente ans, en s'abandonnant à la nature, & en ne ſe faiſant point inoculer. Je ſuppoſe enſuite, qu'en ſe ſoumettant à cette opération, ſa vie moyenne ſoit de 34 ans (*F*), c'eſt-à-dire, de quatre ans de plus que s'il attendoit la petite Vérole. Je ſuppoſe enfin, avec M. Bernoulli, que le riſque de mourir de l'inoculation ſoit de 1 ſur 200. Cela poſé, il me ſemble que pour apprétier l'avantage de l'inoculation, il faut comparer, non la vie moyenne de 34 ans à la vie moyenne de trente; mais le riſque de 1 ſur 200, auquel on s'expoſe de mourir en un mois par l'inoculation (& cela à l'âge de trente ans, dans la force de la ſanté & de la jeuneſſe), à l'avantage éloigné de vivre quatre ans de plus au bout de ſoixante ans, lorſqu'on ſera beaucoup moins en état de jouir de la vie.

En un mot, ſi on admet les ſuppoſitions précédentes, celui qui ſe fait inoculer, eſt à-peu-près dans le cas d'un Joueur, qui riſque un contre deux cens de perdre tout ſon bien dans la journée, pour l'eſpérance d'ajouter à ce bien une ſomme inconnue & même aſſez petite, au bout d'un nombre d'années fort éloigné, & lorſqu'il ſera beaucoup moins ſenſible à la jouiſſance de cette augmentation de fortune. Or comment comparer ce riſque préſent à cet

(F) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

avantage inconnu & éloigné ? C'est sur quoi l'Analyse des probabilités ne peut rien nous apprendre. Toutes les régles de cet Analyse n'enseignent qu'à comparer un risque présent ou proche, à un avantage également présent ou proche, & non un risque présent à un avantage qui diminue par sa distance même, sans qu'on puisse estimer au juste, ni même à-peu-près, suivant quelle loi se fait cette diminution (*G*).

Voilà, il n'en faut point douter, ce qui rend tant de personnes, & sur-tout tant de meres, peu favorables parmi nous à l'inoculation. Le raisonnement que nous venons de développer, elles le font implicitement; sans pouvoir comparer éxactement leur crainte à leur espérance, elles prennent acte, si on peut parler ainsi, de l'aveu que font les Inoculateurs, qu'on peut mourir de la petite Vérole artificielle; elles voyent l'inoculation comme un péril instant & prochain de perdre la vie en un mois, & la petite Vérole comme un danger incertain, & dont on ne peut assigner la place dans le cours d'une longue vie. Ne pouvant donc faire un parallèle éxact des deux risques, & en fixer le rapport, la présence du premier les frappe plus que la grandeur incertaine du second; & l'on sait combien la présence ou la proximité d'un danger qu'on craint, ou d'un avantage qu'on espere, a de poids pour déterminer la multitude. Jouir du présent, & s'inquiéter peu de l'avenir, voilà la Logique

(G) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

commune; Logique moitié bonne, moitié mauvaiſe, dont il ne faut pas eſpérer que les hommes ſe corrigent.

Pour rendre encore plus ſenſible l'impoſſibilité d'appliquer à cette matiere d'une maniere préciſe le calcul des probabilités, & pour développer même les ſophiſmes qu'on pourroit faire à ce ſujet, je joindrai ici le raiſonnement ſuivant, auquel je prie qu'on faſſe attention. Si l'inoculation étoit avantageuſe par cette conſidération ſeule, que la vie moyenne des inoculés eſt plus grande que celle des autres hommes, elle ſeroit d'autant plus avantageuſe, & on devroit être d'autant plus empreſſé de la pratiquer, qu'elle augmenteroit davantage la longueur de la vie moyenne. Or il eſt aiſé d'imaginer une infinité d'hypothèſes, où l'inoculation augmenteroit énormément la vie moyenne, & où néanmoins on ſeroit très-imprudent de ſe ſoumettre à cette opération. Voici, par exemple, un de ces cas. Je ſuppoſerai que la plus longue vie de l'homme ſoit de cent ans; que la petite Vérole ſoit la ſeule maladie mortelle, & que cette maladie enleve tous les ans un nombre égal d'hommes: dans ce cas la vie moyenne de ceux qui attendroient la petite Vérole, ſeroit de cinquante ans, puiſque tous les hommes vivroient chacun cinquante ans, l'un portant l'autre, en ne ſe faiſant point inoculer. Je ſuppoſe enſuite que l'inoculation une fois pratiquée délivre de la petite Vérole pour tout le reſte de la vie; & que par conſéquent les inoculés ſoient ſûrs de vivre cent ans, s'ils échappent

à l'inoculation; mais que cette opération enleve une victime sur cinq, ensorte qu'il n'en réchappe que les quatre cinquiémes. Cela posé, il est très-aisé de voir que la vie moyenne de ceux qui seront inoculés, sera les quatre cinquiémes de 100 ans, c'est-à-dire, de 80 ans, & par conséquent de 30 années plus grande que la vie moyenne de ceux qui s'abandonneront à la nature. Si donc on appliquoit à cette hypothèse le raisonnement fondé sur l'augmentation de la vie moyenne des inoculés, on en concluroit que dans le cas présent l'inoculation seroit très-avantageuse. Cependant je doute que dans ce même cas personne voulût prendre le parti de se faire inoculer; par la raison, que le risque de mourir de l'inoculation étant un danger instant & présent, & se trouvant d'un contre quatre, est plus que suffisant pour balancer la certitude de vivre cent ans, après avoir échappé à cette opération. Envain répondroit-on que nous avons fait une supposition arbitraire, qui n'a point lieu dans l'état actuel de la vie des hommes. Cette supposition suffit pour l'objet que nous nous sommes proposé; pour montrer que l'augmentation de la vie moyenne des inoculés n'est pas un argument suffisant en faveur de l'inoculation; car encore une fois, si ce principe étoit juste, il feroit applicable à toutes sortes d'hypothèses, sur-tout à celles où la vie moyenne des inoculés seroit considérablement plus grande que la vie moyenne de ceux qui ne le sont pas. Dans le cas imaginaire que nous avons pris, le risque de mourir de l'inoculation est

très-grand, mais la vie moyenne eſt prodigieuſement augmentée; dans le cas réel, le riſque eſt ſans doute beaucoup moindre, mais l'augmentation de la vie moyenne eſt beaucoup moindre auſſi. Ce n'eſt donc ni la longueur ſeule de la vie moyenne, ni la ſeule petiteſſe du riſque, qui doit déterminer à admettre l'inoculation; c'eſt uniquement le rapport entre le riſque d'une part, & de l'autre l'augmentation de la vie moyenne, ou plutôt l'avantage que doit procurer cette augmentation relativement au tems & à l'âge où l'on en doit jouir. Or la difficulté eſt de fixer ce rapport.

La ſuppoſition que nous avons faite il n'y a qu'un moment, toute gratuite qu'elle eſt, peut conduire encore à une autre conſidération, qu'on n'a pas, ce me ſemble, aſſez faite en cette matiere. On a trop confondu l'intérêt que l'Etat en général peut avoir à l'inoculation, avec celui que les particuliers peuvent y trouver; car ces deux intérêts peuvent être fort différens. Par exemple, dans l'hypothèſe que nous venons de faire, il eſt certain que l'Etat gagneroit à l'inoculation, puiſqu'en ſacrifiant un citoyen ſur cinq, la ſociété ſeroit aſſurée de conſerver ſes autres membres ſains & vigoureux, juſqu'à l'âge de 100 ans; cependant nous venons de voir que dans cette même hypothèſe, il n'y auroit peut-être pas de citoyen aſſez courageux ou aſſez téméraire pour s'expoſer à une opération, où il riſqueroit un contre quatre de perdre la vie. C'eſt que pour chaque individu, l'intérêt de ſa conſervation particuliere eſt le premier de tous;

l'Etat au contraire considére tous les citoyens indifféremment ; & en sacrifiant une victime sur cinq, il lui importe peu quelle sera cette victime, pourvû que les quatre autres soient conservées. Or je demande si aucun Législateur seroit en droit d'obliger les citoyens à l'inoculation, dans la supposition (d'ailleurs si favorable à l'Etat) qu'il en pérît un sur cinq, & que les quatre qui en réchapperoient, fussent assurés de cent ans de vie ? C'est une question digne d'exercer les Arithméticiens politiques ; mais on apprendra du moins par notre hypothèse, que dans cette matiere délicate, l'intérêt de l'Etat & celui des Particuliers doivent être calculés séparément. On ne pensera pas, par exemple, comme le célébre Mathématicien déja cité paroît l'avoir cru, que si l'inoculation ne faisoit périr qu'une victime sur dix, elle seroit encore avantageuse, par cette seule raison, qu'elle augmenteroit de quelques jours la vie moyenne (*H*).

Il paroît donc que tous les calculs qu'on a faits jusqu'à présent, pour déterminer les avantages de l'inoculation, sont insuffisans & prématurés. Mais faut-il conclure de-là que l'inoculation doive être proscrite ? Je suis bien éloigné de le prétendre. Toutes nos objections contre les calculs des Inoculateurs se réduisent à prouver qu'on n'a ni observations ni méthodes assez exactes, pour appuyer solidement ces calculs, & pour arriver à un résultat précis & satisfaisant. Mais combien d'occasions

(*H*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

dans la vie, où sans savoir précisément l'avantage qu'on peut espérer en prenant quelque parti, on est déterminé par le seul motif que cet avantage peut être très-grand ? Il ne s'agit plus que de savoir si l'inoculation est dans ce cas.

Je supposerai d'abord, comme je l'ai fait jusqu'ici, d'après les Inoculateurs, que l'inoculation augmente en effet la vie moyenne des hommes ; je reviendrai dans un moment sur cette supposition ; admettons-la d'abord pour vraie. Il est incontestable que dans cette hypothèse l'inoculation seroit avantageuse, si on ne couroit pas quelque risque de mourir en se soumettant à cette opération. Si donc ce risque étoit absolument nul, si tous les inoculés, sans exception, échappoient à la mort, il n'y a point de citoyen qui dût balancer à se faire inoculer. Or quoique l'inoculation ait fait périr quelques victimes, cependant les Inoculateurs assurent qu'aucun de ceux qui ont subi cette épreuve avec les précautions convenables, n'y a succombé. Des listes fidéles, disent-ils, prouvent que de douze cens inoculés bien choisis, & traités par la même personne dans le même lieu, il n'en est pas mort un seul. Il ne s'agit donc, ajoutent-ils, que de se mettre entre les mains d'un Médecin habile, sage & expérimenté ; & on peut alors se regarder comme sûr de sa guérison.

C'est-là, ce me semble, le point essentiel, auquel les Partisans de l'inoculation doivent s'attacher ; c'est à prouver qu'on n'en meurt point, quand elle est pratiquée &

conduite avec prudence; c'est à prouver (autant que cela est possible en Médecine) que le petit nombre d'inoculés qui ont péri jusqu'à présent, ont été la victime, ou de leur imprudence, ou de celle de leurs guides, ou de quelques accidens particuliers, tout-à-fait étrangers à cette maladie. Il est certain, & c'est déja un préjugé favorable, que les Médecins sages qui ont pratiqué cette opération, n'ont jusqu'ici perdu aucun de leurs malades. Ces mêmes Médecins paroissent persuadés que plus ils la pratiqueront, plus il passera pour constant qu'on n'en meurt jamais, quand elle n'est pas faite au hazard. Or dans une matiere qui ne peut être susceptible de démonstrations rigoureuses, la grande probabilité du succès est un argument suffisant pour ne pas proscrire, pour encourager même des expériences utiles. C'est pourquoi si ces Médecins se tiennent assurés de ne faire périr aucun malade par l'inoculation, on ne sauroit trop les exhorter à la répandre : c'est le moyen le plus sûr de répondre à la principale objection contre l'inoculation, la crainte d'y succomber: crainte qui aura toujours beaucoup de force sur le commun des hommes, quelque peu fondée qu'on la suppose; parce que d'un côté elle a pour objet un danger présent, & que de l'autre ils ne peuvent comparer avec assez de certitude le risque qu'ils courent à l'avantage qu'ils esperent.

Allons plus loin. Quand même l'inoculation, faite avec les précautions convenables, emporteroit quelques victimes en très-petit nombre sur une quantité infiniment plus

plus considérable qui en réchapperoit, ce ne seroit pas encore une raison pour la condamner. En effet, il faut considérer, que la petite Vérole naturelle emporte tous les ans, année commune, une certaine partie du genre humain, & par conséquent aussi une certaine partie tous les mois, c'est-à-dire, dans un espace de tems égal à celui où l'on subit le risque de l'inoculation. Ce nombre de victimes de la petite Vérole naturelle est à Paris d'environ un sur 6000 par mois; c'est-à-dire, que sur 6000 personnes vivantes, prises au hazard & à tout âge, il en meurt une par mois de la petite Vérole (*I*); encore faut-il observer, que des 6000 personnes actuellement vivantes, & de tout âge, dont il meurt une par mois de la petite Vérole naturelle, il y en a un très-grand nombre qui a déja eu la petite Vérole, & qui par conséquent ne doit point être compté parmi les 6000 personnes dont il s'agit. Supposons que ce nombre à retrancher ne soit que de la moitié des 6000; alors le risque de mourir de la petite Vérole en un mois, seroit de $\frac{1}{3000}$ pour tous les âges indifféremment. Il est même certainement plus considérable. Car on peut assurer, quoiqu'on n'ait point encore là-dessus d'observations exactes, que de toutes les personnes actuellement vivantes à tout âge, il y en a beaucoup plus de la moitié qui ont déja payé le tribut à la petite Vérole naturelle (*K*).

(*I*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.
(*K*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

Si donc l'inoculation, qui enleve déja, comme on vient de le voir, si peu de personnes, se perfectionnoit au point de n'en faire périr qu'une sur trois mille, ou sur un plus grand nombre, alors la partie du genre humain que la petite Vérole enleve chaque mois, ne seroit pas plus petite, ou même seroit plus grande que celle qui succomberoit à l'inoculation, sagement administrée. En ce cas le danger de cette opération seroit réellement & absolument nul; & personne au monde ne devroit craindre de s'y exposer, ou pour soi, ou pour les siens; car alors on ne courroit pas plus de risque, ou même on en courroit moins à se donner la petite Vérole, qu'à attendre qu'elle vînt naturellement dans le courant du mois où on se feroit inoculer; avec cet avantage de plus, que l'inoculation délivreroit pour le reste de la vie de la crainte d'une maladie affreuse & cruelle.

Or si 1200 inoculés bien choisis, & traités avec prudence, ont échappé au danger de l'inoculation, n'y a-t-il pas lieu de croire que 3000 inoculés, choisis & traités de même, en réchapperoient? On assure qu'à Constantinople, 10000 personnes inoculées avec précaution dans une seule année, ont subi heureusement cette épreuve. Quand le fait seroit exagéré du triple, c'en seroit plus que nous n'en demandons.

Enfin, quand même le risque de mourir de l'inoculation (sagement administrée) seroit plus grand que celui de mourir de la petite Vérole naturelle dans le courant du même mois, ce risque, s'il n'étoit en effet que

de 1 sur 1200, seroit encore plus petit que celui de mourir de la petite Vérole naturelle dans l'espace de trois mois. Car, suivant le calcul qu'on vient de faire, le nombre de ceux qui meurent à Paris de la petite Vérole, année commune, est tout au moins de 1 sur 3000 en un mois; & par conséquent de 1 sur 1000 en trois mois (*a*). Donc le risque de mourir de la petite Vérole naturelle en trois mois, seroit au moins le même, & vraisemblablement plus grand, que celui de mourir en un mois de l'inoculation. Or risquer de mourir au bout d'un mois, ou dans l'espace de trois, est à-peu près la même chose pour le commun des hommes. On ne devroit donc pas balancer à préférer celui de ces deux risques qui délivre de la crainte de la petite Vérole naturelle; par-là on auroit l'avantage de s'assurer à la fois une vie plus longue & une plus grande tranquillité; avantage assez grand, pour l'emporter sur la légere probabilité de succomber à l'inoculation, en ne sacrifiant que deux mois de sa vie (*L*). Lorsqu'il est question d'un avantage, même éloigné, il y a une infinité de cas, sur-tout dans le cours de la vie, où une probabilité très-petite de danger, qui balance cet avantage, doit être traitée comme si elle étoit absolument nulle. Ce principe, pour le dire en passant, est très-important dans la théorie des

(*a*) On verra dans les Notes que ce risque peut être porté, sans craindre de se tromper, à 1 sur 1500 en un mois; ce qui réduiroit absolument à rien (dans la supposition présente) le danger de l'inoculation.

(*L*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

jeux de hazard : il peut servir à résoudre des questions épineuses & délicates, qui n'ont point été résolues jusqu'ici, ou qui l'ont été mal, mais qui ne sont pas de l'objet de ce Mémoire (*M*).

Il ne nous reste plus qu'à examiner la supposition que nous avons faite, que l'inoculation augmente la vie moyenne des hommes. Cette supposition est fondée sur deux autres. 1°. Que l'inoculation garantisse de la petite Vérole naturelle. 2°. Que l'inoculation n'emporte après elle aucune autre maladie mortelle ou dangereuse. Les observations, selon les Inoculateurs, paroissent favorables jusqu'ici à la premiere supposition, ou du moins n'y paroissent pas contraires. On n'a point encore, disent-ils, un seul exemple incontestable d'un inoculé qui ait repris la petite Vérole ; & il faut avouer au reste que quand même le cas arriveroit, il pourroit être si rare, qu'on seroit en droit de le regarder, dans la pratique, comme n'éxistant pas (*a*). A l'égard de la seconde supposition, on ne sauroit, il est vrai, démontrer en rigueur, que l'inoculation, en nous délivrant de la petite Vérole, ne nous rende susceptibles d'aucune autre maladie dangereuse ; mais il est encore plus vrai qu'on n'a pas de preuve du contraire. Jusqu'ici les inoculés paroissent avoir joui d'une aussi bonne santé après cette

(*M*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire. Voyez aussi le Mémoire précédent *sur le Calcul des probabilités*.

(*a*) Voyez la Note (*D*) n. 1.

opération, qu'auparavant. Un doute qui n'est point appuyé sur des faits, n'est donc point un motif pour rejetter l'inoculation. Ce doute à la vérité ne pourra être entiérement détruit, que quand on se sera assuré par l'observation de plusieurs années, que l'inoculation augmente la vie moyenne des citoyens. Mais cette augmentation étant au moins déja très-probable, c'est une raison pour la constater rigoureusement par l'expérience. Or cela ne se pourra faire qu'en pratiquant l'inoculation; en dressant des tables éxactes de ceux qui se feront inoculer à chaque âge, du petit nombre de ceux qui en mourront, & du nombre de ceux qui meurent à chaque âge de la petite Vérole naturelle.

Concluons de tout ce qui a été dit dans ce Mémoire, que si les avantages de l'inoculation ne sont pas de nature à être appretiés mathématiquement, il est néanmoins vraisemblable que ces avantages sont réels pour ceux qui la subiront avec les précautions convenables; qu'il faut donc bien se garder d'en arrêter ou d'en retarder les progrès; & que c'est le seul moyen d'acquérir sur cette matiere importante toutes les lumieres que l'on peut desirer, pour mettre désormais l'inoculation à l'abri de toute atteinte. Mes objections n'attaquent que les Mathématiciens qui pourroient trop se presser de réduire cette matière en équations & en formules; mais je me regarderois comme coupable envers la Société, si j'avois eû pour but de dissuader mes concitoyens d'une pratique que je crois utile.

Il y auroit encore beaucoup d'autres réfléxions (*N*) à faire sur un ſujet ſi important ; mais il eſt tems de finir cet Ecrit, dans lequel je ne crois pas que les Partiſans ni les Adverſaires de l'inoculation m'accuſent d'avoir marqué la plus légére partialité ; ſes Adverſaires, puiſque j'ai tâché de prouver que les calculs qu'on leur a oppoſés juſqu'à préſent, n'étoient peut-être pas ſuffiſans pour les convaincre ; ſes Partiſans, puiſqu'en partant d'un fait avancé par eux, & qui ne paroît pas leur avoir été conteſté, j'en conclus que l'inoculation mérite d'être encouragée.

(*N*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

Fin du onzième Mémoire.



NOTES

Sur le Mémoire précédent.

CE Mémoire ayant été fait pour être lû dans une Assemblée publique de l'Académie des Sciences, j'ai été obligé de le renfermer dans certaines bornes, & d'en supprimer les détails de calcul. Les Notes suivantes, qui sont très-étendues, suppléront à ce que je n'ai pû dire dans cet Ecrit.

(*A*) Suivant les Listes mortuaires, publiées en Angleterre, il meurt de la petite Vérole $\frac{1}{14}$ des enfans qui naissent; à quatre ans il ne reste plus que la moitié de ces enfans, dont l'autre moitié a péri presque toute entiere par des maladies de l'enfance, différentes de la petite Vérole. Ainsi c'est à-peu-près la septiéme partie du genre humain, que la petite Vérole emporte depuis l'âge de quatre ans, jusqu'à la fin de la vie. Voyez *le Mémoire de M. de la Condamine.*

Au reste, cette proportion qui paroît avoir été adoptée en Angleterre pour la Ville de Londres, n'est pas la même pour toutes les autres Villes. M. Daniel Bernoulli dit qu'à Bâle, dans des Epidémies assez malignes de la petite Vérole, il n'en meurt pas un malade sur 20; ce qui seroit considérablement au-dessous de ce qu'il en

meurt à Paris dans des cas ſemblables. M. Bernoulli eſtime qu'à Bâle le nombre de ceux qui meurent de la petite Vérole, eſt tout au plus la douziéme partie de ceux qui en ſont attaqués, & tout au plus la vingtiéme partie de ceux qui meurent; ce qui ſeroit fort au-deſſous du rapport $\frac{1}{7}$ que nous venons de ſuppoſer.

En général, il paroît que la mortalité de la petite Vérole doit être conſidérablement plus forte dans les grandes Villes, que dans les petites; & dans les Villes, que dans les Campagnes. Et ſi l'inoculation faiſoit périr partout à-peu-près une victime ſur 300, elle ſeroit moins avantageuſe, à proportion que la petite Vérole naturelle ſeroit moins dangereuſe. Par exemple, à Bâle, l'avantage (en ſuivant les calculs des Inoculateurs) ne ſeroit plus que dans le rapport de 300 à 20, ou de 15 à 1, beaucoup moindre par conſéquent qu'à Paris. Cependant il eſt vraiſemblable, que moins la petite Vérole ſera dangereuſe dans un Pays, moins l'inoculation le ſera de ſon côté. Il n'y a que des obſervations & des tables exactes qui puiſſent fixer pleinement nos idées ſur ce ſujet; mais ces obſervations & ces tables nous manquent encore.

(*B*) Les Liſtes de ceux qui ſont morts de l'inoculation varient beaucoup entr'elles. Suivant quelques-unes il eſt mort un inoculé ſur ſoixante; ſuivant d'autres, il n'en eſt pas mort un ſur douze cens. C'eſt en prenant un milieu entre toutes les Liſtes, qu'on a fixé le nombre des morts de l'inoculation, à environ 1 ſur 300; mais il faut avouer

avouer que cette estimation est très-imparfaite, & cela pour deux raisons. 1°. Elle a été faite indifféremment sur toutes les Listes de ceux qui sont morts de l'inoculation, tant après avoir été inoculés au hazard & sans préparation, qu'après avoir été inoculés avec les précautions convenables. Cette maniere d'évaluer les avantages de l'inoculation est peu éxacte. Car si on prend les inoculés au hazard, il en meurt bien plus de un sur 300, & au contraire si on les inocule avec précaution, le nombre des victimes paroît être beaucoup moindre. Donc dans le premier cas, la supposition d'une victime sur 300 est trop favorable à l'inoculation; & dans le second elle lui est contraire. Or ce second cas est celui que tout Partisan de l'inoculation, & même que tout Philosophe raisonnable doit naturellement supposer. Car personne ne conseillera l'inoculation à un sujet mal sain, sur-tout s'il n'y est pas préparé. Nous faisons d'avance cette derniere remarque, qui nous servira dans la suite de ce Mémoire à établir les avantages de l'inoculation, & sur laquelle il paroît que les Partisans de cette pratique n'ont pas appuyé, ou ont appuyé trop légérement; en quoi ils ont abandonné, ce me semble, leur véritable avantage; & ce qu'il y a de plus décisif en leur faveur dans cette question.

2°. Une autre raison pour laquelle le rapport de 1 à 300 est peu éxact, c'est que ce rapport est supposé le même pour quelque âge que ce soit. Nous ne pouvons à la vérité faire une autre supposition, faute d'obser-

vations suffisantes ; mais on ne sauroit trop exhorter les Inoculateurs à constater par des expériences réitérées quel est ce rapport pour chaque âge, afin d'arriver là-dessus à toute la précision que le sujet peut comporter. Quoi qu'il en soit, nous partirons du rapport de 1 à 300, supposé par les Inoculateurs même ; & c'est d'après cette supposition, que nous allons examiner les conséquences qu'ils en tirent.

(*C*) 1. Pour fixer les idées, je suppose que le tems où on est sujet à la petite Vérole, soit depuis 5 jusqu'à 65 ans. Je sai qu'on a souvent la petite Vérole plutôt & quelquefois plus tard ; mais il faut remarquer en même tems ; 1°. que si on fait commencer le risque de la petite Vérole au moment de la naissance, alors, suivant la Note (*A*) ci-dessus, on trouvera par les tables de mortalité $\frac{1}{14}$ seulement de risque au lieu de $\frac{1}{7}$; 2°. que si on suppose que le risque de la petite Vérole s'étende au-delà de 65 ans, alors en prolongeant le tems de ce risque, on diminue d'autant à proportion le risque d'en mourir en un mois ; ainsi les deux suppositions que nous avons faites, tendent à augmenter le risque de mourir de la petite Vérole, & sont par conséquent (à cet égard) favorables aux Inoculateurs ; 3°. enfin on n'inocule guères avant l'âge de 4 à 5 ans ; c'est donc de ce point qu'il faut partir pour apprétier les avantages de l'inoculation.

2. Cela posé, imaginons pour un moment qu'il meure tous les ans un égal nombre de personnes de la petite Vérole ; il est évident que le risque d'en mourir dans

l'année, sera $\frac{1}{7 . 60}$; & que celui d'en mourir dans le mois, sera $\frac{1}{7 . 60 . 12}$. Donc le risque de mourir de l'inoculation, est à celui de mourir de la petite Vérole (*dans le même tems*) comme $\frac{1}{300}$ est à $\frac{1}{420 . 12}$; c'est-à-dire, comme 84 à 5, ou à-peu-près comme 17 à 1. Ce rapport augmenteroit du double, si on supposoit que le risque de mourir de l'inoculation ne s'étendît qu'à quinze jours; & si on supposoit encore avec M. Bernoulli, qu'il y a des Villes, comme Bâle, où le risque $\frac{1}{7}$ se réduit à $\frac{1}{20}$, les deux rapports seroient entr'eux comme $\frac{1}{300}$ à $\frac{1}{20 . 60 . 24}$, ou comme 96 à 1.

3. On auroit tort de nous objecter que nous avons fait une fausse hypothèse, en supposant qu'il meurt tous les ans un égal nombre de personnes de la petite Vérole; cette supposition sans doute est peu éxacte, mais nous ne l'avons faite que pour nous expliquer plus aisément par un exemple. Car dans toute autre hypothèse, pourvû qu'elle ne soit pas trop forcée, on trouvera toujours que le risque de mourir de l'inoculation en un mois, est plus grand que celui de mourir de la petite Vérole *dans le même tems*. Supposons, par exemple, que le nombre des morts de la petite Vérole de 5 à 65 ans, soit chaque année en progression Arithmétique décroissante depuis 5 ans jusqu'à 65, & qu'à 65 ans ce nombre soit $= o$; on trouvera que le dernier terme de cette progression étant

supposé x, on a pour le premier terme $60x$, & pour la somme des morts pendant les 60 ans, $(x + 59x) \times \frac{60}{2}$, qui doit être égal à $\frac{1}{7}$; donc $x = \frac{1}{7 \cdot 30 \cdot 60}$; d'où il est aisé de voir que le risque de mourir la premiere année est $\frac{1}{210}$, & par conséquent le premier mois $\frac{1}{12 \times 210}$; que celui de mourir le premier mois de la seconde année est $\frac{1}{210} \times \frac{59}{60} \times \frac{1}{12}$; que celui de mourir le premier mois de la troisiéme est $\frac{1}{210} \times \frac{58}{60} \times \frac{1}{12}$ &c. & ainsi de suite; or chacun de ces risques est fort au-dessous de $\frac{1}{300}$, qu'on suppose être le risque auquel les inoculés s'exposent.

4. En général, supposons que le nombre de ceux qui meurent à chaque instant de la petite Vérole soit du, & qu'on ait $du = A(60 - x)^n dx$, x exprimant un nombre quelconque d'années écoulées depuis 5 ans jusqu'à 65; on aura donc $u = -A\frac{(60-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{A \cdot 60^{n+1}}{n+1}$, qui doit être $= \frac{1}{7}$ lorsque $x = 60$; d'où l'on tire $A = \frac{n+1}{7 \cdot 60^{n+1}}$: donc $du = \frac{n+1 \cdot dx}{7 \cdot 60} \times \left(1 - \frac{x}{60}\right)^n$: quantité qu'on peut prendre pour le nombre de ceux qui meurent de la petite Vérole chaque année à la fin du tems x; en regardant dx comme $= 1$, & comme représentant une année de tems. Donc en général le risque de l'inoculation sera à celui de mourir de la pe-

tite Vérole (*dans le même tems, c'est-à dire en un mois*) comme $\frac{1}{300}$ est à $\frac{n+1}{7.60.12} \times (1 - \frac{x}{60})^n$; ce rapport sera la premiere année, comme $\frac{1}{300}$ est à $\frac{n+1}{7.60.12}$ à très-peu-près, pourvû que le nombre n ne soit pas fort grand; parce que x étant $=1$, $(1 - \frac{x}{60})$ est à-peu-près égal à l'unité.

Si l'on fait dans cette formule $n = 0$, ou $n = 1$, on retombera dans les deux cas des art. 3 & 4 ci-dessus. Si au lieu de $\frac{1}{7}$ on prenoit toute autre fraction, par exemple, $\frac{1}{20}$, pour représenter le risque de la petite Vérole naturelle, on trouveroit de même le rapport des deux risques (*a*).

5. Il faut remarquer cependant, qu'en supposant toujours $du = A(60 - x)^n dx$, la formule précédente du rapport entre les deux risques, n'est éxacte que pour la premiere année; & que dans les années suivantes, il faut, pour connoître le risque de mourir de la petite Vérole, multiplier ce risque par $\frac{a}{z}$, a étant le nombre des vivans à l'âge de cinq ans, & z le nombre de ceux qui vivent à $5 + x$ ans, & qui n'ont point encore eu la

(*a*) On pourroit encore supposer $du = Ac^{-x} dx$, c étant le nombre dont le Logarithme est l'unité. Mais comme la véritable loi des du est inconnue jusqu'ici, toutes ces hypothèses seroient arbitraires; nous ne voulons ici que faire sentir par différens exemples, que le risque de mourir de la petite Vérole naturelle en un mois, est plus petit que celui de mourir de l'inoculation.

petite Vérole ; ce qui augmente à la vérité le risque de mourir de la petite Vérole en un mois, mais non pas au point de le rendre $= à \frac{1}{300}$, qui est le risque de l'inoculation dans ce même tems d'un mois.

6. Par exemple, si on suppose avec M. Daniel Bernoulli, que de 64 personnes de même âge qui n'ont point eu la petite Vérole, il en meurt une dans l'année, (supposition qui paroît néanmoins être trop forte, sur-tout quand on a passé les 30 ans) on aura pour le risque de mourir de la petite Vérole naturelle en un mois, la fraction $\frac{1}{64 \times 12} = \frac{1}{768} < \frac{1}{300}$.

7. Au reste, quelque hypothèse qu'on veuille faire sur la loi de mortalité de la petite Vérole, il est du moins certain, diront les Anti-inoculateurs, que faute d'observations & de tables suffisantes, il n'y a aucun mois dans la vie, où on puisse être assuré qu'on risquera davantage de mourir de la petite Vérole naturelle, que d'en mourir par l'inoculation ; ainsi, concluront-ils, l'inoculation, à quelque âge que ce soit, est, ou téméraire, ou tout au moins hasardée. Telle est l'objection qu'ils peuvent faire, & qu'on ne nous accusera pas d'avoir affoiblie.

(*D*) 1. La raison pour laquelle le risque de mourir en un mois de la petite Vérole naturelle, est si peu considérable, c'est par le peu de probabilité qu'on aura la petite Vérole naturelle dans le mois. Car si on doit l'avoir, alors le risque est beaucoup plus grand, savoir de $\frac{1}{7}$ environ, suivant les Inoculateurs ; & si on ne doit

pas l'avoir, en ce cas on se retrouvera encore le mois suivant dans le danger d'avoir la petite Vérole, & d'en mourir. Au contraire, le risque qu'on court par l'inoculation (à la vérité en un mois) suppose qu'on a reçu effectivement la petite Vérole, & délivre de ce danger pour le reste de la vie, lorsqu'une fois on en est échappé. Je dis pour le reste de la vie; car quand il ne seroit pas rigoureusement prouvé que l'inoculation délivre absolument d'avoir la petite Vérole, au moins il paroît que les inoculés n'ont pas plus à la craindre que ceux qui l'ont déja eûe naturellement. Or nous voyons que ceux qui ont déja eu la petite Vérole naturelle, ne la craignent plus; & les Médecins sont partagés sur la question, si on a deux fois cette maladie; ce qui prouve au moins que le cas est rare.

2. Voilà donc le point de vûe sous lequel on doit comparer les deux risques; l'un plus grand (quoiqu'assez petit en lui-même) mais ne devant durer qu'un mois sur tout le cours de la vie; l'autre plus petit, mais devant se répéter à chaque mois: le premier de ces risques sera nul dès qu'on y aura échappé; le second, dès qu'on y aura échappé, recommencera tout de nouveau, & pourra même aller toujours en augmentant de mois en mois, au moins jusqu'à un certain âge. Ainsi la difficulté Mathématique de la question consiste à savoir comment on doit comparer ces deux risques. Le premier (suivant les Inoculateurs) est $\frac{1}{300}$; & le second est formé de la somme des risques qu'on court à chaque mois,

chacun de ces risques devant pourtant être diminué à raison de l'éloignement du tems où chacun des mois est placé. Car il est clair que si $\frac{1}{1200}$, ou toute autre fraction, exprime le risque de mourir à 40 ans de la petite Vérole en un mois, pour ceux qui sont parvenus à cet âge; ce risque ne doit pas être estimé $\frac{1}{1200}$ quand on l'envisage long-tems avant l'âge de 40 ans, par exemple, à l'âge de 5 ans; sur-tout quand on compare ce risque au risque $\frac{1}{300}$ de mourir de l'inoculation en un mois; parce que le risque $\frac{1}{300}$ est un risque présent & *instant* de perdre la vie en un mois, & que le risque $\frac{1}{1200}$ est un risque éloigné, & que l'on ne doit courir qu'après avoir vêcu 35 ans, c'est-à dire, après avoir profité des plus belles années de la vie. En un mot, le risque de périr de l'inoculation, quelque petit qu'il soit, est un danger *présent*, & le risque de mourir de la petite Vérole naturelle (quoique plus grand) est un danger *éloigné*, qui se répand sur tout le tems de la vie, & dont les différentes parties s'affoiblissent par degrés, en se répandant sur cet espace. Or par quelle méthode réduire ce dernier risque en calcul? Comment en apprétier les différentes parties, & comment en évaluer la somme?

3. La seule maniere dont il paroît qu'on puisse comparer les deux risques, est celle-ci. On considere la vie comme une loterie, d'où il sort un certain nombre de lots qui portent la mort; les inoculés mettent à cette loterie un billet de plus que les autres hommes; en conséquence de ce billet le lot de la mort peut sortir pour

pour eux dans l'espace d'un mois; mais ce mois passé, le lot de la mort doit sortir plus tard pour eux, que pour ceux qui n'ont point mis ce billet. Or on demande quel est l'avantage des Joueurs à cette loterie, ou quel est le rapport de l'espérance des Joueurs qui n'ont point mis le billet, à l'espérance des Joueurs qui l'ont mis? Je vais tâcher de donner dans la théorie suivante la seule réponse qu'on puisse faire à cette question; & je ne dissimulerai point en même-tems ce que l'on peut encore desirer dans cette théorie, pour en être pleinement satisfait.

THÉORIE MATHÉMATIQUE
DE L'INOCULATION.

4. Soit AO (*fig.* 1.) une ligne indéfinie, qu'on suppose divisée en un nombre indéfini de parties très-petites AB, BC, CD &c. dont chacune représente une année. Supposons de plus qu'au point K, on éleve une perpendiculaire AK, qui représente le nombre de personnes qui naissent en même-tems dans un même lieu, & principalement dans une grande Ville, telle que Paris, Londres &c. Quand je dis *en même-tems*, je n'entends point par ce mot le même instant de tems pris rigoureusement, mais un espace de tems assez court, par exemple, celui d'une année: car on peut supposer sans erreur sensible, que s'il naît, par exemple, 20000 personnes par an à Paris, ces 20000 personnes naissent tout-à-la-

fois au commencement de l'année. Mais pour nous exprimer d'une maniere encore plus générale & plus éxacte, nous supposerons que AK représente en général un nombre donné de personnes, toutes du même âge, & vivantes au commencement A du tems indéfini AO.

5. Soit AR une portion de la ligne indéfinie AO, laquelle portion AR représente un certain nombre n d'années, ensorte que $AR = nAB$; supposons de plus qu'à la fin du tems AR, le nombre de personnes qui existent encore, & qui restent de la quantité AK qu'il y en avoit au commencement du tems AR, soit représenté par RE; & imaginons qu'à chaque point R de la ligne AO, on éleve de pareilles lignes RE, qui représentent le nombre d'hommes restant: il est évident; 1°. qu'on formera par ce moyen une courbe KEQ qui ira rencontrer la ligne indéfinie AO en un point Q, & que $\frac{AQ}{AB}$ exprimera le tems à la fin duquel les personnes dont le nombre est représenté par AK, & qui existent en même tems, seront toutes mortes, sans qu'il en reste une seule; 2°. que toutes les personnes vivantes à la fois à la fin d'un tems quelconque AR, & dont le nombre est représenté par l'ordonnée RE, seront du même âge; 3°. que puisque pendant l'espace de tems Rr, qu'on peut supposer d'une année, le nombre des vivans RE de même âge est diminué de la quantité $E\epsilon$, le nombre des vivans de ce même âge, s'il étoit RF, seroit diminué pendant le même tems Rr d'une quantité $F\varphi = \frac{E\epsilon \times RF}{RE}$.

6. Imaginons maintenant par le point *K* la ligne *KN* indéfinie & parallèle à *AO*; & ſur cette ligne élevons à chaque point *G* des perpendiculaires *GH*, marquant le nombre de perſonnes qui meurent de la ſeule petite Vérole pendant le tems *AR*, & qui par conſéquent n'exiſtent plus à la fin de ce tems *AR* par le ravage de cette ſeule maladie. Il eſt aiſé de voir; 1°. qu'on formera par ce moyen une courbe *KHL*; 2°. que comme il eſt rare d'avoir la petite Vérole dans un âge avancé, par exemple, à 60 ans, ſi on prend $AM = 60\,AB$, la partie *LS* de cette courbe *KHL*, qui commence au point *L*, ſera ſenſiblement parallèle à l'axe, & pourra même lui être abſolument parallèle, ſi *AM* exprime un âge auquel perſonne n'a plus la petite Vérole, comme 70 ou 75 ans, plus ou moins; 3°. que ſi on mene *HT* parallèle à *KN*, les ordonnées *LV* repréſenteront le nombre de perſonnes mortes de la ſeule petite Vérole pendant le tems *RM*; & que par conſéquent *Xx* repréſentera ce qui meurt de la ſeule petite Vérole pendant le tems *Rr*.

7. Cela poſé, ſoit $AK = k$; $AR = x$; $RE = y$; $GH = u$; on voit d'abord que ſi toutes les perſonnes exiſtantes à-la-fois au commencement *A* du tems *AR*, avoient eû la petite Vérole auparavant, il en périroit un moindre nombre pendant le tems *AR*, puiſque l'une des cauſes de mort, ſavoir la petite Vérole, n'exiſteroit plus, ou du moins ne cauſeroit plus que très-peu de morts; (Voyez cette Note *D* art. 1.). Ainſi à la fin du tems *AR*, le nombre des perſonnes de même âge qui vivroient

encore, feroit plus grand que RE. Suppofons ce nombre $= RF = z$; il eft évident, 1°. que $E\varepsilon$ repréfentant la quantité dont le nombre RE eft diminué pendant le tems Rr, tant par la petite Vérole, que par d'autres maladies, $F\varphi = \frac{E\varepsilon \times FR}{RE}$ repréfenteroit la quantité dont le nombre RF des perfonnes du même âge feroit diminué durant le même tems, *toutes chofes d'ailleurs égales*; 2°. que fi les perfonnes dont le nombre eft repréfenté par RF étoient fujettes à la petite Vérole, cette maladie en feroit périr pendant le tems Rr la quantité $X\xi = \frac{Xx \times RF}{RE}$. Mais comme on fuppofe que toutes les perfonnes dont le nombre eft repréfenté par RF, ont eu la petite Vérole, le nombre $F\varphi$ qui devroit mourir dans le tems Rr, foit de la petite Vérole, foit autrement, doit être diminué de la quantité $fz = X\xi$, qui exprime ce qui périroit par la petite Vérole feule. C'eft pourquoi on trouvera $RF - rz$ ou $dz = \frac{E\varepsilon \times RF}{RE} - X\xi = \frac{z\,dy}{y} + \frac{z\,du}{y}$; je mets $+ \frac{z\,du}{y}$, & non $- \frac{z\,du}{y}$, parce que z & y diminuent pendant que u croît.

8. On aura donc $dz = \frac{z\,dy}{y} + \frac{z\,du}{y}$; dont l'intégrale eft $z = y\,c^{\int \frac{du}{y}}$; c exprimant le nombre dont le Logarithme eft l'unité. On voit par cette équation;

1°. que z est toujours plus grand que y, excepté lorsque $y = k$, & lorsque $y = o$; car dans le premier cas $\int \frac{du}{y} = o$, & par conséquent $z = y$; & dans le second, $z = o$ aussi-bien que y; 2°. que vers l'extrémité de AQ, par exemple, au point M, où la courbe KLS dégénére en une partie LS, qui est exactement ou sensiblement parallèle à l'axe, on a $c^{\int \frac{du}{y}}$ = à un nombre constant, ou éxactement, ou à-très-peu-près; de sorte que z est pour lors en raison constante, ou à-très-peu-près constante avec y.

9. De-là il est évident; 1°. que si toutes les personnes qui existent en même-tems en nombre AK au commencement du tems AR, ont eu la petite Vérole, ensorte qu'elles n'ayent plus ou presque plus à la craindre, le nombre RF qui en restera à la fin du tems AR, sera plus grand que si ces mêmes personnes avoient la petite Vérole à craindre, & sera plus grand dans le rapport du nombre $c^{\int \frac{du}{y}}$ à l'unité; 2°. qu'à la fin du tems AQ, les personnes dont le nombre est représenté par AK, seront toutes mortes, soit qu'elles n'ayent pas eu la petite Vérole avant le commencement A du tems AQ, soit qu'elles l'ayent eûe.

10. C'est pourquoi si de 20000 personnes, par exemple, qui naissent ou qui existent en même-tems au même âge, il n'en existe plus une seule au bout d'un certain

nombre n d'années, il n'en existera pas non plus une seule au bout de ce même nombre d'années, quand même ces personnes auroient eû toutes la petite Vérole avant le commencement de ce nombre n d'années. Il ne faut pas cependant conclure de-là que tout soit égal dans les deux cas. Car 1°. comme la courbe KFQ est toute extérieure à la courbe KEQ, la *vie moyenne* de toutes les personnes AK qui existent en même-tems & au même âge, sera dans le premier cas égale à l'aire $AKEQ$ divisée par AK, & dans le second égale à l'aire $AKFQ$ divisée par AK. Ainsi dans le premier cas la vie moyenne sera plus courte que dans le second, en raison de $AKEQ$ à $AKFQ$; c'est-à-dire, de $\int y\,dx$ à $\int y\,dx\,c^{\int \frac{du}{y}}$, en prenant ces intégrales pour ce qu'elles sont au point Q. 2°. Si RE & $R'F'$ (*fig.* 2.) sont faites égales à la moitié de AK, les abscisses correspondantes AR, AR' représenteront les tems au bout desquels dans les deux cas le nombre AK des personnes vivantes au même âge sera réduit éxactement à la moitié, & par conséquent le tems que chacune des personnes AK en particulier peut raisonnablement espérer de vivre; donc puisque $AR < AR'$, ce tems sera plus petit dans le premier cas que dans le second. C'est pourquoi si toutes les personnes représentées par AK, & de même âge, ont eu la petite Vérole au commencement du tems AQ, leur vie moyenne en sera plus longue, & chacune d'elles pourra espérer de vivre plus long-tems, que si ces personnes AK

avoient encore la petite Vérole à craindre ; quoiqu'à la fin du tems AQ toutes ſoient mortes dans les deux cas.

11. Je ſuppoſe préſentement que parmi le nombre AK de perſonnes exiſtantes au même âge, AK' (*fig.* 3.) repréſente toutes celles qui n'ont point eu la petite Vérole, ou un nombre quelconque d'entr'elles. Il eſt d'abord évident qu'en traçant la courbe $K'F'Q$, qui ſoit telle que RF' ſoit à RF comme AK eſt AK', cette courbe exprimeroit la mortalité des perſonnes AK', en ſuppoſant qu'elles euſſent toutes eu la petite Vérole. Donc ſi on les inocule toutes, & qu'il en ſurvive la partie Ak', alors traçant la courbe $k'f'Q$, qui ſoit telle que Rf' ſoit à RF comme Ak' eſt à AK; cette courbe $k'f'Q$ exprimera la mortalité des inoculés. Donc la vie moyenne des inoculés AK' ſera repréſentée par l'aire $\frac{Ak'f'Q}{AK'} = \frac{AKFQ}{AK} \times \frac{Ak'}{AK'}$; & ſi on fait $A\Lambda = \frac{AK'}{2}$, & $R'O = A\Lambda$, AR' marquera le tems que les inoculés AK' peuvent raiſonnablement eſpérer de vivre.

12. Il s'agit à préſent de ſavoir quelle ſeroit la mortalité des perſonnes AK' (dont on ſuppoſe qu'aucune n'a eu la petite Vérole) ſi toutes ces perſonnes s'abandonnoient à la nature. Il eſt d'abord évident que cette mortalité ſera la même (c'eſt-à-dire, que le nombre des ſurvivans après un tems quelconque, ſera dans le même rapport avec AK') ſoit que le nombre AK' repréſente toutes les perſonnes qui n'ont point eu la petite Vérole ſur le nombre AK des vivans au même âge, ſoit qu'il

n'en représente qu'une partie. Supposons donc que AK' représente toutes les personnes de même âge, & habitantes d'un même lieu, qui n'ont point eu la petite Vérole; & que $K'EQ$ (*fig.* 4.) soit leur courbe de mortalité. Soit $RE' = u'$ le nombre de personnes restantes après le tems AR sur le nombre AK' de ceux qui n'ont point encore eu la petite Vérole à l'instant A; il est clair d'abord que si toutes les personnes u' avoient eû la petite Vérole, on auroit $-du' = -\frac{u'dz}{z}$, pour le nombre de personnes qui mourroient pendant le petit tems dt; à quoi il faut ajouter le nombre $+du$ de ceux qui meurent dans ce même-tems de la petite Vérole. Donc $-du' = -\frac{u'dz}{z} + du$; or on a trouvé plus haut (n. 8.) $dz = \frac{zdy}{y} + \frac{zdu}{y}$, ou $-dy = -\frac{ydz}{z} + du$; donc $\frac{dy - du'}{y - u'} = \frac{dz}{z}$; ou $y - u' = Pz$; P exprimant une constante. Or au point A, on a $z = y = k$ (en supposant $AK = k$); donc si on appelle k' la valeur de u' au point A, on aura $k - k' = Pk$; donc $P = 1 - \frac{k'}{k}$; donc $y - u' = z\left(1 - \frac{k'}{k}\right) = yc^{\int\frac{du}{y}} \times \left(1 - \frac{k'}{k}\right)$; & $u' = y - yc^{\int\frac{du}{y}} + \frac{yc^{\int\frac{du}{y}} \times k'}{k}$. Il ne s'agit plus que de savoir quelle

quelle est la valeur de k', ou le rapport de k' à k.

13. A cet effet, soit n un nombre quelconque de personnes vivantes à un certain âge donné; on peut savoir assez facilement (au moins à-peu-près) quel est parmi elles le nombre m de celles qui ont eu la petite Vérole; pour cela il suffiroit que quelques personnes zélées & éclairées, se chargeassent de faire là-dessus des informations, & d'en dresser des tables. Donc $\frac{k'}{k} = \frac{n-m}{n}$; & $u' = y - \frac{y\, c^{\int \frac{du}{y}}\, m}{n}$. Supposant donc qu'on ait pour chaque âge la valeur de $\frac{m}{n}$; on aura la courbe de mortalité $K'E'Q$ d'un nombre quelconque AK' de personnes qui n'ont point eu la petite Vérole; on connoîtra la valeur de leur vie moyenne $= \int \frac{u'\, dx}{AK'} =$ $\int \frac{y\, dx}{k} \times \frac{n}{n-m} - \int \frac{y\, dx\, c^{\int \frac{du}{y}}\, m}{k\,(n-m)}$. Pour connoître de même le tems $A\rho$ que chacune des personnes AK' peut raisonnablement espérer de vivre, on fera $A\Lambda = \frac{AK'}{2}$, & on cherchera l'abscisse $A\rho$ correspondante à $\rho O' = A\Lambda$.

14. Ainsi (*fig.* 3.) le rapport des vies moyennes sera pour les inoculés, & pour ceux qui ne le sont pas, celui de $\int \frac{z\, dx}{k} \times \frac{Ak'}{AK'}$, à $\frac{n \int y\, dx}{k\,(n-m)} - \frac{m \int z\, dx}{k\,(n-m)}$. Donc

ſuppoſant $z = y + \omega$, on voit que la vie moyenne $\int \frac{y\,dx}{k}$, de toutes les perſonnes d'un même âge, priſes indiſtinctement (telle qu'on la trouve dans les tables déja calculées) ſera augmentée par l'inoculation à-très-peu-près de $\int \frac{\omega\,dx}{k} \times \frac{A\,k'}{A\,K'}$; & qu'elle ſera diminuée par le riſque de la petite Vérole naturelle, d'une quantité $\frac{m \int \omega\,dx}{k\,(n - m)}$. Donc 1°. $\int \frac{y\,dx}{k}$ exprimant la vie moyenne marquée dans les tables juſqu'ici connues, $\int \frac{y\,dx}{k} - \frac{m \int \omega\,dx}{k\,(n - m)}$ ſera la vie moyenne de ceux qui n'ont point eu la petite Vérole; 2°. $\left(\frac{\int y\,dx}{k} + \frac{\int \omega\,dx}{k}\right) \times \frac{A\,k'}{A\,K'}$, ſera la vie moyenne des inoculés; 3°. par conſéquent l'augmentation totale de vie moyenne, qu'on ſe procure par l'inoculation, lorſqu'on n'a point encore eu la petite Vérole, ſera $\left(\frac{\int \omega\,dx}{k}\right) \times \left[\frac{A\,k'}{A\,K'} + \frac{m}{n - m}\right] - \int \frac{y\,dx}{k} \times \left(1 - \frac{A\,k'}{A\,K'}\right)$. De plus le rapport des tems qu'on peut eſpérer de vivre dans les deux cas, ſera celui de AR' (*fig.* 3.) à $A\,\rho$ (*fig.* 4.).

15. J'ai ſuppoſé dans les calculs précédens, que d'un nombre quelconque $A\,K'$ (*fig.* 3.) de perſonnes du même âge, qu'on inocule à l'inſtant A, il en meurt à cet inſtant A la partie $K'\,k'$; & cette ſuppoſition n'eſt pas rigoureu-

ſement éxacte : car ce nombre $K'k'$ ne meurt que pendant un certain tems, qui eſt d'environ un mois, ou, ſi l'on aime mieux, de 15 jours. C'eſt pourquoi ce n'eſt pas l'ordonnée AK' qu'il faut diminuer de la quantité $K'k'$, mais une autre ordonnée de la courbe $K'F'Q$ qui répond à une abſciſſe égale à un mois. Or ſoit μ cette ordonnée ; il eſt viſible qu'en la diminuant de la quantité $K'k'$, c'eſt la même choſe que ſi on diminuoit l'ordonnée AK' d'une quantité $= \frac{AK'.K'k'}{\mu}$; mais comme μ differe très-peu de AK', il s'enſuit qu'on pourra mettre ſans erreur ſenſible $K'k'$ au lieu de $\frac{AK'.K'k'}{\mu}$. Une plus grande éxactitude ſeroit ſuperflue dans un calcul tel que celui-ci, où il ne s'agit, & où il n'eſt poſſible d'arriver qu'à des *à-peu-près*.

16. Pour trouver les valeurs de AR', $A\rho$ (*fig.* 3. & 4.), il faut ſuppoſer d'abord que l'on connoiſſe par des tables de mortalité le nombre de perſonnes $K'k'$ qui meurent de l'inoculation, ſur un nombre donné AK' de perſonnes du même âge qu'on inocule : ce nombre, toujours très-petit, ne doit pas vraiſemblablement être le même pour chaque âge ; c'eſt-à-dire, que le rapport de $K'k'$ à AK' ne doit pas être conſtant ; c'eſt ſur quoi on n'a pas encore d'obſervations ſuffiſantes. Cela poſé,

17. On prendra d'abord le nombre AK des enfans qui naiſſent dans une même année : on ſaura par les tables de mortalité, combien il meurt de ces enfans par an ;

& on formera par ce moyen une table, dont la premiere colonne verticale contiendra les différentes valeurs de l'abſciſſe x ou AR (*fig.* 1.), depuis o juſqu'à 90 ou 95 ans. La ſeconde contiendra les valeurs de y ou RE, c'eſt-à-dire, le nombre des perſonnes reſtantes à la fin de chaque tems AR. Une troiſiéme colomne verticale contiendra les valeurs de u ou GH, c'eſt-à-dire, le nombre de perſonnes que la petite Vérole a emportées pendant les tems AR (*a*). Une quatriéme colomne contiendra les quantités correſpondantes $\int \frac{du}{y}$, qu'il faudra multiplier par la ſoutangente $o, 434294$ de la Logarithmique des tables; j'appelle ces quantités ainſi multipliées ζ. Pour avoir les quantités z, on ajoutera les Logarithmes des y avec les quantités correſpondantes ζ, & les quantités z ſeront celles qui auront pour Logarithmes $\zeta + \text{Log.}\, y$. On écrira ces quantités z dans une cinquiéme colomne. Dans une ſixiéme colomne on mettra les valeurs de $c^{\int \frac{du}{y}}$, ou de $\frac{z}{y}$. Une ſeptiéme co-

(*a*) Il eſt vrai que ces valeurs de GH ne ſont point encore connues par les Tables de mortalité; mais il ſeroit facile, pour peu que le Gouvernement voulût ſe prêter à cette recherche utile, de former en 15 ou 20 ans des Regiſtres Mortuaires, d'après leſquels on dreſſeroit fort aiſément de pareilles tables; & comme ces tables ſi néceſſaires à la queſtion préſente, n'exiſtent pas encore, c'eſt une raiſon de plus pour eſpérer qu'on y penſera. Car ſans ce ſecours, on n'aura jamais que des calculs imparfaits & fautifs ſur les avantages de l'inoculation.

lomne marquera pour chaque âge le rapport de m à n, & une huitiéme celui de $n - m$ à n. La neuviéme colomne donnera le rapport de $K'k'$ à AK' (*fig.* 3.) pour chaque âge; c'eſt-à-dire, le rapport du nombre des morts de l'inoculation au nombre des inoculés. La dixiéme colomne ſera la valeur de $\int \frac{y\,dx}{k}$, c'eſt-à-dire, la vie moyenne propre à chaque âge, avant ou après la petite Vérole. La onziéme, la valeur de $\int \frac{z\,dx}{k} \times \frac{Ak'}{AK'}$, c'eſt-à-dire, la vie moyenne des inoculés. La treiziéme, le tems AR' que les inoculés peuvent eſpérer de vivre. La quatorziéme, la vie moyenne $\int \frac{u'\,dx}{k'} = \int \frac{y\,dx}{k}$ $\times \frac{n}{n-m} - \int \frac{y\,dx\,c^{\int \frac{du}{y}}\,m}{k(n-m)} = \int \frac{y\,dx}{k} \times \frac{n}{n-m}$ $- \int \frac{m\,z\,dx}{k(n-m)}$, de ceux qui n'ont pas eu la petite Vérole; ou, ſi l'on veut, la quantité $\frac{m \int \omega\,dx}{k(n-m)}$, dont leur vie moyenne eſt plus courte que la vie moyenne générale $\int \frac{y\,dx}{k}$ de toutes les perſonnes du même âge, priſes indiſtinctement. La quinziéme enfin, le tems $A\rho$ (*fig.* 4.) qu'ils peuvent raiſonnablement eſpérer de vivre, c'eſt-à-dire, celui où ils ſeront réduits à la moitié; on aura ainſi pour chaque âge le rapport de AR' (*fig.* 3.) à $A\rho$ (*fig.* 4.).

18. Voilà tout ce que la théorie Mathématique peut

nous apprendre sur cette question ; encore faut-il supposer qu'on ait par une bonne suite d'observations la valeur des u, celle de $\frac{m}{n}$ pour chaque âge, & celle de $\frac{K'k'}{AK'}$ aussi pour chaque âge. Jusqu'à ce qu'on connoisse ces valeurs, il ne sera pas possible de rien établir de certain sur l'augmentation de vie moyenne que l'inoculation procure à quelque âge que ce soit.

19. On peut remarquer seulement; 1°. que la quantité $\frac{m}{n}$ augmente à mesure qu'on avance en âge, & que par conséquent la quantité exprimée par le rapport $\frac{m}{n-m}$, augmente continuellement; 2°. qu'au contraire la quantité $\int \omega\, dx = \int (z-y)\, dx$, va en diminuant, ainsi que la quantité k; 3°. que l'expérience seule peut par conséquent décider dans quel cas la diminution $\frac{m \int \omega\, dx}{k(n-m)}$ de la vie moyenne, pour ceux qui n'ont pas eu la petite Vérole, sera la plus grande qu'il est possible; 4°. que pour connoître les quantités u & $\frac{m}{n}$, & par conséquent celles qui en dépendent, il n'est pas nécessaire d'avoir des observations particulieres pour chaque âge ; il suffit d'en avoir pour cinq ou six âges differens ; & on déterminera à-très peu-près les valeurs correspondantes aux autres âges par la méthode connue des *interpolations*, & des courbes de *genre parabolique* ; 5°. que la diminution de la vie moyenne par le risque de la petite

Vérole naturelle, & ſon augmentation par l'inoculation, ſont différentes, quand on ne prend que ceux qui attendent la petite Vérole, & quand on prend le total des perſonnes vivantes à chaque âge; & que la diminution dans le ſecond cas eſt différente de ce qu'elle eſt dans le premier, ainſi que l'augmentation. Le premier cas eſt celui qui intéreſſe chaque particulier à part; le ſecond cas eſt celui qui intéreſſe la totalité de l'Etat. Ainſi les calculs doivent être différens pour les deux cas. Dans le premier cas, la diminution de la vie moyenne eſt $\int \frac{\omega\, dx}{k} \times \frac{m}{n-m}$; dans le ſecond cas elle eſt $=$ $\int \frac{\omega\, dx}{k}$; dans le premier cas, l'augmentation de vie moyenne par l'inoculation eſt $\int \frac{\omega\, dx}{k} \times \frac{Ak'}{AK'}$ $- \int \frac{y\, dx}{k} \left(1 - \frac{Ak'}{AK'}\right) + \int \frac{\omega\, dx}{k} \times \frac{m}{n-m} = \int \frac{\omega\, dx}{k}$ $+ \int \frac{\omega\, dx}{k} \times \frac{m}{n-m} - \int \frac{z\, dx}{k} \left(\frac{AK' - Ak'}{AK'}\right)$; dans le ſecond l'augmentation eſt $\int \frac{\omega\, dx}{k} - \int \frac{z\, dx}{k} \times$ $\left(\frac{AK' - Ak'}{AK}\right)$: donc excepté le cas de $m = o$ & de $AK = AK'$, l'augmentation eſt différente dans les deux cas; & la diminution auſſi, excepté le cas de $n = 2\, m$.

20. On peut encore remarquer; 1°. que l'aire de la courbe de mortalité KEQ (*fig.* 1.) repréſente à-peu-près le nombre des Habitans d'un même lieu, en poſant que le nombre de ceux qui en ſortent, ſoit à-peu-

près égal au nombre de ceux qui y entrent; car il naît chaque année un nombre d'enfans $= AK$, & il meurt une quantité de personnes $= \int dy = AK$; 2°. Donc le nombre total des vivans est $= AK$ multiplié par la vie moyenne. 3°. Par la même raison le nombre des vivans depuis un âge quelconque AR jusqu'à l'âge AQ, est $= RE$ multiplié par la vie moyenne qui répond à AR. 4°. Si on fait $AR =$ 30 ans, on trouvera par ce moyen, en consultant les tables de mortalité, que l'aire REQ est à-peu-près la moitié de l'aire $AKEQ$, c'est-à-dire, qu'il y a à-peu-près autant d'hommes vivans de *o* ans à 30 ans, que de 30 à 100. Cette remarque nous sera utile dans la suite.

(*E*) 1. D'un côté, les Inoculateurs assurent, que dans les 4 premieres années de la vie, on est moins sujet à la petite Vérole que dans les suivantes; car on a vû plus haut (Note *A*), que, suivant eux-mêmes, presque tout ce qui meurt avant quatre ans, (c'est-à-dire, environ la moitié de l'espéce humaine) meurt avant d'avoir eu la petite Vérole. D'un autre côté, plusieurs Médecins prétendent (Voyez le Journal de Médecine de Janvier 1761) que dans les 10 premieres années de la vie on est dix fois plus sujet à la petite Vérole que dans les autres. En admettant ces hypothèses, la plus grande probabilité d'être attaqué de la petite Vérole, seroit depuis 4 ans jusqu'à 10. En même-tems, il ne paroît pas moins certain, que la petite Vérole est d'autant plus dangereuse qu'on est plus avancé en âge. C'est pourquoi si $\frac{1}{n}$ exprime

à

à chaque âge la fraction ou partie des *non variolés* qui a la petite Vérole, & $\frac{1}{nm}$ la partie qui en meurt; il y a lieu de croire que $\frac{1}{n}$ est d'abord assez petit, & qu'il augmente ensuite, pour recommencer à diminuer après l'âge de 10 ans, & pour redevenir très-petit vers l'âge de 50 à 60 ans; & que $\frac{1}{m}$ augmente à mesure que l'âge augmente, sur-tout depuis 15 ans jusqu'à la fin de la vie.

2. Il est vrai que la table de M. Bernoulli ne s'étend que depuis 0 ans jusqu'à 24 ans. Mais 1°. il paroît croire lui-même qu'il a fait le nombre $\frac{1}{n}$ de ceux qui ont la petite Vérole, trop grand pour la premiere année de la vie; 2°. sur un nombre égal de personnes de 20 ou 24 ans d'une part, & de l'autre d'enfans de 4, 5, 6, &c. ans qui auront la petite Vérole, peut-on raisonnablement supposer qu'il n'en mourra pas davantage dans la premiere classe que dans la seconde?

3. Aussi les suppositions de M. Bernoulli conduisent-elles à des conséquences qui ne paroissent pas fort vraisemblables; par exemple, à celle-ci, que dans le cours de la neuviéme année de la vie, il meurt par la seule petite Vérole les deux tiers de ce qui meurt par toutes les autres maladies prises ensemble. Il y a, ce me semble, tout lieu de douter que l'expérience confirme jamais cette effrayante conclusion.

(*F*) 1. Ces suppositions n'ont rien de forcé, même

dans les principes des Inoculateurs. Suivant M. Bernoulli, il y a quatre ans de différence de vie moyenne pour les enfans de 5 ans qui n'ont pas eu la petite Vérole, & pour ceux qui l'ont eûe; & ſuivant le même Géometre, il doit y avoir à-peu-près le même gain pour les perſonnes de 30 ans, dont la vie moyenne eſt d'ailleurs d'environ 30 années par les tables de mortalité; ce ſeroit donc environ 34 ans pour les inoculés, ou plus éxactement (Note *D*. art. 14.) un peu plus de 30 ans pour ceux-ci, & environ 26 pour les non-inoculés.

2. En admettant cette ſuppoſition, & en ſuppoſant de plus que le riſque de mourir de l'inoculation ſoit $\frac{1}{200}$, celui qu'on inocule à 30 ans, riſque $\frac{1}{200}$ d'avancer ſa mort d'environ 26 ans, contre l'avantage d'augmenter d'un ſeptiéme ce qui lui reſte de tems à vivre, & ſa vie totale d'un quatorziéme, dont il ne devra jouir qu'à 56 ans. Or en ce cas le riſque eſt-il égal ou plus grand que l'avantage? Voilà la queſtion qu'il faut résoudre, pour apprétier mathématiquement (dans les hypothèſes précédentes) les avantages ou les riſques de l'inoculation.

(*G*) 1. Avant que de développer cette difficulté, il ne ſera pas inutile d'en propoſer une autre, qui eſt générale pour l'eſtimation de la mortalité. Elle tombe ſur la maniere d'apprétier les degrés de probabilité de la vie. Si on s'en tient ſur cela aux régles ordinaires des probabilités, & qu'on regarde la vie comme une eſpéce de Loterie ou de jeu de hazard, on trouvera que l'*eſpérance* de chaque Joueur ou homme, eſt égale à la ſomme des

personnes vivantes à la fin de chaque année *AR* (*fig.* 1.) divisée par le nombre *AK* des personnes vivantes au commencement *A* du tems *AQ*; ce qui donne l'aire entiere *AKEQ* divisée par *AK*: c'est à-dire, que l'*espérance* de chaque homme est égale au tems que doivent vivre tous ces hommes pris ensemble, ce tems étant divisé par le nombre des hommes; comme dans une Loterie où chaque joueur a pris un billet, l'*espérance* de chaque joueur est égale à la somme des lots divisée par le nombre des billets. Il semble donc, suivant cette premiere maniere si naturelle d'envisager la chose, que le tems que chaque homme peut espérer de vivre, doit être censé égal à ce qu'on appelle communément, *sa vie moyenne*.

2. Cependant il y a une autre maniere tout aussi plausible d'envisager la question, qui donne un autre résultat. C'est de chercher le tems *AR*, au bout duquel il sera mort la moitié des vivans *AK*; & de regarder ce tems comme celui qu'on peut espérer de vivre: puisqu'on peut parier au pair ou un contre un, qu'on sera encore vivant au bout de ce tems. Ce tems *AR* est différent de celui qui donne la *vie moyenne;* excepté dans un seul cas qui n'a pas lieu dans la nature: c'est le cas où *KEQ* seroit une ligne droite, c'est-à-dire, où il mourroit chaque année un nombre égal de personnes. Or laquelle doit-on préférer de ces deux manieres d'estimer la durée de la vie? Elles paroissent toutes deux également plausibles, quoiqu'elles donnent des résultats très-différens.

Par exemple, la durée de la vie des enfans nouveaux nés, est estimée, suivant la premiere méthode, de 26 ans à-peu-près par les calculs de M. Halley; & la durée de la vie de ces enfans, estimée suivant la seconde méthode, est d'environ 8 ans. (*Voyez la Table insérée à la fin du second Volume de l'Histoire Naturelle de Mrs de Buffon & d'Aubenton*). Cela vient de ce qu'il meurt une quantité prodigieuse d'enfans dans la premiere année de la vie.

3. En supposant cette premiere difficulté résolue, celle que nous avons touchée dans notre Mémoire, subsistera encore dans toute sa force. Supposons que a soit *l'espérance de vivre*, ou la durée de la vie, estimée de l'une ou l'autre des deux manieres précédentes; & que $a+c$ soit l'*espérance de vivre* pour les inoculés. Il est visible 1°. que celui qui se fait inoculer, acquiert l'espérance de vivre après le tems a, un nombre d'années $= c$; 2°. qu'il risque $\frac{1}{300}$, ou, si l'on veut, en général $\frac{1}{n}$ de sacrifier en un mois, en 15 jours, &, pour ainsi dire, tout d'un coup (car cela revient à peu-près au même pour un tems si court) tout le tems a qu'il peut espérer de vivre. On pourroit donc regarder $-\frac{a}{n}$ comme le risque, & c comme l'espérance, si toutes choses étoient d'ailleurs égales. Mais il faut remarquer 1°. que le risque $-\frac{a}{n}$ est couru dans le mois, & pour ainsi dire dans le jour; au lieu que l'espérance de vivre un nombre c

d'années, eſt rejettée au bout du tems a. Et quand même on ne regarderoit pas l'eſpérance c comme diminuée par le tems a au bout duquel elle eſt placée, on ne peut guères ſe diſſimuler que le riſque $-\frac{a}{n}$ ne ſoit augmenté par le peu de tems durant lequel il eſt couru, ſur-tout lorſqu'il s'agit de la vie, c'eſt-à-dire, du plus précieux de tous les biens. Or en quelle raiſon le riſque $-\frac{a}{n}$ eſt-il augmenté par cette briéveté de tems? C'eſt ſur quoi on ne peut faire que des hypothèſes. 2°. Si le tems a, au bout duquel les années d'eſpérance c ſont placées, atteint juſqu'à un âge avancé, comme de 60 ans & plus, il eſt évident, que pendant ces années c, on ſera ſujet aux infirmités de la vieilleſſe; & qu'ainſi l'eſpérance c doit être diminuée à cet égard: puiſque le tems qu'on ſouffre, eſt proprement un tems à retrancher ſur la véritable durée de la vie, ſur la vie proprement dite. Or ſuivant quelle loi cette quantité c doitelle être diminuée? C'eſt encore ſur quoi on ne peut faire que des hypothèſes, toujours vagues & peu ſatisfaiſantes.

(*H*) 1. J'en dis autant de ceux qui ont prétendu qu'on devroit ſe faire inoculer, quand l'inoculation ne diminueroit le riſque de mourir de la petite Vérole, que de la moitié, du tiers, du quart &c. Il me ſemble que dans cette aſſertion on n'a pas aſſez fait d'attention à la différence d'un riſque préſent où l'on s'expoſe, à un riſque

éloigné & incertain. Il meurt, dit-on, de la petite Vérole naturelle, un ſeptiéme de ceux qui en ſont attaqués; s'il mouroit un quatorziéme des inoculés (ce qui réduiroit le riſque à la moitié) oſeroit-on dire que dans ce cas l'inoculation dût être pratiquée?

2. J'ai été bien ſurpris, je l'avoue, de lire dans un Ouvrage de Médecine, que *l'éloignement* du riſque ne devoit être ici compté pour rien. Sur ce pied-là, un riſque de la vie qu'on doit courir dans le jour, & un riſque pareil qu'on ne doit courir qu'au bout de 30 ans, ſeroient égaux; qui pourra le croire?

(I) Selon les obſervations faites en Angleterre, la petite Vérole emporte $\frac{1}{14}$ du genre humain. Il meurt à Paris 20000 perſonnes par an; M. *de la Condamine* conclud de-là qu'il meurt à Paris (année commune) environ 1400 perſonnes de la petite Vérole. En ſuppoſant le nombre des Habitans de cette Ville de 700000 ames, c'eſt environ 1 ſur 500 qui meurt de la petite Vérole en un an, & par conſéquent 1 ſur 6000 en un mois. On pourra, dans la ſuite, avec des Liſtes éxactes, connoître plus préciſément ce rapport, & même, ce qui eſt eſſentiel, les variétés de ce rapport ſuivant les différens âges. Mais pour le préſent nous ſommes obligés de nous borner à cette eſtimation, qui même eſt beaucoup au-deſſous de la vérité; car on va voir que le nombre de ceux qui meurent de la petite Vérole, eſt beaucoup plus grand.

(K) En voici la preuve. De toutes les perſonnes actuellement vivantes, depuis le moment de la naiſſan-

ce jusqu'à 100 ans, il y en a à-peu-près autant (suivant les tables de mortalité) depuis 30 ans jusqu'à 100 ans, que depuis 0 ans jusqu'à 30 (Note *D*, Art. 20.). Donc de toutes les personnes actuellement vivantes, le nombre de celles qui existent depuis 0 ans jusqu'à 30 ans, est à-peu-près la moitié du tout. Or à 30 ans presque tout le monde a eu la petite Vérole; donc le nombre des personnes qui n'ont pas eu la petite Vérole, prises depuis 0 ans jusqu'à 100 ans, differe très-peu du nombre de celles qui ne l'ont pas eûe depuis 0 ans jusqu'à 30 ans. Or ce dernier nombre est évidemment plus petit, & beaucoup plus petit, que le nombre total des personnes vivantes depuis 0 ans jusqu'à 30 ans. Donc le nombre de personnes actuellement vivantes, & qui n'ont pas eu la petite Vérole, est moindre & beaucoup moindre, que la moitié du nombre total des personnes vivantes.

(*L*) 1. La plûpart des hommes ayant la petite Vérole long-tems avant 30 ans, on peut supposer sans risque, que le nombre de ceux qui n'ont pas eu la petite Vérole avant cet âge, est tout au plus la moitié de ceux qui parviennent à ce même âge, & par conséquent tout au plus le quart du total des vivans. Or, cela posé, le risque de mourir de la petite Vérole, seroit au moins de $\frac{1}{1500}$ par mois; & par conséquent presqu'égal à celui de l'inoculation, sagement administrée.

2. Si le risque de mourir de la petite Vérole à chaque âge, étoit de $\frac{1}{64}$ par an, comme le veut M. Bernoulli, ce risque seroit de $\frac{1}{768}$ en un mois, & par conséquent

plus grand que le risque $\frac{1}{1200}$ de l'inoculation, sagement administrée. Mais le calcul que nous avons fait, porte sur des suppositions moins gratuites, & n'est guères moins favorable à l'inoculation.

3. Il est vrai qu'on y a supposé, faute d'observations suffisantes, que le risque $\frac{1}{3000}$ de la petite Vérole naturelle, est le même pour tous les âges; or il est peut-être plus grand pour quelques-uns. Mais aussi il faut remarquer; 1°. que dans ce cas il seroit plus petit pour d'autres âges; 2°. que le risque total $\frac{1}{3000}$ pour tous les âges pris indifféremment, est certainement fort au-dessous de la vérité, comme on l'a prouvé art. 1. de cette Note.

(*M*) 1. Quelques Partisans de l'inoculation ont fait en sa faveur le raisonnement suivant. Il meurt en un mois à-peu-près une personne sur trois cens; donc en supposant le risque de l'inoculation de 1 sur 300, ce risque n'est pas plus grand que celui de mourir dans le même-tems de toute autre maladie accidentelle, & qu'on ne peut ni prévoir, ni prévenir. Ce raisonnement ne me paroît pas concluant. Car il faudroit, pour qu'il fût juste, que de trois cens personnes *inoculées au hazard*, il n'en mourût qu'une, comme de trois cens personnes *prises au hazard*, il n'en meurt qu'une en un mois par les autres maladies. Or le nombre des victimes de l'inoculation paroît être beaucoup plus grand que de 1 sur 300, quand on inocule sans précaution, comme les Listes mortuaires le prouvent. Au contraire de 300 personnes saines & bien choisies, il n'en meurt aucune par l'inoculation:

lation : & il y a lieu de croire qu'il n'en mourroit non plus aucune en un mois, si on les abandonnoit à la nature. Ainsi, quoique le raisonnement dont il s'agit, ne soit pas concluant en faveur de l'inoculation, il ne sauroit du moins être rétorqué contr'elle.

2. Un autre raisonnement qu'on a fait en faveur de l'inoculation, ne me paroît pas non plus assez concluant. Il consiste à prouver que celui qui attend la petite Vérole, risque à-peu-près autant d'en mourir, que celui qui l'a déja. Je ne dispute point contre les calculs qu'on a faits là-dessus ; mais on a oublié d'avoir égard à cette différence essentielle entre les deux cas, que celui qui a déja la petite Vérole, court risque d'en mourir dans très-peu de jours, & que l'autre ne risque peut-être d'en mourir qu'au bout d'un grand nombre d'années. Or cette différence de tems doit en mettre une prodigieuse dans l'estimation des deux risques, & dans le parallèle qu'on en fait. C'est à quoi, je le répete, les Partisans de l'inoculation n'ont point eu assez d'égard. Je me flatte qu'on en conviendra, si on fait attention à toutes les réfléxions que nous avons exposées sur ce sujet, dans notre Mémoire, & dans les Notes précédentes.

3. Indépendamment de cette considération, je pourrois contester encore la supposition qu'on fait, que celui qui attend la petite Vérole, à quelque âge que ce soit, risque presqu'autant d'en mourir, que celui qui a cette maladie ; parce que le risque d'avoir la petite Vérole, diminue à mesure qu'on avance en âge. Quand il seroit

vrai, comme on le prétend, que de 100 enfans qui naissent, quatre seulement seront éxempts de la petite Vérole, & que par conséquent la probabilité qu'on doit l'avoir, est de 24 sur 25 lorsqu'on vient au monde; cette probabilité diminue vraisemblablement à mesure qu'on vieillit, & à l'âge de 40, 50 ans &c. & par-delà, elle n'est peut-être plus que de 1 sur 25. C'est sur quoi les observations seules peuvent nous instruire parfaitement. Mais ce que nous venons de dire, suffit pour montrer que le raisonnement précédent est appuyé sur une supposition hazardée, & que d'ailleurs ce raisonnement n'est pas concluant, même pour ceux qui admettroient la supposition.

(*N*) 1. Il y a d'autres considérations curieuses à faire sur l'inoculation, & en général sur la vie des hommes; considérations qui rendent encore plus difficile l'application du calcul des probabilités à l'inoculation.

La premiere est celle-ci: que dans les premieres années de l'enfance, & dans les dernieres années de la vieillesse, les hommes sont sujets à beaucoup de maux & de maladies; qu'ainsi on peut regarder la vie pendant cet espace de tems, comme étant réellement accourcie, puisqu'une partie de cette vie est à charge. C'est pourquoi on peut regarder, par exemple, le tems *physique* de la vie *A S* (*fig.* 5) qui suit la naissance jusqu'à un certain âge, comme étant *réellement* réduit à un certain tems plus petit *T S*, égal au tems pendant lequel on n'a point souffert; & en général *A L* étant un tems *phy-*

sique quelconque donné de la vie, on ne devra censer ce tems égal qu'au tems *B L*, pendant lequel on a joui de la vie sans souffrir, & qu'on peut appeller le tems de la *vie réelle*. Par ce moyen on tracera une courbe *A T B*, qui d'abord, c'est-à-dire, au point *A*, touchera presque son axe, qui sera ensuite convexe vers ce même axe, jusqu'à ce qu'enfin à un certain point *T*, elle vienne à faire avec cet axe un angle presqu'égal à 45 degrés, quoiqu'un peu plus petit, comme il le doit toujours être; cet angle subsistera à-peu-près de cette grandeur, pendant le tems *S L* qui représente les plus belles années de la vie; & la courbe *T B* sera pour lors à-peu-près une ligne droite, faisant avec *S L* un angle d'un peu moins de 45 degrés; après cela la courbe deviendra concave vers son axe, & lui sera presque parallèle en *O*, vers les dernieres années de la vie.

2. Or cela posé, il faudra dans les constructions précédentes substituer aux abscisses *A R*, les ordonnées correspondantes *R X*, tout le reste demeurant d'ailleurs le même; c'est-à-dire, qu'il faudra conserver les mêmes valeurs des ordonnées y & z, & changer seulement les abscisses *A R* en *R X*.

3. Comme on a trouvé ci-dessus, dans le cas de l'inoculation, que le tems $A\rho$ que les inoculés peuvent espérer de vivre, est plus grand qu'un pareil tems *A R* pour les non inoculés, on aura évidemment $\rho\xi > RX$; ainsi le tems $\rho\xi$ qu'on peut espérer de vivre après avoir été inoculé, sera encore plus grand dans cette hypothèse

que le tems *R X* qu'on peut espérer de vivre sans l'inoculation. Mais il restera toujours sur le calcul précis des avantages de l'inoculation, des difficultés semblables à celles qu'on a exposées dans ce Mémoire & dans les Notes ci-dessus.

4. J'ai supposé dans, l'art. précédent, que les inoculés étoient précisément dans le même cas que les autres hommes; c'est-à-dire, que les tems *R X* de la vie *réelle*, répondans aux tems *A R* de la vie *physique*, sont les mêmes pour les inoculés, & pour ceux qui ne le sont pas. Cette supposition n'a rien qu'on puisse contester jusqu'ici par les observations; il y a même lieu de croire que les tems *R X* sont un peu plus longs pour les inoculés que pour les autres; car ces inoculés une fois guéris, sont délivrés d'une maladie, savoir de la petite Vérole; & cette maladie, même quand on n'en mourroit pas, est un mal qui doit être censé diminuer au moins de quelque chose, le tems de la vie *réelle*. Au reste la différence entre les deux états, est si petite à cet égard, qu'on ne doit ni ne peut en tenir aucun compte.

5. Je ne crains pas qu'on objecte que l'inoculation peut laisser dans le sang le germe d'autres maladies, même non mortelles, qui rendroient à cet égard le sort des inoculés moins favorable par rapport au tems *R X* de la vie *réelle*. Car outre que l'expérience ne prouve point cette prétention, je pourrois dire aussi que l'inoculation raffermit le tempérament, & préserve de diverses maladies; ainsi à cet égard le sort des inoculés seroit favo-

rable; mais dans l'incertitude je ſuppoſe tout égal. Les raiſonnemens vagues de Médecine doivent être proſcrits dans l'éxamen de cette queſtion; les faits ſeuls doivent décider.

6. On demandera ſans doute quelle doit être la loi des ordonnées de la courbe *ATXO*. Je réponds qu'on ne peut faire ſur cela que des conjectures; cependant, pour donner là-deſſus un eſſai de calcul, je crois qu'on ne s'écartera pas beaucoup de la vérité, ſi l'on ſuppoſe 1°. $AS = 10$ ans, qui eſt le tems où les dangers de l'enfance ſont paſſés, & où l'on commence à jouir de la vie; 2°. que la courbe *AT* ſoit une Parabole ordinaire, dans laquelle les ordonnées ſoient comme les quarrés des abſciſſes; d'où l'on voit que l'angle en *T* étant (*hyp.*) de 45°, on aura $TS = \frac{1}{2} AS = 5$ ans; 3°. que *TB* ſoit une ligne droite, & que l'abſciſſe correſpondante $SL = 50$ ans, ſavoir, depuis 10 ans juſqu'à 60; 4°. enfin que $LQ = 40$ ans, & que *BO* ſoit auſſi une portion de Parabole, faiſant en *B* un angle de 45°. avec ſon axe; enſorte que $OT' = \frac{1}{2} BT' = 20$. Ces ſuppoſitions, qu'on peut changer en d'autres, ſi on ne les approuve pas, approcheront peut-être aſſez de la vérité; mais je le répete, on eſt réduit ici aux conjectures.

7. Une ſeconde conſidération à faire par rapport à l'inoculation, & en général à la vie des hommes, c'eſt celle qui regarde l'utilité dont les hommes ſont à l'Etat, ou le tems qu'ils vivent *réellement* pour l'Etat, & qu'on peut appeller leur *vie civile*. Je m'explique. Il eſt certain que

dans les premieres années de la vie, les hommes sont non-seulement peu utiles à l'Etat, mais même qu'ils lui sont à charge, puisqu'il faut les élever & les nourrir; ainsi le tems de leur vie par rapport à l'Etat dans les premieres années, c'est-à-dire, le tems de leur *vie civile* dans ces premieres années, est un tems qu'on doit considérer comme négatif; il en est de même des années de la décrépitude. C'est pourquoi si les abscisses *AR* (*fig.* 6.) représentent les tems de la vie *physique*, les tems de la vie *civile* seront représentés par les ordonnées *RX* d'une courbe *AYSXO*, qui d'abord aura des ordonnées négatives, qui coupera son axe en *A* sous un angle de 45°, deviendra ensuite concave vers son axe avec très-peu de courbure, en s'écartant toujours de ce même axe jusqu'à un point *Y*, dont l'abscisse *AE* exprimera le tems où les hommes commencent à n'être, ni à charge, ni utiles, ou plutôt aussi utiles qu'à charge à l'Etat. Ensuite la courbe se rapprochera de son axe, en demeurant toujours concave, jusqu'à un point *S* où elle fera avec son axe un angle de 45°. & dont l'abscisse *AT* marquera le tems où les citoyens commencent à être entiérement utiles. Après cela notre courbe deviendra une ligne droite *SB*, jusqu'à un point *B* dont l'abscisse *AL* exprimera l'âge où l'on commence à être moins utile à l'Etat par son âge & ses infirmités; enfin elle se rapprochera de son axe, en devenant toujours concave, jusqu'à un point *O* qui répond à $AQ = 95$ ou 100 ans, & où elle fera avec son axe un angle de

45°: & il faut remarquer qu'entre les points *B* & *O*, il y aura un point *V* où la courbe ſera parallèle à ſon axe; c'eſt celui qui répond au commencement *Z* de la décrépitude, qui eſt le tems où les hommes ne ſont plus qu'à charge à l'Etat.

8. Si on demande quelle loi on peut donner aux ordonnées de la courbe *AYSXO*, j'imagine que ce ne ſera peut-être pas s'écarter beaucoup de la vérité (dans une matiere auſſi obſcure & auſſi conjecturale que celle-ci) de ſuppoſer *AYS* une Parabole dans laquelle $AC =$ 20 ans, les points *S* & *C* ſe confondant; ce tems *AC* eſt celui où les hommes ſont cenſés n'avoir point encore vêcu pour l'Etat. On fera enſuite $CL = 40$ ans, c'eſt-à-dire depuis 20 ans juſqu'à 60; $LQ = 40$ ans, depuis 60 juſqu'à 100; & *BVO* ſera une portion de Parabole ordinaire; ce qui donnera $Vu = \frac{1}{2} Bu = 10$ ans.

9. D'après ces ſuppoſitions, ou d'après d'autres ſemblables, & peut-être plus éxactes, qu'on pourra imaginer ſur l'eſtimation de la vie civile des hommes; voici les corrections qu'on pourra faire aux calculs de l'inoculation. Soit tracée d'abord la courbe $K'E'Q$, qui repréſente la courbe de *la vie phyſique* des inoculés, ou de ceux qui ne le ſont pas. A chaque point ε correſpondant à l'ordonnée RE', on élevera l'ordonnée $\varepsilon\xi = RX$, & qui ſera poſitive ou négative, ſelon que *RX* ſera poſitive ou négative; on formera par ce moyen une courbe $K'\zeta\Omega\xi\omega$, qui aura d'abord des ordonnées négatives, qui coupera enſuite ſon axe au point Ω ou $A\Omega = CD$,

& qui reviendra ensuite le couper au point ω, ou $A\omega = QO$: L'aire de cette courbe sera égale à l'aire $A\Omega\xi\omega$ moins l'aire $K'\zeta\Omega$, & exprimera la vie moyenne des hommes, par rapport à l'Etat (c'est-à-dire, leur vie *civile*) soit que la courbe $K'E'Q$ représente la vie ordinaire des hommes, ou celle des inoculés.

10. Il n'est pas douteux que cette considération de la vie *réelle* & de la vie *civile* des hommes ne soit essentielle à la théorie Mathématique de l'inoculation, pour déterminer les tems où cette opération seroit la plus avantageuse, soit aux Particuliers dans le premier cas, soit à l'Etat dans le second ; c'est-à-dire, pour déterminer les cas où la vie moyenne des citoyens (soit *réelle*, soit *civile*) seroit le plus augmentée par l'inoculation. Mais pour cela il faudroit commencer par avoir une bonne méthode pour estimer la vie *réelle* & la vie *civile* des hommes ; or il n'est pas possible, comme nous l'avons déja dit, de parvenir sur ce sujet à une théorie satisfaisante. Tout au plus peut-on se flatter d'arriver à une estimation approchée ; mais il restera toujours quelque chose de vague & d'arbitraire dans ces sortes d'estimations. Ce qu'il y a de certain, c'est que la vie *réelle*, & sur-tout la vie *civile* different beaucoup de la vie *physique* ; l'Essai de théorie que nous venons d'en donner, tout imparfait qu'il est, en est une preuve suffisante.

11. Un savant Géometre m'a communiqué une maniere de calculer les avantages de l'inoculation, qui est fort simple, mais qui ne me paroît pas juste. J'en ferai mention

mention ici, parce que le ſophiſme en eſt aſſez délicat. Soit, dit-il, après avoir tracé la courbe de mortalité générale *KEQ* (*fig.* 7.), *Ee* = au nombre des morts de la petite Vérole pendant le tems *AR*; & ayant fait la même choſe à chaque point *E*, ſoit tracée la courbe *KeZ*, qui marquera par ſes ordonnées *Ge* le nombre de ceux qui meurent durant le tems *AR* par d'autres maladies que la petite Vérole. Il eſt viſible, dit ce Géometre, que *NZ* marquera le nombre de ceux qui meurent pendant le tems total *AQ*, par d'autres maladies que la petite Vérole. Suppoſons à préſent, continue-t-il, que *Kk* ſoit le nombre de ceux qui meurent de l'inoculation; il eſt clair qu'au bout du tems total *AQ* toutes les perſonnes *Ak* ſeront mortes, puiſque ce tems *AQ* eſt ſuppoſé le plus long terme de la vie; il eſt clair de plus que toutes ces perſonnes *Ak* mourront d'autres maladies que de la petite Vérole; donc, continue toujours ce Géometre, ſi on fait $NZ : Ge :: Ak$ eſt à un quatriéme terme *Gi*, ce terme *Gi* exprimera le nombre de ceux, qui ayant été inoculés, meurent pendant le tems *AR* par d'autres maladies que la petite Vérole; & ſi à ce nombre *Gi* on ajoute $io = Kk$ = au nombre de ceux qui ſont morts à l'inſtant *A* par l'inoculation, on aura *Go* = au nombre total des inoculés morts pendant le tems *AR*. Ainſi ce Géometre ſe ſert de la courbe *koQ* pour repréſenter la courbe de mortalité des inoculés.

12. L'erreur de ce raiſonnement eſt, ſi je ne me

trompe, dans la proportion $NZ : Ge :: Ak : Gi$. Pour le faire ſentir, je ſuppoſe $Kk = o$, & $QZ : Ee :: NZ : Ge$; donc, ſuivant ce Géometre, Gi ſeroit $= GE$; c'eſt-à-dire, que malgré l'inoculation, dont on ſuppoſe qu'il ne meurt pas une ſeule perſonne, il mourroit dans le même-tems autant de perſonnes que ſi on n'avoit pas inoculé. Or cela ne ſe peut, puiſque l'inoculation faite à l'inſtant A, & dont (*hyp.*) il ne meurt perſonne, ſauve la petite Vérole à toutes les perſonnes AK, & par conſéquent leur ſauve une grande cauſe de mort. Ainſi, quoiqu'à la fin du tems AQ, toutes les perſonnes AK ſoient mortes (parce que ce tems AQ eſt (*hyp.*) le plus long terme de la vie) il eſt certain qu'à la fin du tems AR, il devroit toujours y avoir plus d'inoculés vivans, ſurtout ſi Kk étoit $= o$.

13. Envain diroit-on que nous avons ſuppoſé gratuitement $QZ : Ee :: NZ : Ge$; car en général quelque ſuppoſition qu'on faſſe ſur le nombre des morts de la petite Vérole, il eſt viſible que l'inoculation ſeroit avantageuſe, s'il n'en mouroit perſonne, & ſi cette opération ſauvoit la petite Vérole. Or c'eſt ce qui n'auroit pas lieu dans la conſtruction que nous venons de rapporter; cette conſtruction, ou plutôt cette ſolution n'eſt donc pas juſte.

14. Mais pour le faire voir d'une maniere encore plus nette, & qui rendra ſenſible en même tems l'erreur du raiſonnement dont il s'agit, je ſuppoſe $Kk = QZ$ (*fig.* 8.), c'eſt-à-dire, que ceux qui meurent de l'inoculation à

l'instant *A* soient en nombre égal à ceux qui mourroient de la petite Vérole naturelle pendant le tems total AQ; en ce cas, suivant la construction de notre savant Géometre, Gi seroit $= Ge$, & la courbe koQ seroit parallèle, égale & semblable à la courbe KeZ; Ro seroit le nombre des inoculés vivans à la fin du tems AR, & l'on auroit $d(Ro) = -d(Ge)$. Or je dis que la différence de Ro devroit être $<$ que $-d(Ge)$. Car la différence de Ro exprime ceux qui meurent dans le tems infiniment petit Rr par d'autres maladies que la petite Vérole, sur le nombre de personnes Ro; & la quantité $-d(Ge)$ exprime ceux qui meurent dans le même tems par d'autres maladies que la petite Vérole sur un nombre de personnes $= RE$; donc puisque RE est $> Ro$, il faut que $d(Ro)$ soit $< -d(Ge)$; car $d(Ro)$ doit être à $-d(Ge) :: Ro : RE$.

15. L'erreur du raisonnement que nous réfutons, vient de ce qu'on y compare deux cas qui ne sont pas semblables. Dans le premier qui est celui de l'inoculation, tous ceux qui doivent mourir de la petite Vérole, en meurent, pour ainsi dire, au même instant; dans le second ils meurent à différens âges, & dans toute l'étendue du tems AQ. Ainsi en supposant, par exemple, $Kk = QZ$, il reste, après le tems AR, plus de vivans RE non inoculés, que d'inoculés Ro. Or comme il meurt toujours plus de personnes (indépendamment même de la petite Vérole) sur un nombre de vivans plus grand, il est aisé de conclure que le nombre de vivans RE

ſera plus diminué durant le tems *R r* par d'autres maladies que la petite Vérole, que ne le ſera pendant le même-tems le nombre de vivans *R o*, auſſi par d'autres maladies. Cependant la conſtruction ou ſolution propoſée ſuppoſe le contraire; par conſéquent elle ſuppoſe une choſe fauſſe.

16. Voilà, ce me ſemble, en quoi conſiſte l'erreur de cette ſolution, qui d'ailleurs eſt fort ſimple, & dont l'élégance doit faire regretter qu'elle ne ſoit pas juſte.

17. Que conclure de tout ce Mémoire? 1°. Que juſqu'à préſent on n'a point calculé d'une maniere éxacte & ſatisfaiſante, les avantages de l'inoculation, ni préſenté la queſtion comme elle le doit être. 2°. Qu'on n'y a pas aſſez diſtingué deux queſtions différentes, l'avantage que l'Etat peut tirer de l'inoculation, & celui que les Particuliers peuvent en eſpérer. 3°. Que pour calculer d'une maniere préciſe les avantages de l'inoculation, il faut d'abord & préliminairement avoir une bonne méthode pour calculer la probabilité de la vie; méthode ſur laquelle on peut former des doutes bien fondés. 3°. Que quand on aura cette méthode, il faudra en trouver une autre pour comparer le riſque de mourir en un mois ou 15 jours, ou en général en un tems fort court, à l'eſpérance de vivre quelques années ou quelques mois de plus au bout d'un tems fort éloigné; méthode très-difficile, & peut-être impoſſible à trouver. 4°. Qu'il faudra trouver outre cela une bonne théorie pour parvenir à comparer la vie *phyſique* des hommes avec leur vie

réelle & leur vie *civile*; théorie qui est pour le moins aussi remplie de difficultés. 5°. Enfin, & c'est-là le plus facile, qu'il faudroit avoir des tables de mortalité, qui marquassent l'âge des personnes mortes de la petite Vérole; tables qui nous manquent encore. Ces tables au reste ne pourroient être trop étendues ni trop multipliées; elles donneroient le moyen de calculer la mortalité de la petite Vérole, pour les différens âges, pour les différens climats, pour les différentes saisons, pour les Villes & pour les Campagnes. On en déduiroit de combien le danger de la petite Vérole diminue dans chacun de ces cas la vie moyenne des hommes. On sauroit aussi par ce même moyen quel est le danger de l'inoculation dans ces différens cas, supposé qu'il y en ait encore pour l'inoculation sagement pratiquée; & de combien cette opération augmenteroit la vie moyenne. Et si le danger de l'inoculation se trouvoit nul, ou comme nul, alors l'augmentation de la vie moyenne seroit le véritable avantage résultant de cette opération.

18. On voit donc, que soit faute de théories suffisamment exactes, soit faute d'observations suffisantes, on ne peut jusqu'ici, & peut-être qu'on ne pourra de longtems parvenir à une bonne Analyse Mathématique des avantages de l'inoculation. Mais d'un autre côté, si les Inoculateurs viennent à bout de constater par les faits, sans aucune replique, que le risque de l'inoculation n'est pas de 1 sur 1200, ou même sur un plus grand nombre, quand on la pratique avec les précautions nécef-

faires (*a*), il faudra convenir que ce risque devra pour lors être réputé nul, & qu'ainsi l'inoculation sera incontestablement avantageuse, non-seulement à l'Etat, mais encore aux Particuliers.

19. On m'objectera peut-être que je n'ai point tenu assez de compte dans ce Mémoire des faits contraires à l'inoculation, & rapportés par ses adversaires. Je réponds 1°. que mon objet n'a point été de discuter des faits, mais d'examiner seulement les conséquences Mathématiques qu'on en tire, ou qu'on en peut tirer. 2°. Que les faits rapportés par les *anti-Inoculateurs*, ont été contestés pour la plûpart par leurs adversaires, & qu'ainsi je ne pouvois parler de ces faits pour en rien conclure de certain. 3°. qu'au contraire le fait des 1200 inoculés bien choisis, & guéris en Angleterre par M. Ranby, ne me paroît avoir été contesté de personne ; & qu'en conséquence c'est de cet unique fait *avoué* que je suis parti, pour y trouver, sinon des preuves démonstratives,

(*a*) On m'a objecté que si on ne donnoit l'inoculation qu'à des Sujets bien constitués, on ne gagneroit rien par-là, puisque vraisemblement ces Sujets auroient échappé à la petite Vérole naturelle. Je ne crois pas cette réfléxion juste; car l'expérience prouve que les Sujets les plus vigoureux succombent pour le moins autant que les autres à la petite Vérole naturelle. Au contraire on a vû des Sujets foibles & mal sains, échapper à l'inoculation, après avoir été bien préparés. Le grand avantage de l'inoculation est cette préparation que l'on donne aux Sujets qu'on inocule, & en conséquence de laquelle la petite Vérole doit être infiniment moins funeste.

au moins un préjugé favorable à la pratique de l'inoculation.

20. Qu'on se garde donc bien de proscrire cette opération, puisque les faits qui lui sont avantageux, paroissent être jusqu'ici en beaucoup plus grand nombre que les faits contraires. Mais qu'on la pratique avec toute la prudence & toutes les précautions convenables, au point de faire évanouir le peu de crainte qu'elle peut encore laisser. Qu'on tâche de ne pas perdre, s'il est possible, un inoculé sur 3000, ou au moins sur 1500; alors l'inoculation ne devra plus faire de peur à personne; alors l'intérêt de l'Etat & celui des Particuliers seront les mêmes dans cette opération; & l'on pourra dans vingt ou trente années tout au plus, par des Listes éxactes & nombreuses, connoître au juste de combien l'inoculation augmente à chaque âge la vie moyenne des hommes. Cette augmentation de la vie moyenne sera pour lors le véritable avantage de l'inoculation; puisque le risque de cette opération sera entiérement nul, ou tout au plus égal à celui qu'on court d'avoir la petite Vérole & d'en mourir dans le même mois où l'on se fait inoculer.

Fin du onziéme Mémoire & de ses Notes.





DOUZIÉME MÉMOIRE.

Application de ma ſolution du Problême des trois Corps, à la Théorie des Comètes.

I.

SOIT A (*fig. 9.*) un corps lancé ſuivant une direction AH perpendiculaire à AS, & pouſſé vers le point fixe S, par une force qui ſoit en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & qui au point A ſoit $= F$; ſuppoſons de plus que ce corps ſoit pouſſé par deux autres forces, dont l'une φ ſoit dans la direction du rayon vecteur CS, & dont l'autre π ſoit perpendiculaire au même rayon vecteur. J'ai démontré dans les Mémoires de l'Académie de 1745, que ſi on nomme

SC . . . . x,
SA . . . . a,
La viteſſe en C . . . . v,
La différentielle de l'arc AC . . . . ds,
L'arc circulaire décrit du rayon SA, & compris entre
SA & SC . . . . z,
Enfin la viteſſe en A . . . . g,

J'ai

J'ai démontré, dis-je, qu'en supposant $u = \frac{aa}{x}$, on auroit pour l'équation de l'orbite AC décrite par le corps, $ddu + \frac{u\,dz^2}{a^2} - \frac{a^2\,dz^2}{gguu} \times \left(\frac{Fuu}{aa} + \varphi - \frac{\pi a\,du}{u\,dz}\right) \times \left(1 - \frac{a\,ds}{vxx\,dz}\int\frac{\pi x\,ds}{v}\right)^2 = 0.$

II.

J'ai démontré de plus dans le même Mémoire, que l'on aura en général $\frac{ds}{v} = \frac{xx\,dz}{aag} - \frac{ds}{avg}\int\frac{\pi x\,ds}{v}$; & j'ai remarqué encore que si la force π est supposée très-petite par rapport à la force F, on pourra mettre dans le second membre de cette équation à la place de $\frac{ds}{v}$ sa valeur approchée $\frac{xx\,dz}{aag}$; ce qui donnera $\frac{ds}{v} = \frac{xx\,dz}{aag} - \frac{xx\,dz}{aag}\int\frac{\pi x^3\,dz}{a^3gg}$.

III.

J'ai remarqué aussi dans le même Mémoire, que si les forces φ & π sont très-petites par rapport à la force $\frac{Faa}{xx}$, ou (ce qui est la même chose) $\frac{Fuu}{aa}$, l'équation de l'art. I. se réduira à $ddu + \frac{u\,dz^2}{a^2} - \frac{F\,dz^2}{gg} + \frac{2F\,dz^2}{gg} \times \int\frac{\pi a^3\,dz}{u^3gg} - \frac{\varphi a^2\,dz^2}{uugg} + \frac{\pi a^3\,du}{ggu^3\,dz} \times dz^2 = 0.$

IV

J'ai démontré de plus dans le même Mémoire, que si on fait $\frac{u}{a^2} - \frac{F}{gg} = \frac{t}{a^2}$, & $M = \frac{2F}{gg}\int \frac{\pi a^3 dz}{u^3 gg} - \frac{\phi a^2}{uugg} + \frac{\pi a^3 du}{ggu^3 dz}$, on aura, en supposant $a=1$, l'équation à intégrer $ddt + tdz^2 + Mdz^2 = o$; & que l'intégrale de cette équation sera $t = \delta \operatorname{cos}. z + c^{z\sqrt{-1}} \int \frac{Mdz c^{-z\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}{2} - c^{-z\sqrt{-1}} \int \frac{Mdz c^{z\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}{2}$, δ étant la valeur de t quand $z = o$, c'est à-dire, au point A.

V.

Enfin j'ai dit dans le même Mémoire, que si on veut faire disparoître les imaginaires de cette équation, il n'y a qu'à supposer, suivant les formules si connues des Géometres, $c^{z\sqrt{-1}} = y\sqrt{-1} + \sqrt{1-yy}$, & $c^{-z\sqrt{-1}} = -y\sqrt{-1} + \sqrt{1-yy}$, y exprimant le sinus de l'angle z; ce qui donnera tout de suite $t = \delta \operatorname{cos}. z + \sqrt{1-yy} \int Mydz - y\int Mdz\sqrt{1-yy}$, ou $t = \delta \operatorname{cos}. z + \operatorname{cos}. z \int Mdz \operatorname{sin}. z - \operatorname{sin}. z \int Mdz \operatorname{cos}. z$.

VI.

Dans cette équation la partie $t = \delta \operatorname{cos}. z$ exprime l'équation de l'orbite non troublée par les forces ϕ & π; & la partie $\frac{c^{z\sqrt{-1}} \int Mdz\sqrt{-1}\, c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$ —

$\frac{c^{-z\sqrt{-1}} \int M dz \sqrt{-1}\, c^{z\sqrt{-1}}}{2}$ ——, ou, ce qui eſt la même choſe, $\cos. z \int M dz \sin. z - \sin. z \int M dz \cos. z$, exprime le changement que la perturbation cauſée par les forces φ & π produit dans la valeur primitive de t, ſavoir dans $\delta \cos. z$; & en ſuppoſant, comme ci-deſſus, $a = 1$, M ſera égale à $\frac{2F}{gg} \int \frac{\pi dz}{u^3 gg} - \frac{\varphi}{uugg} + \frac{\pi du}{gg u^3 dz}$; quantité dans laquelle j'ai remarqué encore qu'on pouvoit mettre au lieu de u ſa valeur $\frac{F}{gg} + t$, ou $\frac{F}{gg} + \delta \cos. z$, qui auroit lieu dans l'orbite non troublée; pourvû que les forces perturbatives φ & π fuſſent très-petites par rapport à la force $\frac{Faa}{xx}$.

VII.

Par toutes ces formules, il eſt facile de déterminer *au moyen des quadratures*, les perturbations de l'orbite des Comètes. En effet (comme je l'ai remarqué encore dans le Mémoire déja cité) ſoit que l'orbite d'une Comète ſoit fort inclinée ou non à l'Ecliptique, on peut toujours la regarder comme ſenſiblement plane, & trouver les forces φ & π qui agiſſent dans le plan de cette orbite, & qui ſeront ſenſiblement les mêmes que dans l'orbite non altérée. Pour trouver ces forces φ & π, il faut, comme je l'ai dit encore, avoir égard non-ſeulement à l'action des Planetes ſur la Comète, mais encore

à l'action des mêmes Planètes sur le Soleil, qu'il faut transporter à la Comète en sens contraire. A l'égard du mouvement des nœuds & de la variation de l'inclinaison qui résultent des mêmes forces φ & π, j'ai donné dans le même Mémoire, les formules pour les trouver; formules que je rappellerai plus bas, pour indiquer les moyens d'en faire usage.

VIII.

1. Il est donc constant par tout ce qu'on vient de lire, que ma solution du Problême des trois corps, lûe en 1747 à l'Académie avant aucune autre, & imprimée dans les Mémoires de 1745, n'est pas moins applicable à la théorie des perturbations des Comètes, qu'à celle des Planetes, & que le Mémoire cité contient absolument tous les principes, & même toutes les formules nécessaires pour cette application.

2. Un savant Géometre a prétendu dans un Ecrit publié au mois d'Août 1759, que *jusqu'à ce moment* je n'avois point donné de solution du Problême des trois corps, applicable au mouvement des Comètes. Cependant il a reconnu depuis, qu'en 1754, dans *mes Recherches sur le Systême du Monde*, seconde Partie, pag. 230, j'avois donné une formule applicable à ce mouvement, cinq ans avant que personne pensât à le calculer. Si les occupations de ce Géometre lui eussent permis de jetter les yeux sur mon Mémoire de 1745, il auroit vû que la formule que j'ai donnée en 1754, ne differe point

du tout de celles de mon Mémoire de 1745, puisque j'ai dit expressément dans ce dernier Mémoire, que pour faire évanouir les imaginaires de la valeur de t, il falloit faire $c^{z\sqrt{-1}} = \text{sin.}\, z\sqrt{-1} + \text{cos.}\, z$, & $c^{-z\sqrt{-1}} = -\text{sin.}\, z\sqrt{-1} + \text{cos.}\, z$, ce qui donne ma formule de 1754 par un calcul que le plus ignorant Algébriste peut faire en un moment. Voyez aussi sur cela mon Mémoire intitulé *Réflexions sur le Problême des trois Corps*, imprimé dans ce Volume.

IX.

1. Soit donc C (*fig.* 10.) une Comète, A son perihelie,

S, le Soleil, dont nous appellerons aussi la masse . . S

Le rayon vecteur JS de la Planete perturbatrice, réduit au plan de l'orbite de la Comète, ... ξ

L'angle JSC . . . . ζ

DB, La ligne des nœuds de l'orbite de la Comète & de l'orbite de la Planete perturbatrice,

L'angle JSB V

La tangente de l'inclinaison des deux orbites . . . . m

La masse de la Planete perturbatrice . . . . J

On aura la distance de la Planete perturbatrice au Soleil . . . . $\xi\sqrt{1 + m^2 \,\text{sin.}\, V^2}$.

La force suivant CS, résultante de l'action de la Planete J sur le Soleil, sera $\dfrac{J \,.\, \text{cof.}\, \zeta}{\xi^2 \,(1 + m^2 \,\text{sin.}\, V^2)^{\frac{3}{2}}}$.

La force perpendiculaire à CS, & résultante de la

même action, sera $\frac{J \text{ sin. } \zeta}{\xi^2 (1 + mm \text{ sin. } V^2)^{\frac{3}{2}}}$.

La force suivant CS, résultante de l'action de la Planete J sur la Comète, se trouvera . . . .

$$\frac{J . x - J . \xi \text{ cos. } \zeta}{(\xi^2 + xx - 2 \xi x \text{ cos. } \zeta + \xi^2 m^2 \text{ sin. } V^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Et la force perpendiculaire à CS, résultante de la même action, sera $- \frac{J \xi \text{ sin. } \zeta}{(\xi^2 + xx - 2 \xi x \text{ cos. } \zeta + \xi^2 m^2 \text{ sin. } V^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2. De plus la Comète étant continuellement tirée vers S par une masse $= S + C$, & avec une force réciproquement proportionnelle au quarré des distances, on aura $\frac{F a a}{x x} = \frac{S + C}{x^2}$.

3. Donc en faisant, pour abréger $a = 1$, ou plutôt, ce qui revient au même, substituant au lieu de l'angle $\frac{z}{a}$, la quantité z qui représentera le même angle, en prenant le sinus total pour l'unité, on aura pour les Comètes

$$F = S + C,$$

$$M = \frac{2 S}{g g} \int \frac{\pi^3 d z}{a a g g} - \frac{\phi x^2}{g g} + \frac{\pi a^4 d u}{u^3 g g d z};$$

$$\phi = ... \frac{J . \text{ cos. } \zeta}{\xi^2 (1 + m^2 \text{ sin. } V^2)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$\frac{J . x - J \xi \text{ cos. } \zeta}{(\xi^2 + x^2 - 2 \xi x \text{ cos. } \zeta + \xi^2 m^2 \text{ sin. } V^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\pi = \ldots\ldots \frac{J \,.\, \text{sin.}\, \zeta}{\xi^2 (1 + m^2 \,\text{sin.}\, V^2)^3} - \frac{J \,.\, \xi \,\text{sin.}\, \zeta}{(\xi^2 + x^2 - 2\xi x \,\text{cos.}\, \zeta + \xi^2 m^2 \,\text{sin.}\, V^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

X.

1. Subſtituant ces valeurs de φ & de π dans la quantité M des Art. IV & VI, & mettant pour F ſa valeur $S + C$, & pour u ſa valeur $t + \frac{F}{gg}$, ou $t + \frac{S+C}{gg}$ dans l'équation de l'Art. IV. qui exprime la valeur de t, & pour δ ſa valeur $a - \frac{S+C}{gg}$, on aura ...... $u = a \,\text{coſ.}\, z + \frac{S+C}{gg} - \frac{S+C}{gg} \,\text{coſ.}\, z - \text{ſinus}\, z \int M dz \,\text{coſ.}\, z + \text{coſ.}\, z \int M dz \,\text{ſin.}\, z$, pour l'équation qui exprime la valeur de la quantité $\frac{aa}{x}$, x étant le rayon de l'orbite de la Comète. On voit de plus que ſi on fait $- \text{ſin.}\, z \int M dz \,\text{coſ.}\, z + \text{coſ.}\, z \int M dz \,\text{ſin.}\, z = \alpha$, α étant une quantité qui eſt cenſée très-petite par rapport à u, on aura à-très-peu-près $x = \frac{aa}{\frac{S+C}{gg} + (a - \frac{S+C}{gg}) \,\text{coſ.}\, z} - \frac{aa\alpha}{\left[\frac{S+C}{gg} (a - \frac{S+C}{gg}) \,\text{coſ.}\, z\right]^2}$; ou, en nommant x' le rayon de l'ellipſe non altérée, $x = x' - \frac{\alpha x' x'}{a}$.

2. De plus, le tems répondant à l'angle z & au rayon

vecteur x, c'est-à-dire (Art. II.) $\int \frac{x\,x\,dz}{a\,g} - \int \Big(\frac{x\,x\,dz}{a\,g}$

$\int \frac{\pi\,x^3\,dz}{a^2\,g\,g} \Big)$, sera $\int \frac{a^3\,dz}{g\left[\frac{S+C}{g\,g} + \left(a - \frac{S+C}{g\,g}\right)\operatorname{cof.} z\right]^2}$

$$- \int \frac{2\,a^3\,\alpha\,dz}{g\left[\frac{S+C}{g\,g} + \left(a - \frac{S+C}{g\,g}\right)\operatorname{cof.} z\right]^3}$$

$$- \int \Big(\frac{a^3\,dz}{g\left[\frac{S+C}{g\,g} + \left(a - \frac{S+C}{g\,g}\right)\operatorname{cof.} z\right]^2}$$

$\int \frac{\pi\,a^4\,dz}{g\,g\left[\frac{S+C}{g\,g} + \left(a - \frac{S+C}{g\,g}\right)\operatorname{cof.} z\right]^3} \Big)$, ou $\int \frac{x'\,x'\,dz}{a\,g} - \int \frac{2\,x'^3\,\alpha\,dz}{a^3\,g}$

$- \int \frac{x'\,x'\,dz}{a\,g} \int \frac{\pi\,x'^3\,dz}{a\,a\,g\,g}$.

3. Toutes ces formules ſont une ſuite néceſſaire & ſimple des principes que j'ai établis dans mon Mémoire de 1745, & depuis dans mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſur les quantités qu'on peut & qu'on doit négliger pour calculer les perturbations de l'orbite.

X I.

1. Quoiqu'on puiſſe, au moyen de ces différentes formules, calculer les perturbations des Comètes, cependant le calcul en ſeroit ſi pénible, par les quadratures multipliées & compliquées qu'il exige, qu'il eſt néceſſaire de chercher des méthodes pour l'abréger. M'étant occupé de cet objet, voici celle que j'ai trouvée, & que je

je vais expofer en fuivant la progreffion des idées qui l'ont produite.

2. Puifqu'on regarde le Soleil S (*fig.* 11.) comme immobile, & la Planète perturbatrice J' comme décrivant autour de S une ellipfe, dans un plan différent, fi l'on veut, de l'orbite de la Comète, il s'enfuit que le centre commun de gravité G des Corps S & J', décrira pareillement une ellipfe autour du centre S regardé comme immobile, & qu'il la décrira dans le même tems que l'ellipfe $J'O$ eft décrite par la Planete J' autour du point S.

3. De plus il eft évident que le point G eft attiré vers S par une force égale à celle qui attire ce Corps J', multipliée par $\frac{GS}{SJ'}$; c'eft-à-dire, par une force égale à $\frac{S+J}{J'S^2} \times \frac{GS}{J'S} =$ (à caufe de $\frac{GS}{J'S} = \frac{J}{S+J}$) $\frac{S+J}{GS^2} \times \frac{J^2}{(S+J)^2} \times \frac{J}{S+J} = \frac{J}{GS^2} \times \frac{J^2}{(S+J)^2}$; donc la force attractive du point G eft en raifon inverfe du quarré de la diftance GS; & par conféquent le point G fe meut dans fon ellipfe autour de S, comme s'il la décrivoit, non d'un mouvement forcé, mais d'un mouvement libre.

XII.

Donc tandis que la Comète C (*fig.* 12.) fe meut autour du Soleil dans fon orbite telle qu'elle eft, on peut fuppofer ou imaginer un point γ qui étant pouffé vers la Co-

mète C, par une force réciproquement proportionnelle au quarré de la distance, decrive autour de cette Comète, comme une espéce de Satellite, une ellipse égale & semblable à l'ellipse décrite par le point G autour de S. Il faut seulement bien remarquer, que dans cette supposition, la force qui fera tendre continuellement le point γ vers C, & qui sera égale à $\frac{J}{C\gamma^2} \times \frac{J^2}{(J+S)^2}$, ne viendra point de l'attraction de la masse C; ce sera une force absolument étrangere à la gravitation, mais dont il est permis de supposer l'éxistence dans une hypothèse purement Mathématique, comme l'est celle que nous faisons ici. Il faut remarquer de plus que le point γ, en décrivant autour du point C l'ellipse dont il s'agit, participe nécessairement à tous les mouvemens du point C dans l'espace absolu ; ainsi ce point γ est animé par des forces égales & parallèles à celles qui agissent sur la Comète C.

XIII.

1. Donc les forces qui animent le point γ, considéré comme se mouvant dans l'espace absolu, sont ;

1°. La force vers $C = \frac{J}{GS^2} \times \frac{J^2}{(J+S)^2}$, ou, ce qui est la même chose, une force suivant $\gamma C = \frac{J}{J^1 S^2}$, à cause de $GS = \frac{J^1 S \,.\, J}{J+S}$.

2°. Une force suivant γL égale & dans le même sens

que la force $\frac{J}{J' S^2}$ qui agit sur la Comète C suivant CL parallèle à $J' S$, & en sens contraire à la direction de l'action de la Planète sur le Soleil.

3°. Une force suivant $\gamma \Gamma$ parallèle à CS, & égale à $\frac{S + C}{S C^2}$ ou $\frac{S + C}{\Gamma \gamma^2}$.

4°. Une force suivant γi parallèle à $C J'$, & égale à $\frac{J}{J' C^2}$, ou $\frac{J}{\gamma i^2}$.

2. Or en premier lieu, de ces quatre forces, les deux premieres se détruisent absolument. Donc le point γ est attiré dans l'espace absolu par deux forces seulement; l'une vers Γ, qui sera égale à $\frac{S + C}{\gamma \Gamma^2}$; l'autre vers i, qui sera $= \frac{J}{\gamma i^2}$.

3. La force suivant $\gamma \Gamma$ se change en deux autres forces; l'une suivant $\gamma S = \frac{(S + C) \gamma S}{\gamma \Gamma^3}$; & l'autre suivant $\gamma L = \frac{(S + C) S \Gamma}{\gamma \Gamma^3} = \frac{(S + C) . C \gamma}{\gamma \Gamma^3}$.

4. Donc le point γ se meut dans l'espace absolu autour du point S supposé fixe, comme si ce point γ étoit attiré, 1°. vers S par une force $= \frac{(S + C) \gamma S}{\gamma \Gamma^3}$. 2°. Suivant γL parallèle à $J' S$ par une force $= \frac{(S + C) . C \gamma}{\gamma \Gamma^3}$.

3°. Enfin avec une force $= \frac{J}{\gamma i^2}$ vers un point mo-

bile i, qu'on suppose se mouvoir autour de S, en décrivant une ellipse semblable à celle du point J', & à une distance $iS = J'S - C\gamma = J'S - SG = \frac{J'S \times S}{S+J}$.

5. Cette derniere action suivant γi produit encore deux forces; l'une suivant $\gamma C = \frac{J}{\gamma i^2} \times \frac{iS}{\gamma i} = \frac{J.iS}{\gamma i^3}$; l'autre suivant $\gamma S = \frac{J.S\gamma}{\gamma i^3}$.

XIV.

1. Si la distance SC de la Comète au Soleil est considérablement plus grande que la distance $C\gamma$ ou GS qui est toujours très-petite, on pourra au lieu de la force $\frac{(S+C)\gamma S}{\gamma r^3}$, écrire $\frac{S+C}{\gamma S^2} - \frac{3(S+C)\gamma C \operatorname{cos.} \gamma Si}{\gamma S^3}$, & au lieu de la force suivant γL, la force $+ \frac{(S+C).C\gamma}{\gamma S^3} \times \operatorname{cos.} \gamma Si$ suivant γS, & la force $\frac{(S+C)C\gamma \operatorname{sin.} \gamma Si}{\gamma S^3}$ perpendiculaire à γS.

2. De plus, au lieu des forces $\frac{J.iS}{\gamma i^3}$ & $\frac{J.S\gamma}{\gamma i^3}$, suivant γC & γS, on peut substituer dans tous les cas; les forces équivalentes $\frac{J.S\gamma}{\gamma i^3} - \frac{J.iS \operatorname{cos.} \gamma Si}{\gamma i^3}$ suivant γS, & $- \frac{J.iS.\operatorname{sin.} \gamma Si}{\gamma i^3}$ perpendiculaire à γS; & si la distance γS est fort grande par rapport à la distance iS, on pourra encore, au lieu de ces deux

dernieres forces, ſubſtituer $\frac{J}{S\gamma^2} + \frac{3J.iS\,\text{coſ.}\,\gamma Si}{S\gamma^3}$ $- \frac{J.iS\,\text{coſ.}\,\gamma Si}{S\gamma^3}$ ſuivant γS, & $- \frac{J.iS\,\text{ſin.}\,\gamma Si}{S\gamma^3}$ perpendiculaire à γS.

X V.

1. Or lorſque la Comète ſera dans les régions ſupérieures de ſon orbite où elle eſt fort éloignée du Soleil, $S\gamma$ ſera fort grande par rapport à Si, & à plus forte raiſon par rapport à $C\gamma$; donc en combinant toutes les forces ci-deſſus, & remarquant que $J.iS = \frac{J.J'S \times S}{S+J}$ $= S \times C\gamma$, & que $(S+C)\,C\gamma$ peut être cenſé égal à $S.C\gamma$, on trouvera qu'un grand nombre de ces forces ſe détruiſent, & que le point γ eſt tiré ſeulement vers S par une force $= \frac{S+C+J}{S\gamma^2}$, ſans aucune autre force perturbatrice ſenſible.

2. De-là réſulte cette Propoſition très-curieuſe; que quand la Comète eſt dans les régions ſupérieures de ſon orbite, le petit Satellite γ que nous avons ſuppoſé autour d'elle, eſt attiré vers le point fixe S par une force égale à $\frac{S+C+J}{S\gamma^2}$, ſans aucune autre force perturbatrice ſenſible.

3. On voit aiſément combien cette Propoſition ſi ſimple peut abréger le calcul des perturbations. Car lorſque la Comète eſt dans la partie ſupérieure de ſon orbite,

il n'y aura qu'à chercher ſimplement l'ellipſe décrite autour de S par le Satellite γ en vertu de la force attractive $\frac{S+C+J}{S\gamma^2}$, & mener enſuite par chaque point γ de cette ellipſe une ligne γC parallèle à SJ', & $= \frac{J \cdot J'S}{S+J}$; & on aura le lieu C de la Comète.

4. Ceux qui ont calculé juſqu'à préſent les perturbations des Comètes, ont bien trouvé, par une méthode qui leur eſt particuliere, & qui eſt très-différente de la précédente, que quand la Comète eſt dans les régions ſupérieures de ſon orbite, on peut abréger conſidérablement le calcul des perturbations cauſées par l'action de la Planète perturbatrice ſur le Soleil. Mais ils n'ont pas remarqué (ce qui n'étoit pas moins important) que le calcul pouvoit encore être conſidérablement abrégé, en combinant l'action de la Planète ſur la Comète avec ſon action ſur le Soleil. C'eſt la conſidération du Satellite γ qui nous a menés à cette ſimplification du Problême.

5. Nous y avons été conduits d'une maniere aſſez naturelle, par la remarque que nous y avions déja faite dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſeconde Partie, Art. 218 & 219, que pour trouver la perturbation d'une Planète, cauſée par l'action d'une autre Planète ſur le Soleil, on pouvoit imaginer autour de la Planète troublée un Satellite qui produisît à-peu-près le même effet. De legers changemens à cette ſuppoſition, par leſquels nous l'avons ſimplifiée, nous ont

donné le Satellite fictif autour de la Comète.

6. Au reste cette Proposition sur l'orbite sensiblement elliptique du Satellite γ, a été communiquée à M. Clairaut, le 13 Août 1759, long-tems avant qu'il ait rien paru sur la théorie du mouvement des Comètes; & je l'avois communiquée à M. Bezout dès le mois de Juin précédent. Elle se trouve d'ailleurs dans des papiers remis au Secrétariat de l'Académie dans les mêmes mois de Juin & d'Août 1759. Je rapporte ces faits, uniquement afin qu'on ne me taxe pas d'avoir rien appris sur cela d'aucun autre Géometre, ni rien emprunté d'aucun autre Ouvrage.

X V I.

La considération du Satellite γ, a non-seulement l'avantage d'abréger considérablement le calcul des perturbations dans les parties supérieures de l'orbite de la Comète; elle a de plus 1°. celui de rendre dans certaines occasions ce calcul possible; 2°. de le rendre plus éxact dans tous les cas; 3°. de le rendre plus court. Développons ces trois points.

1°. La considération du Satellite a l'avantage de rendre le calcul possible dans certaines occasions; car lorsque la Comète est dans les parties supérieures de son orbite, la force perturbatrice $\frac{J}{J'S^2}$ qui vient de l'action de la Planète sur le Soleil, peut être très-comparable à la force de gravitation $\frac{S+C}{S.C^2}$; parce que SC peut alors

être ſi grande par rapport à $J' S$, que la force $\frac{J}{J' S^2}$ ne puiſſe pas être regardée comme très-petite par rapport à la force $\frac{S + C}{S C^2}$. Or en ce cas la ſolution générale donnée dans le commencement de ce Mémoire, & qui ſuppoſe les forces φ & π toujours très-petites par rapport à $\frac{F a a}{x x}$, ne pourroit plus avoir lieu. Au contraire la méthode que nous venons de donner, eſt évidemment d'autant plus éxacte, que $S C$ ou $S \gamma$ eſt plus grande par rapport à $J' S$. Ainſi (ce qui eſt très-curieux à remarquer) la méthode générale & celle-ci, ſont en quelque maniere le complément l'une de l'autre, l'une étant plus éxacte à proportion que l'autre l'eſt moins.

2°. Je dis outre cela, que cette conſidération du Satellite rend le calcul plus éxact; car elle diſpenſe de connoître dans les parties ſupérieures de l'orbite, la poſition de la Planete perturbatrice, ſur laquelle on pourroit ſe tromper conſidérablement, ſavoir d'une quantité proportionnelle à l'altération de la révolution dans toute une moitié de l'orbite. Suppoſons, par exemple, que cette altération ſoit d'environ un an, comme elle le peut être & au-delà; on ſe tromperoit donc d'un an, c'eſt-à-dire, à-peu-près de 30 degrés, dans la poſition de Jupiter; ce qui occaſionneroit des erreurs conſidérables dans la détermination des forces φ & π, & ſur-tout de la derniere, qu'on pourroit faire d'un ſigne contraire à celui qu'elle auroit réellement.

3°. Enfin la méthode tirée de la considération du Satellite, rendra le calcul plus court que si on cherchoit directement les perturbations de la Comète. Car soit γ' (*fig.* 10.) la projection du Satellite γ sur le plan de l'orbite de la Comète; les forces perturbatrices φ & π, venant de la seule action de la Planète sur le Soleil, seront à-très-peu-près $\varphi = - \frac{2(S+C).C\gamma' \text{cos}. \gamma' S J}{x^3}$; en nommant $S\gamma'$, x; & $\pi = \frac{(S+C).C\gamma' \text{sin}. \gamma' S J}{S\gamma'^3}$, ou $\frac{(S+C).C\gamma'.\text{sin}. \gamma' S J}{x^3}$. Or puisque x^3 se trouve ici au dénominateur de la valeur de π; il s'ensuit que les quantités $\frac{\pi du}{u^3 dz}$ ou $\frac{\pi x^3 du}{dz}$, & $\int \pi x^3 dz$, dont on a besoin (§. VI & X.) pour calculer les perturbations, seront très-simplifiées; puisque u^3 & x^3 disparoîtront de ces quantités: ce qui n'auroit pas lieu, si on cherchoit directement les perturbations de l'orbite de la Comète, causées par l'action de la Planète perturbatrice sur le Soleil.

XVII.

1. Puisque dans l'orbite décrite par le Satellite, la force rétardatrice dérivée de l'action sur le Soleil, est de l'ordre de $\frac{J.\xi}{x^3}$, & que dans l'orbite réelle de la Comète, cette force est de l'ordre de $\frac{J}{\xi^2}$; il s'ensuit que ces deux forces sont entr'elles comme ξ^3 à x^3; & qu'ainsi

dans la partie inférieure de l'orbite, depuis le périhélie jusqu'au point où $x = \xi$, il est plus éxact d'employer la méthode générale, & que dans le reste de l'orbite, qui est beaucoup plus étendu, il sera mieux d'employer la considération du Satellite.

2. Ainsi, pour calculer l'action de Jupiter sur une Comète quelconque, on peut partager l'orbite en deux parties; dans l'une qui s'étend depuis le périhélie de part & d'autre jusqu'à la distance SC ou Sc (*fig.* 13.) = à la distance moyenne de Jupiter, on employera la méthode générale. Dans la seconde qui est beaucoup plus étendue, on employera la considération du Satellite.

3. Pour calculer l'action de Saturne, on peut employer les deux mêmes portions; car quoique SC ne soit qu'environ la moitié de la distance de Saturne, cependant les quantités qu'on négligera en employant la considération du Satellite dès ce point C, seront de l'ordre de $\frac{S . \text{♄} \text{♄} \xi'^2}{S^2 x^4}$; (♄ exprimant la masse de Saturne, & ξ' sa distance au Soleil), c'est-à-dire, de l'ordre de $\frac{S}{x^2} \times \frac{\text{♄} \text{♄} \xi'^2}{S^2 x^2}$; & elles seront aux quantités $\frac{\text{♄}}{\xi'^2}$, qu'on employeroit en suivant la méthode générale, dans la raison de $\frac{\text{♄} \xi^4}{S x^4}$ à 1, c'est-à-dire, d'environ $\frac{16}{3000}$ à l'unité, ou de 1 à 187; par conséquent elles seront incomparablement plus petites que celles qu'on auroit employées en suivant la méthode générale; & il faut remarquer de plus que

ces quantités négligées, (ou ce rapport de 1 à 187) diminuent toujours à mesure qu'on s'éloigne du point C, où C est supposé $=$ à la moyenne distance de Jupiter : ensorte que lorsque la Comète est à la distance de Saturne, ce rapport devient $\frac{1}{3000}$. On n'aura donc point à craindre, ce me semble, d'erreur considérable en commençant au point C (où SC est $=$ à la distance moyenne de Jupiter) la considération du Satellite, même pour calculer l'action de Saturne.

XVIII.

1. Il ne reste plus qu'à savoir en quel endroit de cette portion de l'orbite, on peut supposer que le Satellite commence à décrire une véritable ellipse. Or je crois qu'on peut fixer (pour l'action de Jupiter) le commencement de cette portion au point où $\xi = \frac{1}{3} x$; c'est-à-dire, où la Comète est à une distance du Soleil triple de celle de Jupiter. Car supposons (ce qui est ici le cas le moins favorable) que Jupiter se trouve alors le plus près de la Comète qu'il est possible; son action sur la Comète sera donc $\frac{J}{(x-\xi)^2}$; quantité à laquelle nous avons substitué les deux termes $\frac{J}{x^2} + \frac{2J.\xi}{x^3}$; ainsi la quantité négligée est $\frac{J}{(x-\xi)^2} - \frac{J}{x^2} - \frac{2J.\xi}{x^3}$: or supposant $x = 3\xi$, on trouvera que cette quantité négligée est $\frac{J}{4\xi^2} - \frac{J}{9\xi^2} - \frac{2J}{27\xi_2} = \frac{J}{\xi^2} \times \left(\frac{1}{4} - \right.$

$\frac{5}{27}$); quantité plus petite que la quantité $\frac{2 J . \xi}{x^3}$, ou $\frac{2 J}{27 \xi^2}$ que d'autres Géometres ont cru pouvoir négliger en pareil cas.

2. Le rapport de la premiere de ces quantités à la seconde, deviendra encore plus petit à mesure que la Comète s'éloignera plus du Soleil; car soit $x = n \xi$, n étant plus grand que 3; la premiere de ces quantités sera à la seconde comme $\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}$ est à $\frac{2}{n^3}$; c'est-à dire, comme $3n - 2$ à $2(n-1)^2$: rapport qui devient plus petit à mesure que n augmente.

3. Quant à la force π, la quantité *négligée* est à-peu-près $\frac{3 \xi^2 \text{ fin. } \zeta' \text{ cof. } \zeta'^2 . J}{x^4}$; en prenant ζ' pour l'angle de commutation entre la Comète & la Planète; & cette quantité est à la quantité *employée* $\frac{J \text{ fin. } \zeta' . \xi}{x^3}$, comme $\frac{3 \xi \text{ cof. } \zeta'}{x}$ est à 1, c'est-à-dire, comme cof. ζ' est à 1; elle est donc beaucoup plus petite, puisque la plus grande valeur de la quantité *négligée* est à-peu-près répondante à cof. $\zeta' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou fin. $2 \zeta' =$ fin. total. Donc la quantité que nous négligeons dans l'expression de π, est moindre que la quantité $\frac{J \xi \text{ fin. } \zeta'}{x^3}$, négligée en pareil cas par d'autres Géometres.

4. Donc, en n'ayant égard qu'à l'action de Jupiter, on peut ſuppoſer que le Satellite décrive une ellipſe, à commencer depuis le point où $x = 3\,\xi$; & l'erreur, s'il y en a quelqu'une, ſera du moins fort au-deſſous de celle que d'autres Géometres ont commiſe en négligeant les forces perturbatrices $\frac{2\,J \cdot \xi}{x^3}$ & $\frac{J \cdot \xi}{x^3}$, qui réſultent de l'action du Soleil en pareil cas.

5. A l'égard de l'action de Saturne; comme ſa maſſe eſt environ $\frac{1}{3}$ de celle de Jupiter, ſi on ſuppoſe la diſtance de la Comète au Soleil double de celle de Saturne, on trouvera que la quantité *négligée* (dans le cas où elle eſt la plus grande) eſt $\frac{J}{3\,\xi'^2} \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{J}{6\xi'^2}$, en prenant ξ' pour la diſtance de Saturne au Soleil: cette quantité eſt à la quantité $\frac{2\,J}{27\,\xi^2}$ négligée par d'autres Géometres dans l'action de Jupiter, à-peu-près comme $\frac{9}{4}$ eſt à $\frac{\xi'^2}{\xi^2}$; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt beaucoup plus petite, ξ' étant environ le double de ξ. D'où il s'enſuit qu'au point où la diſtance de la Comète eſt à-peu-près double de la diſtance de Saturne au Soleil, on peut négliger la force φ qui vient de l'action de Saturne; car en ce point la force négligée eſt au-deſſous de celle que d'autres Géometres ont négligée pour l'action de Jupiter.

6. Quant à la force π, il eſt aiſé de voir que la partie négligée eſt beaucoup moindre que $\frac{J}{3 \cdot \xi'^2}$ ſin. ζ', &

que par conséquent cette partie négligée est à la force $\frac{2 J}{27 \xi^2}$ négligée par d'autres dans l'action de Jupiter, en moindre raison que $\frac{1}{8 . 3}$ n'est à $\frac{1}{27}$; d'où il s'ensuit que la partie négligée est, ou beaucoup plus petite, ou au moins très-peu différente de la force négligée $\frac{2 J}{27 \xi^2}$; & par conséquent qu'on peut aussi négliger cette partie de force. Ainsi au point où la distance de la Comète au Soleil est à-peu-près double de celle de Saturne, on peut supposer que le Satellite décri ve sans erreur sensible une ellipse autour du Soleil.

7. Donc en n'ayant égard qu'à l'action de Saturne, on peut supposer que le Satellite décrive une ellipse depuis le point où $x = 2 \xi'$; c'est-à-dire, où la distance de la Comète est double de celle de Saturne. Or comme les distances moyennes ξ & ξ' de Jupiter & de Saturne sont environ 5 . 2010 & 9 . 5400, il est aisé de voir qu'au point où x sera $= 3 \xi$, ou du moins dans un point où x sera un peu plus grand que 3ξ, on aura à-peu-près $x = 2 \xi'$.

8. Ce point peut être supposé celui de la moyenne distance de la Comète au Soleil, dans la Comète de 1682, où cette moyenne distance est 17 . 8635 ; mais en général, pour simplifier & pour abréger, nous supposerons que le point où le Satellite commence à décrire sensiblement une ellipse, soit celui où $x = 20$ fois le rayon du grand orbe ; cette supposition rendra même les calculs

plus exacts, puisque dans le point dont il s'agit, x sera $> 2\,\xi'$, & égal à près de $4\,\xi$.

9. On peut donc dans le calcul de l'action de Jupiter & de celle de Saturne, commencer la considération du Satellite, au point où la distance x de la Comète au Soleil est égale à la distance moyenne de Jupiter; & regarder de plus ce Satellite comme décrivant très-sensiblement une ellipse, dans toute la partie de l'orbite où la distance x de la Comète au Soleil est égale ou plus grande que 20 fois le rayon du grand orbe.

10. Au reste, si on craignoit de cette supposition quelque erreur dont l'effet fût un peu trop considérable, nous donnerons dans la suite de ce Mémoire des moyens de la rectifier.

11. Voyons présentement d'autres méthodes pour abréger encore le calcul.

XIX.

1. Comme l'orbite de la Comète, & celle que décrit le Satellite dans l'espace absolu, different très-peu quant à la figure, & quant au tems employé à parcourir ces orbites & leurs parties correspondantes; l'altération que les mêmes forces perturbatrices causeroient dans chacune de ces orbites, seroit sensiblement la même; c'est pourquoi on peut regarder toutes ces altérations, comme si elles se rapportoient à la seule orbite *ACED* (*fig.* 13.) de la Comète, & du reste traiter comme des portions d'ellipses, les portions d'orbites décrites par la

Comète & par le Satellite. Nous développerons ce dernier point plus en détail dans la suite ; pour le présent nous nous appliquerons à chercher la méthode la plus simple pour déterminer les altérations de l'orbite *ACED*.

2. Dans cette orbite il faut d'abord marquer les points *C*, *c*, ou $x =$ la moyenne distance de Jupiter, & les points *E*, *e*, ou $x = 20$ fois le rayon du grand orbe, & se rappeller ensuite tout ce que nous avons déja dit ci-dessus ; savoir, 1°. que depuis *A* jusqu'en *C*, & depuis *c* jusqu'en *A*, les forces perturbatrices doivent être exprimées comme dans le §. IX ; 2°. que depuis *C* jusqu'en *E*, & depuis *e* jusqu'en *c*, elles changent d'expression, & deviennent ce que l'on a vû dans les §. XIII & XIV ; 3°. que depuis *E* jusqu'en *e* la force φ devient $\frac{J}{x^2}$, ou Ju^2, & que la force $\pi = o$.

3. Pour faire maintenant usage de toutes ces valeurs, il faudra d'abord connoître les valeurs de φ & de π pour deux révolutions de la Comète, ou plutôt pour une révolution entiere, & une grande partie de la révolution suivante jusqu'au point *e*, en observant ; 1°. de donner à φ & à π depuis *A* jusqu'en *C*, les valeurs indiquées dans le §. IX ; 2°. depuis *C* jusqu'en *E*, les valeurs indiquées par le §. XIV ; 3°. de faire $\pi = o$, & $\varphi = Ju^2$ depuis *E* jusqu'en *e* ; 4°. de faire encore changer φ & π de valeur aux points *e* & *c*, c'est-à-dire, de leur donner depuis *e* jusqu'en *c* les valeurs marquées dans le §. XIV, & au point *c* celles du §. IX, qu'on continuera jusqu'au point *C* de la

la révolution suivante ; après quoi on reprendra les valeurs de φ & π, telles qu'elles sont dans le §. XIV &c.

4. Cette détermination des valeurs de φ & de π n'aura aucune difficulté ; car dans toute la partie *E D e*, la force π n'est pas censée exister, non plus que la partie de la force φ qui dépend de l'élongation de la Planète à la Comète ; & dans la partie *E A e*, on connoît assez bien les valeurs de φ & de π, parce qu'on connoît (*hyp.*) le tems d'une révolution entiere de la Comète, & qu'ainsi on aura à-peu-près les positions respectives de la Planète & de la Comète dans tous les points des arcs *A E*, *A e* de la premiere révolution, & dans l'arc *A E* de la seconde.

5. Les forces φ & π étant connues, on connoîtra les quantités $\frac{\pi x^3}{aagg}$, que je nomme . . . . *Y*,

Et on aura soin pour abréger le calcul ; 1°. de ne pas calculer deux fois les quantités (constantes ou variables) qui se trouvant au numérateur & au dénominateur, devront se détruire ; par exemple x^3 qui se trouvant au dénominateur (§. XIV.) dans une partie des valeurs de π, se trouvera au numérateur dans πx^3, & par conséquent disparoîtra ; 2°. de mettre à part sans la calculer la quantité constante gg, que nous enseignerons dans la suite à faire disparoître, & de la laisser en attendant sous sa forme Algébrique gg.

6. Ayant formé la table des *Y*, on quarrera (*a*) la

(*a*) Nous donnerons plus bas les moyens de quarrer les différentes courbes méchaniques qui se rencontreront dans cette solution.

courbe dont l'aire est $\int Y\,dz$, pour la premiere révolution entiere, & pour la suivante jusqu'au point e; en observant que la partie de cette aire qui répond à l'angle EDe doit être $= o$; parce que dans toute cette partie la force $\pi = o$.

7. Cette quantité $\int Y\,dz$, ou $\int \frac{\pi x^3\,dz}{aagg}$ est la plus compliquée de celles qui entrent dans la quantité M du §. VI; les autres n'éxigeant aucune quadrature, seront très-faciles à calculer.

8. On trouvera ainsi toutes les quantités d'où dépend la quantité M du §. VI; & l'on supposera

$$M \text{ ou } (\S.\ \text{IX.})\ \frac{2S}{gg}\int \frac{\pi a^4\,dz}{u^3\,gg} - \frac{\phi a^4}{u^2\,gg} + \frac{\pi a^4\,du}{gg\,u^3\,dz}$$

$= X + 2S\int \frac{Y\,dz}{gg}$; en prenant X pour représenter la somme des quantités $\frac{\pi a^4\,du}{gg\,u^3\,dz} - \frac{\phi a^4}{u^2\,gg}$, & $S\int Y\,dz$ pour représenter la quantité $S\int \frac{\pi a^4\,dz}{u^3\,gg}$; on se ressouviendra de plus (comme nous venons de le dire) que Y sera $= o$ dans la partie EDe de l'orbite, où $\pi = o$, & que X sera constante dans cette même partie de l'orbite, où $\phi = \frac{J}{x^2}$. Cela posé,

9. On verra d'abord que dans l'équation générale de l'orbite, la quantité cos. $z\int M\,dz$ sin. z − sin. $z\int M\,dz$ cos. z, ou α (ainsi que nous l'avons déja nommée §. X.) sera $=$ cos. $z\int X\,dz$ sin. z − sin. $z\int X\,dz$ cos. z + cos. z ×

$\frac{2S}{gg}(1-\text{cos}.\,z)\int Y dz - \text{cos}.\,z \times \frac{2S}{gg}\int Y dz$ $(1-\text{cos}.\,z) - \text{sin}.\,z \times \frac{2S}{gg}\,\text{sin}.\,z\int Y dz + \text{sin}.\,z \times \frac{2S}{gg}$ $\int Y dz\ \text{sin}.\,z$; quantité qui peut encore être simplifiée, en considérant que $(\text{cos}.\,z - \text{cos}.\,z^2 - \text{sin}.\,z^2)\int Y dz = (\text{cos}.\,z - 1)\int Y dz$.

10. Pour trouver présentement le tems t, soit $x' = \frac{aa}{\frac{S+C}{gg} + \left(a - \frac{S+C}{gg}\right)\text{cos}.\,z}$; & soient les quantités

$$-\int \frac{2x'^3\,dz\,\text{cos}.\,z}{a^3 g} = P,$$

$$\int \frac{2x'^3\,dz\,\text{sin}.\,z}{a^3 g} = Q,$$

$$-\int \frac{2x'^3\,dz}{a^3 g}(\text{cos}.\,z - 1) = R,$$

$$\int \frac{2x'^3\,dz\,\text{cos}.\,z}{a^3 g} = -P,$$

$$-\int \frac{2x'^3\,dz\,\text{sin}.\,z}{a^3 g} = -Q,$$

$$-\int \frac{x'^2\,dz}{ag} = V;$$ & l'on aura (§. X.) l'altération du tems égale à $\int dP\int X dz\ \text{sin}.\,z + \int dQ\int X dz$ $\text{cos}.\,z + \int dR\int Y dz \times \frac{2S}{gg} - \frac{2S}{gg}\int dP\int Y dz$ $(1-\text{cos}.\,z) - \frac{2S}{gg}\int dQ\int Y dz\ \text{sin}.\,z + \int dV\int Y dz$.

11. Comme les quantités P, Q, R, V, ont des intégrales éxactes, ou du moins peuvent s'intégrer par des

arcs de cercle, ainsi que nous le ferons voir plus bas, on peut simplifier l'expression précédente, & la délivrer des doubles signes $\int$, en la mettant sous cette forme,

$$P\int X dz \sin. z - \int X P dz \sin. z + Q\int X dz \cos. z - \int X Q dz \cos. z + 2 R S\int \frac{Y dz}{gg} - 2 S\int \frac{Y R dz}{gg} - \frac{2 S}{gg} P\int Y dz (1 - \cos. z) + \frac{2 S}{gg}\int Y P dz (1 - \cos. z) - \frac{2 S}{gg} Q\int Y dz \sin. z + 2 S\int \frac{Y Q dz}{gg} \sin. z + V\int Y dz - \int Y V dz.$$

12. Toutes ces quantités ne seront pas fort difficiles ni fort longues à calculer; parce que les quantités P, Q, R, V, comme on vient de le dire, ont des intégrales exactes, ou du moins peuvent s'intégrer par arcs de cercle, & que le reste ne demandera que des quadratures simples.

13. Nous donnerons dans la suite les moyens de trouver facilement ces quantités P, Q, R, S &c. & d'abréger d'ailleurs beaucoup le reste du calcul; nous nous contenterons d'observer ici que la formule que nous venons de donner, n'a l'inconvénient d'allonger le calcul que dans un cas. C'est celui où X est constante; c'est-à-dire, où $\varphi = J u^2$, π & Y étant alors $= o$; car alors les quantités $P\int X dz \sin. z - \int X P dz \sin. z + Q\int X dz \cos. z - \int X Q dz \cos. z$ sont d'un usage moins commode que leurs équivalentes $\int dP\int X dz \sin. z + \int dQ \int X dz \cos. z$.

14. Pour éviter cet inconvénient qui n'a lieu que dans la partie $E\,D\,e$ de l'orbite, laquelle répond à un assez petit angle $E\,S\,e$, on écrira (pour cette partie seulement de l'orbite) au lieu de $-\int X P\, dz$ sin. $z - \int Q X\, dz$ cos. z, la quantité $-PX(\Delta - \text{cos.}\, z) + \int dP \times X(\Delta - \text{cos.}\, z) - QX(\delta' - \text{sin.}\, z) + \int X dQ(\delta' - \text{sin.}\, z)$, Δ & δ' étant ce que deviennent cos. z & sin. z au point E, & les aires $X \int dP(\Delta - \text{cos.}\, z)$ & $X \int dQ \times (\delta' - \text{sin.}\, z)$ étant supposées $= o$ au même point E.

15. Il est à remarquer encore que pour réduire en tems la *quantité Algébrique qu'on vient de trouver ci-dessus* pour l'altération du tems, il faut d'abord nommer δ le demi-grand axe de l'ellipse que la Comète auroit décrite sans l'action des Planètes, & ensuite faire cette proportion : comme $\frac{\delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{S+C}} \times 4$ angles droits, (qui est la valeur de $\int \frac{xx\,dz}{a\,g}$ lorsque $z = 360^\circ$) est à *cette quantité Algébrique trouvée*, qui exprime l'altération du tems ; ainsi le tems m de la révolution de la Comète est à une quatriéme quantité ; c'est-à-dire, qu'il faut multiplier la quantité Algébrique trouvée par $\frac{m\sqrt{S+C}}{\delta^{\frac{3}{2}} \times 360^\circ}$, qu'on peut réduire à $\frac{m\sqrt{S}}{\delta^{\frac{3}{2}} \times 360^\circ}$, pour deux raisons ; la premiere, parce que C est fort petit par rapport à S, & que $\frac{m\sqrt{S}}{\delta^{\frac{3}{2}} \times 360^\circ}$ multiplie une quantité déja très-petite par

rapport à la révolution totale ; la seconde, parce que C est inconnu (*a*).

16. C'est pourquoi, en mettant pour $\frac{1}{360^\circ}$ (c'est-à-dire, pour le rapport du rayon à la circonférence) sa valeur approchée $\frac{1}{6,283185}$, on aura pour la correction du tems

$$\frac{m\sqrt{S}}{\delta^{\frac{3}{2}}.6,283185} \times [P\int X\,dz\,\text{sin.}\,z - \int XP\,dz\,\text{sin.}\,z + Q\int X\,dz\,\text{cos.}\,z - \int XQ\,dz\,\text{cos.}\,z + \frac{2R.S}{gg}\int Y\,dz - \frac{2S}{gg}\int R.Y\,dz - \frac{2S.P}{gg}\times\int Y\,dz(1-\text{cos.}\,z) + \frac{2S}{gg}\int Y.P\,dz(1-\text{cos.}\,z) - \frac{2S}{gg}Q\int Y\,dz\,\text{sin.}\,z + \frac{2S}{gg}\int Y.Q\,dz\,\text{sin.}\,z + V\int Y\,dz - \int Y.V\,dz].$$

XX.

Supposons maintenant une Comète dont on a déja observé une révolution ; on veut savoir la valeur approchée de la révolution suivante.

1. Soit SA la distance perihélie observée au commen-

(*a*) On demandera peut-être comment on sait que la masse C de la Comète est fort petite par rapport à la masse S du Soleil, puisqu'on ignore cette masse C. Il est aisé de répondre, que comme la Comète ne dérange point sensiblement le Soleil, on est en droit d'en conclure que $\frac{C}{S}$ est une très-petite fraction.

cement de la premiere révolution ; & $m =$ au nombre de jours, aussi connu, de cette révolution ; on construira l'ellipse *ACDA* (*fig.* 5.) dont le grand axe convienne à cette révolution ; & que j'appellerai, quoiqu'improprement, l'ellipse primitive ; dans cette ellipse on marquera les points *C*, *c* ; *E*, *e*, comme on l'a déja prescrit au commencement du §. XIX, art. 2. Cela fait ;

2. On cherchera d'abord les lieux de la Planète correspondans aux lieux de la Comète dans cette ellipse. Ces lieux pourront se trouver assez éxactement ; 1°. parce que dans toute la partie *EDe*, où ils seroient plus incertains, on n'a pas besoin de les connoître ; 2°. parce que dans la premiere révolution, l'altération que cause la Planète sur l'arc *AE*, n'est pas considérable, & que le tems employé réellement par la Comète à décrire l'angle *ASE*, ne differe que peu de celui que la Comète mettroit à décrire le même angle (indépendamment des perturbations) dans l'ellipse primitive supposée ; 3°. parce que, comme l'on connoît (par l'hypothèse) le tems du retour de la Comète au point *A* après la premiere révolution, on sait aussi à-très-peu-près le tems où la Comète sera sur chaque rayon vecteur de l'arc *eA* de la premiere révolution, & par conséquent les positions respectives de la Planète perturbatrice ; 4°. parce que par la même raison on sait à-très-peu-près le tems où la Comète se trouvera dans chaque point de l'arc *AE* de la seconde révolution, & par conséquent les positions respectives de la Planète perturbatrice.

3. Je suppose donc qu'on ait calculé par la méthode du §. XIX, que je développerai & simplifierai encore dans la suite, les altérations de cette orbite elliptique *A E D A* pour une révolution entiere, & pour la révolution suivante jusqu'au point *e*.

4. J'appelle la quantité qu'on trouvera pour l'altération totale jusqu'au point *e* de la seconde révolution . . . ζ

Et je nomme la quantité qui exprime les altérations de la premiere révolution seulement . . . . α'

5. De plus ayant calculé dans l'ellipse *A E D A* le tems que la Comète met à décrire l'arc *A C*, ou plutôt l'angle *A S C*, je connoîtrai à la fin de ce tems la position, la direction & la vitesse du petit Satellite γ (*fig.* 14.), le tout rapporté sur l'orbite de la Comète; & comme la vitesse de ce Satellite dans l'espace absolu, est composée de sa vitesse propre autour de *C* & de la vitesse du point *C*, j'aurai donc la position *S*γ du rayon vecteur, & la vitesse du point γ par rapport au point *S*, avec sa direction; au moyen de quoi je déterminerai facilement la trajectoire elliptique du Satellite γ, abstraction faite des autres perturbations qui ont déja été calculées.

6. Ainsi j'aurai une portion d'ellipse $\gamma o \gamma'$, dans laquelle je détermine de la maniere suivante le rayon *S*γ' qui doit la terminer. Je suppose qu'on tire la ligne *S c* dont la position est connue, & qui fait avec *A S* un angle $=$ *C S A*: par la connoissance que l'on a du retour de la Comète au point *A*, on fait à-peu-près le tems où la Comète se trouvera sur cette ligne *S c*; & par conséquent on

on fait aussi à-peu-près la position respective de la Planète perturbatrice & du petit Satellite; supposons donc que $S\lambda$ représente cette position, c'est-à-dire, soit égale & parallèle à la ligne qui joint en ce moment la Comète & le Satellite; & soit menée par λ la ligne $\lambda\gamma'$ parallèle à Sc, elle coupera l'ellipse $\gamma o \gamma'$ au point γ', qui fera connoître par conséquent le rayon $S\gamma'$ & la portion d'ellipse $\gamma o \gamma'$. Je donnerai dans la suite des moyens de calculer toutes ces lignes & ces angles; mais il n'est question encore ici que de l'exposé général de la méthode.

7. Je connoîtrai donc par ce moyen le tems employé à parcourir cette portion d'ellipse $\gamma o \gamma'$;

J'appelle ce tems . . . . θ';

Et le tems par AC . . . . θ.

8. Maintenant lorsque le Satellite est en γ', il est évident que la Comète est à-très-peu-près en C', en menant $\gamma' C' =$ & parallèle à $S\lambda$; car lorsque la Comète est sur la ligne SC', $S\lambda$ représente à-très-peu-près la position du Satellite. Par-là on connoîtra la longueur de la ligne SC'. Or la vitesse du point C' autour de S est évidemment composée de la vitesse du point γ' dans l'orbite $\gamma o \gamma'$, & de la vitesse du même point γ' autour de C'; laquelle doit être transportée au point C' en *sens contraire* à celui selon lequel le Satellite se meut autour de la Comète, & non pas dans le même sens, comme on l'a fait au point γ.

9. Donc on aura une nouvelle ellipse $C'A'C''$ (*fig.* 15.)

dans laquelle le rayon vecteur primitif SC', & la vitesse primitive avec sa direction seront connues.

10. On calculera le mouvement dans cette ellipse $C'AC''$, jusqu'à ce qu'on arrive à un point C'', tel que SC'' se trouve sur la direction de la ligne SC.

11. Dans ce point C'' on connoît à-peu-près le tems; puisqu'il est à-peu-près égal au tems connu de la révolution entiere, plus au tems par l'angle ASC dans l'ellipse primitive; ainsi on connoîtra à-peu-près la position & la vitesse correspondantes du Satellite γ''; & on cherchera (comme on a fait à la premiere révolution) sa nouvelle ellipse $\gamma'' o' \Gamma$, jusqu'à un point Γ, où $S\Gamma$ soit égale à 20 fois le rayon du grand orbe.

12. Soit à présent le tems calculé par $C'A'C''$ . . $= \Theta$

Et le tems calculé par $\gamma'' o' \Gamma$ . . . . $= \Theta'$;

Soit aussi le tems par $C'A'$ . . . . $= \vartheta$;

SA' étant supposé dans la direction de la distance initiale SA de la Comète au Soleil.

13. Cela posé, il est évident, en rassemblant toutes les quantités calculées, que le tems de la premiere révolution sera . . . . $= \alpha' + \theta + \theta' + \vartheta$;

& que le tems de la premiere révolution, plus le tems par la plus grande partie de la seconde, jusqu'à l'arrivée du Satellite en Γ, sera . . . . $= \varsigma + \theta + \theta' + \Theta + \Theta'$.

14. Ce tems seroit éxactement celui qu'on cherche, si on eût pris pour l'ellipse primitive de la Comète, celle qu'elle eût *réellement* décrite sans l'action des Planètes. Mais 1°. les perturbations seront à-très-peu-près les mê-

fines, que si on eût pris cette derniere ellipse. 2°. Pour corriger d'ailleurs (quant au reste du calcul), l'hypothèse qu'on a faite d'une fausse ellipse, on remarquera d'abord que le rayon Se de la fig. 13. fait un très-petit angle avec le rayon $S\Gamma$ de la fig. 15. qui lui est égal; d'où il s'ensuit, que quand le Satellite sera en Γ (*fig.* 15.), la Comète sera à-peu-près au point e de la figure 13. ou $Se =$ 20 fois le rayon du grand orbe; conséquemment on fera cette proportion; l'aire entiere $AEDA$ (*fig.* 13.) est à deux fois cette aire, moins le secteur AeS, ou AES, comme m est à un quatriéme terme m'; ce quatriéme terme m' donnera le tems que la Comète auroit mis (indépendamment des forces perturbatrices) à parvenir sur le rayon Se pour la seconde fois dans l'ellipse primitive supposée $AEDA$; & dans cette même supposition on aura à-très-peu-près $\beta + \theta + \theta' + \Theta + \Theta' - m'$ pour la perturbation totale jusqu'au point e; perturbation qui sera à-très-peu-près la même, comme on vient de le dire, que la perturbation réelle; on aura de même $\alpha' + \theta + \theta' + \vartheta - m$ pour la perturbation de la premiere révolution seulement.

15. Il est à remarquer que chacune de ces perturbations est celle qui provient de l'action d'une seule Planète, de Jupiter par exemple; on trouvera de même celle qui provient de l'action de Saturne. Cela fait, on ajoutera ensemble les deux perturbations, & on nommera la perturbation totale de la premiere révolution . . . δ; & la perturbation de la premiere révolution, plus celle

de la seconde jusqu'en e . . . . ε.

Il est évident 1°. que $m - \delta$ sera le tems par la *véritable ellipse primitive*, & qu'ainsi ce tems exprime celui qu'il eût fallu supposer indépendamment des perturbations. 2°. Que par conséquent on trouvera facilement l'ellipse qui ayant la même distance périhélie AS que la Comète, donneroit pour révolution le tems $m - \delta$, indépendamment des forces perturbatrices ; & que cette ellipse sera la *vraie ellipse primitive* de la Comète. 3°. Qu'on trouvera de même très-facilement le tems de la révolution dans la partie de cette ellipse qui répond à l'arc circulaire $Ax\varepsilon'$, terminé par le rayon $A\varepsilon'$ qui coincide avec Ae ; soit ce tems $= m''$; & comme la perturbation ε est sensiblement la même dans l'ellipse primitive supposée, & dans la véritable ellipse primitive, on aura $m - \delta + m'' + \varepsilon$ pour le tems de la révolution de la Comète, depuis le moment où elle part de son périhélie, jusqu'à celui où elle arrive pour la seconde fois sur le rayon Se ; donc aussi $m - \delta + m'' + \varepsilon$ exprimera à-très-peu près le tems de l'arrivée du Satellite au point Γ (*fig.* 15.).

16. Ainsi on connoîtra à très-peu-près (par ce dernier tems calculé) la position de la Planète perturbatrice, & par conséquent la position $\Gamma C'''$ (*fig.* 15.) du Satellite Γ par rapport à la Comète C''' ; ou plutôt la position de la Comète C''' par rapport au Satellite Γ (*a*).

(*a*) Si l'on craignoit que ce calcul ne fût pas assez éxact, il faudroit,

17. Par conséquent on pourra tracer, suivant la méthode déja donnée pour le point C', une nouvelle ellipse $C''' A''$ (*fig.* 13.) dans laquelle on calculera facilement le tems par l'angle $C''' S A''$; on supposera ce dernier tems . . . . $= \vartheta'$.

18. Après cela on achevera de chercher les altérations dans l'arc qui termine la seconde révolution; ces altérations ne seront plus difficiles à calculer. Car 1°. on connoît à-peu-près par l'art. précédent le tems où la Comète est au point C'''. 2°. En calculant le tems par l'angle $\varepsilon' S A$ dans l'*ellipse primitive supposée* (tems qui differe peu de celui que la Comète met réellement à parcourir cet angle $\varepsilon' S A$ ou $C''' S A''$ pour arriver de nouveau à son périhélie) on connoîtra à-peu-près le tems où la Comète se trouve sur chaque rayon vecteur; ainsi on connoîtra à-peu-près les positions de la Planète perturbatrice dans l'espace de la seconde révolution de la Comète, qui est renfermé par l'angle $C''' S A''$; par ce moyen on achevera le calcul des altérations dans l'*ellipse primitive supposée*, pour deux révolutions entieres; calcul qui avoit déja été fait pour une révolution totale, & pour la partie $AED\,e$ (*fig.* 13.) de la seconde révolution.

---

après avoir trouvé, par ce premier calcul, la position de $S C'''$ & par conséquent l'angle $A S C'''$ ou $A S \varepsilon'$ (*fig.* 13.), recommencer les opérations, depuis celle du N°. 14, pag. 130, en mettant le secteur $A \varepsilon' S$ au lieu du secteur $A e S$ ou $A E S$, & l'arc $A x n$ au lieu de $A x \varepsilon'$; & on aura pour lors une position plus éxacte de $S C'''$. Mais pour l'ordinaire la premiere opération suffira, sans qu'on ait besoin de recourir à cette seconde.

19. Soit la quantité des altérations dans l'angle $C'''SA''$ . . . . $= \vartheta''$; on aura donc pour le tems de deux révolutions entieres (en ſuppoſant que m fût le tems de la révolution, ſans perturbations, dans l'ellipſe primitive) $\beta + \theta + \theta' + \Theta + \Theta' + \vartheta' + \vartheta''$; or dans la même ſuppoſition on a déja vû que $\alpha' + \theta + \theta' + \vartheta$ auroit été le tems de la premiere révolution.

20. Donc retranchant cette ſeconde quantité de la premiere, on aura la valeur de la ſeconde révolution, toujours dans la même hypothèſe; & retranchant enſuite de nouveau la premiere révolution de la ſeconde, on aura une quantité que j'appelle ω, & qui ſera la différence des deux révolutions en vertu de l'action d'une ſeule Planète perturbatrice, dans le cas où m auroit été le tems d'une révolution, ſans perturbation.

21. Or la différence des révolutions doit être ſenſiblement la même, quelque ellipſe primitive que l'on ſuppoſe, pourvû que le tems par cette ellipſe ne differe pas beaucoup de la véritable. Donc ω ſera à-très-peu-près la différence *réelle* des deux révolutions ſucceſſives en vertu de l'action d'une ſeule Planète perturbatrice; de Jupiter, par exemple. On trouvera de même la différence des révolutions en vertu de l'action de Saturne; enſuite on ajoutera les deux différences avec leurs ſignes, & on nommera leur ſomme ω'; & comme (*hyp.*) m eſt la valeur réelle de la premiere révolution, on aura $m + \omega'$ pour la valeur de la ſeconde. On connoîtra donc par ce

moyen la valeur approchée de la seconde révolution; & par conséquent on pourra prédire à-peu-près le tems du retour de la Comète, en supposant que l'on connoisse par observation le tems de la premiere révolution.

22. Encore une fois, nous expliquerons dans la suite en détail les différentes opérations, par lesquelles toutes ces différentes quantités se calculent; il n'est question ici que du précis général de la méthode.

X X I.

1. L'orbite de la Comète, depuis son périhélie jusqu'à 90 degrés de part & d'autre de ce point, pouvant être traitée comme une Parabole, sur-tout dans le calcul des perturbations, il résulte de cette considération un nouveau moyen d'abréger les calculs précédens. Car les quantités P, Q, R, V du §. XIX, art. 10, sont alors toutes absolument intégrables, & réductibles à des formules très-simples, comme on le fera voir plus bas, en donnant la valeur de ces quantités pour l'hypothèse Parabolique.

2. De plus lorsque la distance périhélie de la Comète est plus petite, ou même n'est que fort peu plus grande que la moitié du rayon du grand orbe, comme dans celle de 1682; & que d'ailleurs, comme dans la même Comète de 1682, & dans plusieurs autres, l'inclinaison des deux orbites est telle, que la distance accourcie de la Planète au Soleil reste considérablement plus grande que la distance périhélie de la Comète (par exemple, 8

à 9 fois plus grande) ; on peut encore trouver des moyens d'abréger le calcul. Car si la distance perihélie est exactement égale à la moitié du rayon du grand orbe, on trouvera que pendant que la Comète parcourroit 90 degrés en longitude depuis son perihélie, Jupiter ne parcourroit que 3 degrés environ, & Saturne beaucoup moins (*a*). Ainsi on pourra regarder alors la Planète perturbatrice, comme à-peu-près immobile pendant ces 90 degrés de mouvement de la Comète ; sur-tout si on suppose la Planète perturbatrice placée au milieu de l'espace très-petit qu'elle décrit pendant ce tems. Car cette supposition n'altérera presqu'en rien la valeur des forces accélératrices. Or par ce moyen les valeurs des forces φ & π, ou du moins les parties de ces forces qui viennent de l'action des Planètes sur le Soleil, seront beaucoup plus aisées à calculer. Car 1°. la valeur de ξ pourra être regardée comme constante, ainsi que celle de la vraie distance $\xi\sqrt{1 + mm \sin. V^2}$ de la Planète au Soleil. 2°. L'angle ζ sera $= A + z$, A étant la valeur de l'angle d'élongation ASJ (*fig.* 10.) de la Planète à la Comète périhélie.

3. Si la distance périhélie étoit un peu plus grande que la moitié du rayon du grand orbe ; on pourroit alors,

(*a*) Cette Comète mettroit moins de 40 jours à parcourir ces 90 degrés. Or le mouvement moyen diurne de Jupiter est à-très-peu-près de 5′ par jour, & celui de Saturne de 2′. Donc le mouvement de Jupiter en 40 jours est de 3° 20′, & celui de Saturne de 1° 20′.

pour

pour plus d'éxactitude, se contenter de supposer Saturne seul en repos pendant les 90 degrés que parcourt la Comète; & diviser cet espace pour Jupiter en deux autres, pendant l'un desquels on supposera Jupiter immobile.

XXII.

1. Dans la même supposition de $AS =$ à environ la moitié du rayon du grand orbe; si l'inclinaison de l'orbite de la Planète perturbatrice, est telle que la distance de cette Planète au Soleil, rapportée sur l'orbite de la Comète, soit environ 9 à 10 fois (ou davantage) plus grande que la distance périhélie de la Comète, on pourra encore abréger considérablement le calcul, depuis le périhélie jusqu'à 90 degrés de part & d'autre. Car alors JS à 90 degrés du périhélie, sera environ cinq fois plus grande pour Jupiter, & neuf fois pour Saturne, que la distance de la Comète au Soleil; & au périhélie JS sera dix fois plus grande pour Jupiter, & dix-huit fois pour Saturne: de plus les forces perturbatrices qui viennent de l'action de Jupiter & de Saturne sur la Comète, sont alors considérablement plus petites que l'attraction vers le Soleil; car à 90 degrés du périhélie A, la force de Jupiter, en la supposant la plus grande possible, est environ $\frac{1}{16000}$ de la gravitation, & la force de Saturne $\frac{1}{64 \times 3000}$; & au périhélie, ces forces sont encore beaucoup plus petites.

2. C'est pourquoi, en nommant ξ' la distance réelle & supposée constante de la Planète au Soleil, & ξ sa distance accourcie aussi supposée constante, on aura à-très-peu-près pour cette portion de l'orbite $\varphi = \frac{J.\,\text{cos}.\zeta.\xi}{\xi'^3} + \frac{J.x}{\xi'^3} - \frac{J.\xi\,\text{cos}.\zeta}{\xi'^3} - \frac{3J.\xi^2\,x\,\text{cos}.\zeta^2}{\xi'^5} = \frac{J.x}{\xi'^3} - \frac{3J.x.\xi^2\,\text{cos}.\zeta^2}{\xi'^5}$; & $\pi = \frac{J.\xi.\text{sin}.\zeta}{\xi'^3} - \frac{J.\xi\,\text{sin}.\zeta}{\xi'^3} - \frac{3J.x.\xi^2\,\text{sin}.2\zeta}{2\xi'^5} = -\frac{3J.x\xi^2\,\text{sin}.2\zeta}{2\xi'^5}$; & on se ressouviendra que $\zeta = A + z$; ce qui fournira encore un nouveau moyen de simplifier & d'abréger le calcul.

XXIII.

1. En effet, puisque $\text{cos}.\,A+z = \text{cos}.\,z\,\text{cos}.\,A - \text{sin}.\,z\,\text{sin}.\,A$, & que $\text{sin}.\,A+z = \text{sin}.\,z\,\text{cos}.\,A + \text{cos}.\,z\,\text{sin}.\,A$; qu'enfin $x = \frac{aa}{P'+Q'\,\text{cos}.z}$, P' & Q' étant des constantes, & que ξ est une constante aussi; il s'ensuit que si on fait $P'+Q'\,\text{cos}.\,z = u$, ce qui donnera $\text{cos}.\,z = \frac{u-P'}{Q'}$, & $\text{sin}.\,z = \sqrt{1-(\frac{u-P'}{Q'})^2}$, les intégrales qu'il faudra trouver pour déterminer les perturbations depuis le périhélie A jusqu'à 90 degrés de part & d'autre, ne contiendront d'autre radical que le précédent $\sqrt{1-\frac{(u-P')^2}{Q'^2}}$, & des fonctions rationnelles de

la ſeule variable u; ce qui rendra les intégrations fort faciles, puiſque les différentielles ſeront, ou intégrables abſolument, ou réductibles à des arcs de cercle. J'en donnerai plus bas le calcul.

2. On peut même obſerver que depuis le périhélie A juſqu'à 90 degrés de part & d'autre, l'orbite de la Comète pouvant être cenſée une Parabole, on aura à-très-peu-près $x = \frac{2a}{1 + \text{coſ}\, z}$; ce qui rendra encore les calculs plus ſimples & les intégrations plus faciles, le radical $\sqrt{1 - \frac{\overline{u - P'}^2}{Q'^2}}$ ſe réduiſant alors à $\sqrt{u - uu}$; on verra ci-deſſous plus en détail ces différentes opérations.

3. Lorſque l'orbite de la Comète fait un grand angle avec celle de la Planète perturbatrice; ſi la diſtance périhélie eſt d'ailleurs peu différente de la moitié du rayon du grand orbe, ou beaucoup plus petite; on peut encore alors abréger le calcul, non pas autant à la vérité que dans le cas où l'angle des deux orbites n'eſt pas très-conſidérable; mais on pourra du moins ſuppoſer que la partie de la force φ qui vient de l'action de la Planète ſur le Soleil, eſt $\frac{J.\xi\, \text{coſ.}\, \overline{A + z}}{\xi'^3} = \frac{J.\xi}{\xi'^3} \times (\text{coſ.}\, A.\, \text{coſ.}\, z - \text{ſin.}\, z\, \text{ſin.}\, A)$; & que la partie correſpondante de la force π, eſt $\frac{J.\xi\, \text{ſin.}\, \overline{A + z}}{\xi'^3} = \frac{J.\xi}{\xi'^3} \times (\text{ſin.}\, A\, \text{coſ.}\, z + \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\, A)$.

4. On objectera peut-être que si l'angle des deux orbites est fort grand, comme de 80 degrés, la position & la grandeur de la distance accourcie ξ peuvent beaucoup varier pendant le tems que la Comète employe à parcourir 90 degrés depuis le périhélie. A cela nous répondrons, qu'alors la force perturbatrice $\frac{J.\xi}{^3}$ seroit si petite, qu'on pourroit même la négliger; & que d'ailleurs la force $\frac{J.\xi.\text{cos}.\,A+z}{\xi'^3}$ étant aussi elle-même très-petite, & ne pouvant jamais différer considérablement de la véritable force perturbatrice, il n'y aura jamais d'inconvénient à substituer cette force $\frac{J.\xi\,\text{cos}.\,A+z}{\xi'^3}$, à la véritable force suivant CS, qui vient de l'action de la Planète sur le Soleil, & dont le calcul seroit beaucoup plus compliqué, sans être beaucoup plus exact.

5. Nous ajouterons encore, que si pendant les 90 degrés de mouvement de la Comète, on craignoit que la Planète perturbatrice n'eût un mouvement trop sensible pour pouvoir être négligé; on pourroit alors, au lieu de 90 degrés depuis le périhélie, n'en prendre que 60, ou 45, ou moins encore, & du reste achever le calcul de la même maniere. Cet abrégé peut avoir lieu, même pour des Comètes dont la distance périhélie seroit beaucoup plus grande que la moitié du rayon du grand orbe, & pour celles même où elle seroit un peu plus grande que ce rayon entier.

XXIV.

1. Voilà donc des moyens d'abréger considérablement le calcul des perturbations des Comètes; 1°. pour toutes les Comètes en général dans la partie supérieure de leur orbe, depuis le point où la distance de la Comète est égale à vingt fois ou environ le rayon du grand orbe. 2°. Pour les Comètes qui ont leur distance périhélie à-peu-près égale, ou beaucoup moindre que la moitié du rayon du grand orbe, comme celle de 1682, & un très-grand nombre d'autres. 3°. Enfin pour les Comètes qui, comme celle de 1682, & plusieurs autres, sont telles, que leur distance périhélie est beaucoup moindre que la distance moyenne de la Planète au Soleil, rapportée sur l'orbite de la Comète. Car dans la partie inférieure de l'orbe de ces Comètes, contenant 90 degrés en-deçà & au-delà du périhélie, c'est-à-dire, 180 degrés en tout, on pourra, sans avoir recours à des quadratures de courbes méchaniques, déterminer les perturbations par le seul moyen des quadratures qui se réduisent à des arcs de cercle; on pourra même se passer de ces arcs, & avoir des intégrales éxactes & des quadratures absolues, si on considere, ainsi qu'on le peut, cette portion de la trajectoire de la Comète comme une Parabole.

2. Il n'y aura que la partie de l'orbite qui s'étendra depuis 90 degrés du périhélie jusqu'aux points *E*, *e* (*fig.* 13.), où les quadratures de courbes méchaniques seront nécessaires; mais nous avons déja donné ci-dessus différens

moyens de les simplifier ; & nous y en ajouterons encore d'autres dans l'application que nous allons bientôt faire de notre méthode à une Comète particuliere.

3. Avant que d'entrer dans ce détail, il nous reste à donner quelques lemmes qui nous sont nécessaires pour exécuter plus facilement les différentes opérations que nous aurons à faire. Nous supprimerons les démonstrations de la plûpart de ces lemmes, parce qu'elles sont faciles à déduire des §. précédens, ou qu'elles sont d'ailleurs connues des Géometres.

XXV.

Les mêmes noms étant supposés que dans les §. précédens, & nommant de plus δ le demi-grand axe de l'ellipse primitive, & x' les rayons de cette ellipse, qui répondent aux anomalies vraies z ; on aura, abstraction faite des forces perturbatrices

1. $$x' = \frac{aa}{\frac{S+C}{gg} + \left(a - \frac{S+C}{gg}\right) \text{cos. } z},$$

ou

2. $$x' = \frac{2a\delta - aa}{\delta + (\delta - a)\text{ cos. } z}.$$

3. Le demi-parametre p du grand axe, sera

$$p = \frac{aagg}{S+C},$$

ou

4. $$\frac{2a\delta - aa}{\delta} = \frac{aagg}{S+C};$$

Donc

$$5.\ p = 2a - \frac{aa}{\delta}.$$

$$6.\ gg = \frac{2.\overline{S+C}}{a} - \frac{S+C}{\delta},$$

ou

$$7.\ gg = \frac{(S+C)\,p}{aa}.$$

$$8.\ \text{cos}.\ z = \frac{2a\delta - aa}{x'(\delta - a)} - \frac{\delta}{\delta - a}.$$

Si on appelle ε la cotangente de l'angle ACS (*fig.* 13.), que fait un rayon quelconque avec l'ellipse, on aura

$$9.\ \varepsilon = \frac{(\delta - a)\ \text{sin}.\ z}{\delta + (\delta - a)\ \text{cos}.\ z},$$

ou

$$10.\ \varepsilon = \frac{(\delta - a)\ \text{sin}.\ z}{(2a\delta - aa)\,x'}.$$

11. Le quarré de la vitesse $v^2 = gg + \frac{2.\overline{S+C}}{x'} - \frac{2.\overline{S+C}}{a}$ $= (S+C)\left(\frac{p}{aa} + \frac{2}{x'} - \frac{2}{a}\right).$

Et si l'ellipse n'est pas fort excentrique, on pourra supposer, sans erreur considérable, $vv = \frac{gg\,aa}{x'x'} = \frac{\overline{S+C}.p}{x'x'}.$

Si la trajectoire étoit une Parabole, il faudroit dans les quantités précédentes regarder δ comme infinie, & l'on auroit

$$12.\ x' = \frac{2a}{1 + \text{cos}.\ z}.$$

$$13.\ p = 2a.$$

$$14.\ gg = \frac{2.\overline{S+C}}{a}.$$

15. $\text{Cof. } z = \frac{2a}{x'} - 1.$

XXVI.

Si la vitesse primitive étoit g, la distance primitive a ; ε la cotangente du supplément ACS de l'angle de projection (a), & son sinus h, & enfin z les angles d'anomalie, à compter depuis le point de départ ; on auroit

$$1.\ x' = \frac{aa}{\frac{S+C}{g^2h^2} + \left(a - \frac{S+C}{g^2h^2}\right)\text{cof. } z - \varepsilon a \text{ fin. } z};$$

ou

$$2.\ x' = \frac{aa}{\frac{S+C}{g^2h^2} + \frac{\varepsilon a}{\text{fin. } A'}\text{cof. } A' + z}$$ (A' étant l'angle compris entre le rayon a, & la ligne du périhélie).

$$3.\ \text{Tang. } A' = \frac{\varepsilon a}{a - \frac{S+C}{g^2h^2}},$$ l'angle A' étant pris du côté opposé à celui suivant lequel sont supposés marcher les z.

$$4.\ \frac{aag^2h^2}{S+C} = p.$$

$$5.\ 2\delta = \frac{aa}{\frac{S+C}{g^2h^2} + \frac{\varepsilon a}{\text{fin. } A'}} + \frac{aa}{\frac{S+C}{g^2h^2} - \frac{\varepsilon a}{\text{fin. } A'}}.$$

6. Le quarré de la vitesse en un point quelconque

(a) On suppose ici que l'angle de projection (c'est-à-dire, l'angle de la ligne de projection CH avec le rayon vecteur) est obtus ; c'est pourquoi la cotangente de son complément ACS à 180 degrés, est positive.

$vv = gg$

$$vv = gg + \frac{2.\overline{S+C}}{x'} - \frac{2.\overline{S+C}}{a} = (S+C)\left(\frac{p}{aahh} + \frac{2}{x'} - \frac{2}{a}\right).$$

XXVII.

1. Le tems employé à parcourir un angle quelconque (en partant du périhélie) est $\frac{\delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{S+C}}$ multiplié par l'angle dont le cosinus est $\frac{\delta - x'}{\delta - a}$, moins $\frac{(\delta - a)\sqrt{\delta}}{\sqrt{S+C}}$ multiplié par le sinus du même angle.

Donc si on nomme

2. α, l'angle dont le cosinus est $\frac{\delta - x'}{\delta - a}$,

3. On aura le tems cherché $t = \frac{\delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{S+C}}\left(\alpha - \frac{\delta - a}{\delta}\ \text{sin.}\ \alpha\right)$

Et si on appelle m le tems de la révolution totale, on aura ce même tems,

4. $t = \frac{m}{360°} \times \left(\alpha - \frac{\delta - a}{\delta}\ \text{sin.}\ \alpha\right)$.

Au lieu de l'angle dont le cos. est $\frac{\delta - x'}{\delta - a}$, on peut mettre (ce qui revient au même)

5. $\alpha =$ l'angle dont le cosinus est $\frac{\delta - a + \delta\ \text{cos.}\ z}{\delta + (\delta - a)\ \text{cos.}\ z}$, ou

6. $\text{Cos.}\ \alpha = \frac{\frac{\delta - a}{\delta} + \text{cos.}\ z}{1 + \frac{\delta - a}{\delta}\ \text{cos.}\ z}$, ou

$$7.\ \text{Cos.}\ \alpha = \frac{1 + \frac{\delta}{\delta - a}\ \text{cos.}\ z}{\frac{\delta}{\delta - a} + \text{cos.}\ z}.$$

Par conséquent, si la Comète est supposée commencer à partir d'un point dont l'élongation au périhélie soit A', on aura en comptant toujours les angles A', α du périhélie,

$$8.\ t = \frac{m}{360^\circ}\left[\alpha - A' - \left(\frac{\delta - a}{\delta}\right)\text{sin.}\ \alpha + \frac{\delta - a}{\delta}\ \text{sin.}\ A'\right].$$

Il faut remarquer de plus que

$$9.\ \text{La distance périhélie}\ a = \frac{aa}{\frac{S + C}{g^2 h^2} + \frac{\varepsilon a}{\text{sin.}\ A'^2}}.$$

XXVIII.

1. Si l'on construisoit une autre ellipse, dans laquelle le rayon primitif fût . . . . a',
La vitesse primitive . . . . g',
La cotangente du supplément de l'angle de projection, ε',
Son sinus . . . . h',
L'angle compris entre le point de départ & & le périhélie . . . . A'',
Le parametre . . . . p',
Le demi-grand axe . . . . δ',
Le tems de la révolution . . . . m',
La distance périhélie . . . . a',
On auroit les mêmes équations que dans le §. pré-

cédent, en marquant seulement les lettres d'un trait, pour distinguer les deux cas.

2. Il faut de plus remarquer, que si on suppose que la vitesse g' soit telle par rapport à la vitesse g, que l'on ait $g'g' = gg + (S+C)\mu$, on aura $\frac{S+C}{g'^2 h'^2} = \frac{S+C}{g^2 h'^2 + (S+C) h'^2 \mu}$; & en mettant pour g^2 sa valeur $\frac{(S+C)p}{aahh}$, il viendra

$$3.\ \frac{S+C}{g'^2 h'^2} = \frac{aahh}{p h'^2 + aah^2 h'^2 \mu}.$$

Et si l'on suppose que la quantité $(S+C)\mu$ soit très-petite par rapport à gg, & que h' differe peu de h, on pourra supposer

$$4.\ \frac{S+C}{g'^2 h'^2} = \frac{aa}{\frac{p h'^2}{h^2} + aah^2 \mu}.$$

On n'oubliera pas de remarquer aussi que

$$5.\ m' = \frac{m \times \delta'^{\frac{3}{2}}}{\delta^{\frac{3}{2}}}.$$

6. Et que le quarré de la vitesse $v'v'$ en un point quelconque $= g'g' + \frac{2.\overline{S+C}}{x'} - \frac{2.\overline{S+C}}{a'}$.

XXIX.

1. Soit $\frac{dz}{(\varrho + \text{cos. } z)^2}$ une quantité à intégrer, & soit $\frac{1}{\varrho + \text{cos. } z} = y$; on aura pour transformée

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{\varrho\varrho-1}\,.\sqrt{-\frac{1}{\varrho\varrho-1}+\frac{2\varrho y}{\varrho\varrho-1}-yy}}.$$

2. Si $\rho = 1$, la transformée sera $\frac{y\,dy}{\sqrt{2y-1}}$.

3. Si la différentielle proposée est $\frac{dz}{(\varrho+\text{cos. } z)^3}$, la transformée sera $\frac{yy\,dy}{\sqrt{\varrho\varrho-1}\sqrt{-\frac{1}{\varrho\varrho-1}+\frac{2\varrho y}{\varrho\varrho-1}-yy}}$.

4. Si $\rho = 1$, la transformée sera $\frac{y^2\,dy}{\sqrt{2y-1}}$.

5. En général si $\rho = 1$, on aura cos. $z = \frac{1-y}{y}$; sin. $z = \frac{\sqrt{2y-1}}{y}$; $dz = -\frac{d(\text{cos. } z)}{\text{sin. } z} = \frac{dy}{yy} \times \frac{y}{\sqrt{2y-1}} = \frac{dy}{y\sqrt{2y-1}}$; ces formules rendront les transformations & les intégrations fort faciles dans le cas de $\rho = 1$.

XXX.

1. Si on prend le rayon ou sinus total pour l'unité, l'intégrale de $\frac{dy}{\sqrt{A+2By-yy}}$ (A & B étant des constantes quelconques) sera K, K étant un angle dont le cosinus est $\frac{B-y}{\sqrt{A+BB}}$.

2. L'intégrale de $\frac{y\,dy}{\sqrt{A+2By-yy}}$ sera $-\sqrt{A+BB}$ sin. $K + B.K$.

3. Celle de $\frac{yydy}{\sqrt{A+2By-yy}}$ sera $-2B\sqrt{A+BB}$ sin. $K+\frac{A+BB}{4}$ sin. $2K+\frac{A+3BB}{2}K$.

XXXI.

Si on suppose dans le §. XXIX. $\rho=\frac{\delta}{\delta-a}$, on aura

1. $\rho\rho-1=\frac{2a\delta-aa}{(\delta-a)^2}$.

2. $\sqrt{\rho\rho-1}=\frac{\sqrt{2a\delta-aa}}{\delta-a}$;

Donc les quantités A & B de l'article précédent, & celles qui en dépendent, seront exprimées par les équations suivantes;

3. $B=\frac{\rho}{\rho\rho-1}=\frac{\delta.\overline{\delta-a}}{2a\delta-aa}$.

4. $A=-\frac{1}{\rho\rho-1}=-\frac{(\delta-a)^2}{2a\delta-aa}$.

5. $A+BB=\frac{1}{(\rho\rho-1)^2}=\frac{(\delta-a)^4}{(2a\delta-aa)^2}$;

6. $\sqrt{A+BB}=\frac{(\delta-a)^2}{2a\delta-aa}$.

7. $B\sqrt{A+BB}=\frac{\delta.\overline{\delta-a}^3}{(2a\delta-aa)^2}$.

8. $y=\frac{1}{\frac{\delta}{\delta-a}+\text{cos.}\,z}=\frac{\delta-a}{\delta+(\delta-a).\text{cos.}\,z}=$ (§. XXV. n. 2.) $\frac{(\delta-a)x'}{2a\delta-aa}$.

9. $\frac{B - y}{\sqrt{A + BB}} = \frac{\delta - x'}{\delta - a}$;

10. Et par conséquent (§. XXVII. n. 5. & §. XXX. n. 1.) $K = \alpha$; puisque K est l'angle dont le cosinus $= \frac{B - y}{\sqrt{A + BB}}$, & α l'angle dont le cosinus est $\frac{\delta - x'}{\delta - a}$.

11. Enfin $A + 3BB = \frac{(3\delta\delta - 2a\delta + aa)(\delta - a)^2}{(2a\delta - aa)^2}$.

XXXII.

Si dans le §. XXIX. on suppose $\rho = 1$, on aura

1. L'intégrale de $\frac{y\,dy}{\sqrt{2y - 1}} = \frac{(y - \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3} + \frac{(y - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$.

2. $\int \frac{yy\,dy}{\sqrt{2y - 1}} = \frac{(y - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} + \frac{(y - \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3} + \frac{(y - \frac{1}{2})^{\frac{5}{2}}\sqrt{2}}{5}$.

Et comme dans ce cas $y = \frac{1}{1 + \text{cos}.\,z} = \frac{x}{2a}$ (§. XXV. n. 12.); on aura encore

3. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{2y - 1}} = \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{2}{3}$.

lorsque $x = 2a$, c'est-à-dire, lorsque $z = 90°$.

4. $\int \frac{yydy}{\sqrt{2y-1}} = \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{4} + \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{5}{2}}}{20} = \frac{7}{15}$ lorsque $z = 90^\circ$.

5. En général si $\frac{1}{1+\text{cos.}\, z} = \frac{x}{2a}$, on aura $\text{cos.}\, z = \frac{2a}{x} - 1$; $\text{sin.}\, z = \frac{2\sqrt{ax-aa}}{x}$; $dz = -\frac{d(\text{cos.}\, z)}{\text{sin.}\, z} = \frac{2adx}{xx} \times \frac{x}{2\sqrt{ax-aa}} = \frac{dx\sqrt{a}}{x\sqrt{x-a}}$; ces formules rendront les transformations & les intégrations faciles dans le cas de $\frac{1}{1+\text{cos.}\, z} = \frac{x}{2a}$.

XXXIII.

Les mêmes choses étant posées que dans le §. XXIX. on aura

1. $\int \frac{dz\, \text{cos.}\, z}{(\rho+\text{cos.}\, z)^3} = \int \frac{dz}{(\rho+\text{cos.}\, z)^2} - \rho \int \frac{dz}{(\rho+\text{cos.}\, z)^3}$.

2. $\int \frac{dz\, \text{sin.}\, z}{(\rho+\text{cos.}\, z)^3} = -\frac{1}{2.\, \overline{\rho+1}^2} + \frac{1}{2(\rho+\text{cos.}\, z)^2}$.

3. $\int \frac{dz(\text{cos.}\, z - 1)}{(\rho+\text{cos.}\, z)^3} = \int \frac{dz}{(\rho+\text{cos.}\, z)^2} - (\rho+1) \int \frac{dz}{(\rho+\text{cos.}\, z)^3}$.

Or on a donné ci-dessus les valeurs de $\int \frac{dz}{(\rho+\text{cos.}\, z)^2}$,

& de $\int \frac{dz}{(\rho + \text{cos. } z)^3}$ (§. XXIX, XXX & XXXI.) quelle que soit la valeur de ρ ; & dans le §. XXXII. on a donné les valeurs particulieres de ces deux intégrales, dans le cas où $\rho = 1$. Ainsi on aura facilement les valeurs des trois intégrales précédentes, dans le cas de $\rho =$ à un nombre quelconque, & dans celui de $\rho = 1$.

En général si $\rho = 1$, on aura

4. $\int \frac{dz \text{ cos. } z}{(1 + \text{cos. } z)^3} = \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{4} - \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{5}{2}}}{20} = \frac{1}{5}$

lorsque $z = 90°$.

5. $\int \frac{dz \text{ sin. } z}{(1 + \text{cos. } z)^3} = \frac{xx}{8aa} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ lorsque $z = 90°$.

6. $\int \frac{dz \cdot (\text{cos. } z - 1)}{(1 + \text{cos. } z)^3} = - \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{6} - \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{5}{2}}}{10}$

$= - \frac{4}{15}$ lorsque $z = 90°$.

7. $\int \frac{dz \text{ sin. } z}{(1 + \text{cos. } z)^2} = \frac{x}{2a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ lorsque $z = 90°$.

8. $\int \frac{dz \text{ sin. } z \cdot \text{cos. } z}{(1 + \text{cos. } z)^3} = \int \frac{dz \text{ sin. } z}{(1 + \text{cos. } z)^2} - \int \frac{dz \text{ sin. } z}{(1 + \text{cos. } z)^3}$

$= \frac{x}{2a} - \frac{xx}{8aa} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ lorsque $z = 90°$.

9. $\int \frac{dz}{1 + \text{cos. } z} = \sqrt{\frac{x}{a} - 1} = 1$ lorsque

$z = 90°$.

10.

10. $\int \frac{dz \cos. z}{(1+\cos. z)^2} = \int \frac{dz}{1+\cos. z} - \int \frac{dz}{(1+\cos. z)^2}$

$= + \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{6} = \frac{1}{3}$ lorsque $z = 90°$.

11. $\int \frac{dz \sin. z^2}{(1+\cos. z)^3} = -\int \frac{dz}{1+\cos. z} + 2\int \frac{dz \cos. z}{(1+\cos. z)^3}$ $+ 2\int \frac{dz}{(1+\cos. z)^3} = 2\int \frac{dz}{(1+\cos. z)^2} - \int \frac{dz}{1+\cos. z} =$

$\frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{1}{3}$ lorsque $z = 90°$.

12. $\int \frac{dz \cos. z^2}{(1+\cos. z)^3} = \int \frac{dz}{(1+\cos. z)^3} - \int \frac{dz \sin. z^2}{(1+\cos. z)^3}$

$= \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{4} - \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{5}{2}}}{20} = \frac{2}{15}$ lorsque $z = 90°$.

13. $\int \frac{dz}{(1+\cos. z)^4} = \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{7}{2}}}{7 \cdot 8} + 3 \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{5}{2}}}{8 \cdot 5} +$

$\frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{8} + \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{8} = \frac{12}{35}$ lorsque $z = 90°$.

14. $\int \frac{dz \cos. z}{(1+\cos. z)^4} = \int \frac{dz}{(1+\cos. z)^3} - \int \frac{dz}{(1+\cos. z)^4}$, dont on trouvera la valeur par le n. précédent, & par le n. 4. des art. XXIX & XXXII.

15. $\int \frac{dz \text{ fin. } z^2 \text{ cof. } z^2}{(1 + \text{cof. } z)^3}$ = à l'intégrale de $\frac{dx}{2\sqrt{\frac{x}{a} - 1}} \times$

$\frac{x^2}{a^2} \times \frac{x - a}{x^2} \times \frac{\overline{xx - 4ax + 4aa}}{x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{a\sqrt{\frac{x}{a} - 1}}$

$\times \overline{\frac{x}{a} - 1} \times \overline{\frac{xx - 4ax + 4aa}{x^2}}$; cette intégrale étant prise de maniere qu'elle soit $= o$ lorsque $x = a$.

Mais on peut encore trouver autrement cette intégrale, en remarquant que $\int \frac{dz \text{ fin. } z^2 \text{ cof. } z^2}{(1 + \text{cof. } z)^3} =$ $\int \frac{dz(-\text{cof. } z^4 + \text{cof. } z^2)}{(1 + \text{cof. } z)^3} = \int dz(3 - \text{cof. } z) -$ $\int \frac{5\, dz \text{ cof. } z^2}{(1 + \text{cof. } z)^3} - \int \frac{8\, dz \text{ cof. } z}{(1 + \text{cof. } z)^3} - \int \frac{3\, dz}{(1 + \text{cof. } z)^3}$; l'intégrale des deux premiers termes est $3z -$ fin. z; & l'intégrale des trois derniers est aisée à trouver par les précédens n°. 4 & 12. & par le §. XXXII. n°. 4.

16. $\int \frac{dz \text{ fin. } z^3 \text{ cof. } z}{(1 + \text{cof. } z)^3}$ fe trouvera de même égal à l'intégrale de $\frac{(x - a)(2a - x)\, dx}{a x^2} = \text{Log.} \frac{x^3}{a^3}$ $+ \frac{2a}{x} - \frac{x}{a} - 1 = \text{Log. } 8 - 2$, lorfque $z = 90°$.

17. $\int \frac{dz \text{ fin. } z \text{ cof. } z^3}{(1 + \text{cof. } z)^3}$ fera égal à l'intégrale de $\frac{\overline{2a - x}^3 . dx}{4a^2 x^2} = -\frac{2a}{x} + \frac{3x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{5}{8}$ $+ \text{Log.} \frac{a^3}{x^3} = - \text{Log. } 8 + \frac{17}{8}$ lorfque $z = 90°$.

18. $\int \frac{dz \cos. z^2}{(1 + \cos. z)^4}$ sera égal à l'intégrale de $\frac{x\, dx}{16\, aa \sqrt{\frac{x}{a} - 1}} \times \frac{\overline{2a - x}^2}{a^2}$, ou, ce qui revient au même, sera égal à l'intégrale de $\frac{dz}{(1 + \cos. z)^2} - \frac{2\, dz \cos. z}{(1 + \cos. z)^4} - \frac{dz}{(1 + \cos. z)^4}$, qu'on trouvera par le §. XXXII. n°. 3, & par les n°. 13 & 14 du présent Paragraphe.

19. $\int \frac{dz \sin. z \cos. z}{(1 + \cos. z)^4}$ = à l'intégrale de $\frac{x\, dx}{8\, aa} \times \frac{\overline{2a - x}}{a} = \frac{x^2}{8a^2} - \frac{x^3}{24a^3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$ lorsque $z = 90°$.

20. $\int \frac{dz \sin. z}{(1 + \cos. z)^4} = \int \frac{x^2\, dx}{8a^3} = \frac{x^3}{24a^3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$ lorsque $z = 90°$.

21. $\int \frac{dz \sin. z \cos. z^2}{(1 + \cos. z)^4} = \int \frac{dx}{8a} \cdot \frac{\overline{2a - x}^2}{aa} = \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{4aa} + \frac{x^3}{24a^3} - \frac{7}{24} = \frac{1}{24}$ lorsque $z = 90°$.

22. $\int \frac{dz \sin. z^2 \cos. z}{(1 + \cos. z)^4} = \int \frac{dx}{4a} \times \frac{2a - x}{a} \times \sqrt{\frac{x}{a} - 1} = \frac{\overline{\frac{x}{a} - 1}^{\frac{3}{2}}}{6} - \frac{\overline{\frac{x}{a} - 1}^{\frac{5}{2}}}{10} = \frac{1}{15}$ lorsque $z = 90°$.

23. $\int \frac{dz \cos. z^3}{(1 + \cos. z)^4} = \int \frac{dx}{16a \sqrt{\frac{x}{a} - 1}} \times \frac{\overline{2a - x}^3}{a^3}$;

ou plutôt $= \int \frac{dz \operatorname{cof.} z}{(1+\operatorname{cof.} z)^4} - \int \frac{dz \operatorname{fin.} z^2 \operatorname{cof.} z}{(1+\operatorname{cof.} z)^4}$, qu'on trouvera par les n°. 14 & 22.

24. Nous ne poufferons pas plus loin ces formules, qui peuvent être de grand ufage dans la Théorie des Comètes. Les Mathématiciens voyent aifément combien il leur fera facile d'en former de femblables en cas qu'ils en ayent befoin, & en géneral de trouver l'intégrale de $\frac{dz (\operatorname{fin.} z)^m (\operatorname{cof.} z)^n}{(1+\operatorname{cof.} z)^q}$, m, n & q étant des nombres entiers quelconques.

25. Il eft à remarquer que ces quantités feront toujours les mêmes pour le même angle z, quelle que foit d'ailleurs la valeur de a; puifqu'elles font $= o$ lorfque $x = a$, & qu'on les fuppofe complettes lorfque $x = 2a$, ou $z = 90°$. Ainfi on fera bien d'en former des tables, dont on pourra fe fervir pour toutes les Comètes qui fe trouvent (§. XXI. XXII & XXIII.) dans les cas où il eft permis de faire ufage de ces formules, ou d'une partie de ces formules; ces tables une fois dreffées, abrégeront beaucoup le calcul, comme on le verra dans la fuite de ce Mémoire.

26. Dans l'expreffion de toutes les intégrales précédentes, nous avons fuppofé l'intégrale $= o$ lorfque $z = o$. Si l'on vouloit que l'intégrale fût $= o$ lorfque $z =$ un angle quelconque α, & $x = b$; fa valeur ne feroit pas plus difficile à trouver. Il y a cependant ici une remarque importante à faire; c'eft que quand z eft

> 180°. & < 360, alors $\sqrt{\frac{x}{a}-1}$ doit être pris négativement; la raison de cela est que $\frac{2\sqrt{ax-aa}}{x}$ exprime en général le sinus de z; & qu'ainsi $\sqrt{x-a}$ doit être pris négativement lorsque z est > 180°. & < 360, ou en général lorsque sin. z est négatif.

27. Pour n'être point embarrassé par cette petite difficulté, il n'y aura qu'à mettre au lieu de $\sqrt{\frac{x}{a}-1}$ (dans les intégrales qui contiennent cette quantité radicale) sa valeur $\frac{x \text{ sin. } z}{2a}$, avant que de completter l'intégrale. Par exemple, soit demandée l'intégrale de $\int \frac{dz}{1+\text{cos. } z}$, en supposant cette intégrale $= o$ lorsque $z = 270°$. On aura (n°. 9. ci-dessus) l'intégrale cherchée $\int \frac{dz}{1+\text{cos. } z}$ $= \sqrt{\frac{x}{a}-1}$ sans être complettée; & mettant pour $\sqrt{\frac{x}{a}-1}$ sa valeur $\frac{x \text{ sin. } z}{2a}$, l'intégrale complette sera $\frac{x \text{ sin. } z}{2a} - \frac{2a \text{ sin. } 270°}{2a} = \frac{x \text{ sin. } z}{2a} + 1$. Ou bien on peut, si l'on veut, changer le signe du radical $\sqrt{\frac{x}{a}-1}$, ce qui donnera $-\sqrt{\frac{x}{a}-1}$, & l'intégrale complette $-\sqrt{\frac{x}{a}-1}+1$.

28 En faisant cette attention, on évitera les erreurs de calcul où pourroit entraîner le signe équivoque du

radical $\sqrt{\frac{x}{a} - 1}$. A l'égard des quantités où ce radical ne se rencontre pas, elles ne feront aucune difficulté. Telles sont celles des n°. 5, 7, 8, &c. où il n'y a que des puissances de x en nombres entiers.

XXXIV.

1. Soit l'ellipse $N' \Gamma N$ (*fig.* 16.) dont C soit le foyer; & dans laquelle on connoisse le rayon $C\Gamma$, & de plus la vitesse en Γ, & l'angle $C\Gamma O$; ces trois quantités se connoîtront par les formules du §. XXV. n°. 1, 9 & 11. en supposant qu'on sache la position de la ligne des apsides de cette ellipse, la valeur de son grand axe, la distance périhélie; enfin l'angle entre le rayon $C\Gamma$ & la ligne du périhélie.

2. Imaginons de plus que le plan de cette ellipse soit incliné d'une quantité connue à un autre plan $N' \gamma N$; & qu'on connoisse l'argument $\Gamma C N$ de la latitude.

3. Supposant tirée la tangente ΓO, il est clair que les angles $C\Gamma O$, $\Gamma C N$, & le côté $C\Gamma$ feront connoître ΓO, & CO.

4. On aura $C\gamma^2 = C\Gamma^2 \text{ cos. } \Gamma C O^2 + C\Gamma^2 \text{sin. } \Gamma C O^2 \times (\text{cos. inclin.})^2$; ce qui donnera $C\gamma$.

5. L'angle $\gamma C O$ aura pour sinus $\frac{C\Gamma \text{ sin. } \Gamma C O}{C\gamma} \times \text{cos. incl.}$ Et la ligne $\Gamma\gamma = C\Gamma \text{ sin. } \Gamma C O \times \text{sin. incl.}$

6. Donc puisque CO est déja calculée, on tirera des quantités connues CO, $C\gamma$, & γCO, l'angle $C\gamma O$, c'est-à-dire, la direction du point γ; & la ligne γO.

7. La viteſſe en γ ſera à la viteſſe en Γ, comme la ligne calculée γO à la ligne auſſi calculée ΓO.

8. Donc ſi l'orbite $N' \Gamma N$ d'une Planète dont C eſt le foyer, eſt ſuppoſée rapportée ſur un plan quelconque, on pourra connoître à chaque inſtant le rayon vecteur $C\gamma$ de la projection, ainſi que la viteſſe & la direction du point γ, qui repréſente la projection de la Planète ſur le plan $N' \gamma N$.

9. Cette opération eſt abſolument néceſſaire pour déterminer les rayons vecteurs de l'orbite de la Planète perturbatrice, rapportée ſur l'orbite de la Comète; & pour connoître auſſi, lorſqu'il eſt néceſſaire, la viteſſe de la Planète ainſi projettée, & ſa direction.

XXXV.

Il nous reſte encore un Problême à réſoudre avant que de paſſer à l'application de notre théorie au mouvement d'une Comète particuliere. C'eſt d'indiquer la maniere dont on doit s'y prendre pour quarrer les courbes méchaniques dont il faudra trouver l'aire.

1. L'abſciſſe de ces courbes étant z, ſuppoſons que l'ordonnée ſoit $\lambda \times \nu \times \mu$ &c. λ, ν, & μ étant des quantités qu'on connoît pour chaque valeur de z de degré en degré. On trouvera d'abord la valeur de $\lambda \times \mu \times \nu$, en ajoutant enſemble les Logarithmes de λ, μ, ν, ſans égard au ſigne de ces quantités; enſuite on mettra à la quantité trouvée $\lambda \times \mu \times \nu$, le ſigne convenable, c'eſt-à-dire, celui qui réſulte de la combinaiſon des ſignes de λ, de μ, & de ν.

2. On fera $dz = 1$ degré ou 2 degrés, selon qu'on en aura besoin ; & on exprimera dz en parties du rayon, savoir $dz = \frac{100000 \times 1^\circ}{57^\circ\ 17'\ 4''}$.

3. On ajoutera ensemble toutes les ordonnées $\lambda \times \mu \times \nu$ avec leurs signes, à l'exception des deux extrêmes dont on ne prendra que la moitié ; & on multipliera cette somme par la valeur de dz.

4. Si on craint que cette approximation ne soit pas assez exacte, parce qu'on n'y considere la courbe que comme un polygone, & l'aire cherchée que comme une suite de trapêses ; en ce cas on se servira des formules que M. Cottes a données à la fin de son *Harmonia Mensurarum*. Suivant ces formules, si on prend trois ordonnées de suite, à égale distance, & que A soit la somme de la premiere & de la troisiéme, B la seconde, & R la distance entre les deux ordonnées extrêmes, c'est-à-dire, entre la premiere & la troisiéme ; on aura pour l'aire comprise entre les trois ordonnées, $\frac{A + 4B}{6} R$, ou (prenant $\rho = \frac{R}{2}$ pour la distance entre deux ordonnées voisines) $\frac{A + 4B}{3} \rho = \frac{A + 4B}{3} dz$.

5. Dans les endroits où on craindra que cette approximation ne soit pas encore assez exacte, on prendra les ordonnées de demi degré en demi degré, ou de 10 minutes en 10 minutes ; & on fera le même calcul.

Ou bien on pourra se servir des formules qui se trouvent

vent à la fin de l'Ouvrage de M. Cottes, & qui donnent la valeur approchée de l'aire d'une courbe, dont on connoît tant d'ordonnées qu'on voudra.

6. Par-là on aura, aussi exactement qu'on le pourra desirer, les différentes parties de l'aire d'une courbe méchanique proposée quelconque, lorsqu'on connoît à-peu-près la valeur numérique & le signe de chaque ordonnée, répondante à chaque abscisse z de degré en degré.

7. Si cette méthode de procéder par les quadratures paroissoit encore trop longue, parce qu'elle demande qu'on calcule un grand nombre d'ordonnées; on pourroit l'abréger en se servant, comme le pratiquent les Géometres dans des cas semblables, de la méthode des courbes paraboliques, imaginée par M. Newton, & perfectionnée depuis par MM. Cottes, Stirling & d'autres Auteurs. Mais au lieu d'employer ici, comme l'ont fait d'autres Géometres, les arcs z & leurs puissances, pour en former l'ordonnée de la courbe parabolique; il est, ce me semble, plus naturel & plus simple d'employer les sinus & les cos. de z; 1°. plus naturel, parce que les forces perturbatrices dépendent de sinus & de cosinus d'angles, & non pas d'angles mêmes, & qu'ainsi il est plus convenable de faire entrer des cosinus ou des sinus que des arcs, dans l'expression de la quantité qui doit servir à représenter ces forces; 2°. plus simple, parce que les intégrations seront plus faciles en employant les sin. z & cos. z, que les arcs z. C'est pour-

quoi on prendra pour l'ordonnée de la courbe de genre parabolique $A + B$ sin. $z + C$ sin. z cos. $z + D$ sin. z cos. z^2 + &c. Et multipliant cette quantité par dz, on aura l'intégrale, à laquelle on appliquera ensuite la méthode des courbes paraboliques.

8. Au lieu d'employer la formule $A + B$ sin. $z + C$ sin. z cos. $z + D$ sin. z cos. z^2 &c. on pourra encore employer celle ci, qui sera même plus commode pour le calcul, B sin. $z + C$ cos. $z + D$ sin. $2z + E$ cos. $2z$ + &c.

9. Si l'on vouloit néanmoins faire entrer les arcs de cercle z dans la courbe parabolique au lieu des sinus & des cosinus, on le pourroit absolument. Mais voici deux moyens de rendre alors le calcul plus éxact. 1°. Au lieu de faire commencer les z au commencement A de la premiere révolution, on les fera commencer au point où l'on commence à employer la courbe parabolique; de maniere que si dans ce point $z = A'$, on prendra les ordonnées de la courbe $= A + B(z - A') + C(z - A')^2 + D(z - A')^3$ &c. 2°. Au lieu de représenter les ordonnées par des puissances de $z - A'$, on pourra les représenter par des puissances de $c^{z - A'}$, en cette sorte, $Ac^{z - A'} + Bc^{(2z - 2A')} + Dc^{(3z - 3A')}$, &c. ce qui sera encore plus commode pour le calcul, parce que $c^{nz - nA'}$ est en général le nombre dont le Logarithme est $nz - nA'$, & que l'on a des tables toutes faites de ces nombres.

10. Les Géometres n'avoient jusqu'à présent imaginé

rien de plus ſimple pour la quadrature des courbes irrégulieres, que les courbes de genre parabolique. Il me ſemble que les courbes dont je viens de parler, & qu'on peut appeller *courbes de genre exponentiel*, ſeroient du moins auſſi commodes, & peut-être même plus éxactes dans certaines occaſions.

11. Voilà tous les préliminaires néceſſaires pour calculer dans les différens cas poſſibles les perturbations cauſées à l'orbite des Comètes par l'action des Planètes. Nous allons maintenant appliquer ces différentes opérations au calcul d'une Comète particuliere. Celle de 1682 ayant déja été calculée par M. Clairaut, ſuivant une méthode différente de la nôtre, nous en choiſirons une autre, à laquelle nous appliquerons notre méthode, en preſcrivant pied à pied aux calculateurs tout ce qu'il faut faire pour arriver à ce but.

XXXVI.

1. Nous prendrons pour exemple la Comète de 1532, qui paroît être la même que celle de 1661, & dont la période eſt d'environ 129 ans. La diſtance périhélie de cette Comète en 1532 ayant été de 50910 parties, dont le rayon du grand orbe en contient 100000, & en 1661 ayant été de 44851, il eſt clair que cette Comète eſt du nombre de celles dont la diſtance périhélie differe peu de la moitié du rayon du grand orbe, ou même eſt moindre; & qu'ainſi on peut y appliquer les abrégés de calcul relatifs à cette hypothèſe. De plus l'inclinaiſon de

cette Comète au plan de l'Ecliptique n'étant que de 32 degrés, sa distance périhélie sera environ 8 à 9 fois moindre que la distance moyenne de Jupiter; ainsi on peut encore y appliquer les abrégés de calcul dont on a donné la méthode aux §. XXII, XXIII, & suivans.

2. Voici donc maintenant la suite des opérations qu'il faut faire pour connoître les altérations de cette Comète en vertu de l'action de Jupiter & de Saturne, ou, ce qui est la même chose, la différence de deux révolutions successives.

3. On cherchera dans les tables des Comètes la distance périhélie a en 1532, qui sera exprimée en parties, dont le rayon de la terre en contient 100000; & l'on aura

$$a = 0,50910$$

4. Comme les observations de 1532 sont peu éxactes, & qu'en 1661, on a eu $a = 44851$, on pourroit supposer

$$a = 0,45000.$$

5. On cherchera le tems du passage de la Comète de 1532 au périhélie, qu'on trouvera le 19 Octobre à 22^h & celui de la Comète de 1661, qu'on trouvera le 26 Janvier N. S. à 23^h.

Ce qui fait pour la révolution totale

$$m = 129^{ans}\ 89^{jours}\ (a).$$

6. On fera ensuite : comme l'année commune de $365^j.5^h.49'$ élevée à la puissance $\frac{2}{3}$ est à $m^{\frac{2}{3}}$; ainsi 100000

(a) Ce devroit être 129 ans 99 jours; mais il faut en ôter les 10 jours retranchés en 1582 dans le Calendrier Grégorien.

eſt à un quatriéme terme, qui ſera le demi-grand axe de l'orbite de la Comète; on nommera ce demi-grand axe . . . . δ

7. Cela fait, on aura aiſément les quantités ſuivantes,

$$\frac{\delta - a}{\delta} = \varepsilon.$$

$$\frac{\delta}{\delta - a} = \rho.$$

$$2 a \delta - a a = \pi.$$

$$2 a - \frac{a a}{\delta} = \text{au parametre } p.$$

$$\frac{2 a \delta - a a}{\delta - a} = a + a \rho = \theta.$$

8. Depuis le périhélie A juſqu'à 90 degrés de longitude, on calculera les rayons de l'orbite par la formule très-ſimple $x = \frac{2 a}{1 + \text{coſ. } z}$; ou plutôt on ſe diſpenſera de calculer ces rayons, & on ſe ſouviendra ſeulement qu'on peut leur ſuppoſer cette valeur.

9. Et on calculera les tems correſpondans par la formule $t = \frac{m}{\delta^{\frac{3}{2}} \times 6,283185} \times a^{\frac{3}{2}} \times \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \right]$. On n'aura même beſoin de cette formule, comme on le verra plus bas, que pour calculer le ſeul tems t qui répond à $z = 90°$. ou $x = 2 a$; ce qui donne $t = \frac{m \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\delta^{\frac{3}{2}} . 6,283185} \times \left[\frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} \right]$.

10. Depuis 90 degrés on calculera les rayons x par la formule,

$$x = \frac{\theta}{\varrho + \text{cof. } z}.$$

Les angles α par leurs cosinus $\frac{\delta - x}{\delta - a}$:

Et on aura les tems correspondans par la formule

$t = \frac{m}{360°}(\alpha - \beta \text{ sin. } \alpha)$.

11. On ne poussera ce calcul des x & des t que jusqu'au point où $x = 20$ fois le rayon du grand orbe $= 2000000$; ce qui donne, en nommant α' l'angle ASE (*fig.* 13.), $\text{cof. } \alpha' = \frac{-2000000 + \delta}{\delta - a}$.

Et par conséquent l'angle ASE.

12. On interrompra ce calcul depuis le point E, où $SE = 2000000$, jusqu'au point e correspondant, où $Se = SE$ (*fig.* 13.); parce que dans cet espace il n'est pas nécessaire de connoître les tems t; le calcul de ces tems n'étant nécessaire que pour avoir au moins à-peu-près les positions correspondantes de Jupiter & de Saturne, dont on n'a pas besoin dans la partie EDe de l'orbite.

13. Depuis le point e jusqu'à 90 degrés en-deçà du périhélie, on recommencera les calculs des t en cette maniere.

14. On remarquera d'abord qu'aux points E, e, on a $\text{cof. } z = \frac{\theta}{2000000} - \rho$; ce qui donne deux valeurs de z, à compter depuis le périhélie A; l'une qui répond au point E, & qui est plus petite que 180 degrés, l'autre

qui répond au point e, & qui est plus grande que 180°.

15. Depuis cette derniere valeur de z jusqu'à celle de $z = 270°$. on calculera les rayons x par la formule

$$x = \frac{\theta}{\gamma + \text{cos. } z};$$

Et les tems t par la formule $t = \frac{m}{360°}(\alpha - \varepsilon \,\text{sin.}\, \alpha)$, en faisant attention que

$$\text{Cos. } \alpha = \frac{\delta - x}{\delta - a},$$

Et que α doit être pris ici plus grand que 180 degrés, & par conséquent que sin. α est négatif.

16. Depuis $z = 270°$. jusqu'à $z = 360°$, les rayons x seront exprimés par la formule

$x = \frac{2a}{1 + \text{cos. } z}$, qu'on se dispensera de calculer, comme dans le n°. 8. ci-dessus.

17. Et les tems t par la formule

$$t = m - \frac{m}{\delta^{\frac{3}{2}} \cdot 6,283185} \times a^{\frac{3}{2}} \times \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{3}{2}} + \overline{\frac{x}{a} - 1}^{\,\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}\right],$$

formule dont on pourra même se dispenser; car on n'aura besoin de connoître que le seul tems t qui répond à $z = 360°$, lequel est déja tout calculé, & $= m$.

18. Pour la seconde révolution depuis A jusqu'en E, les x seront les mêmes que dans la partie correspondante de la premiere révolution; & les tems t devront seulement être augmentés de la quantité m.

19. On formera par ce moyen, depuis le point de 90° de la seconde révolution jusqu'au point *E* de la même révolution, une table des x & des t correspondans; & on aura l'attention de ne calculer ni les x ni les t pour la partie *E D e*, les points *E*, *e* étant supposés ceux où $x = 2000000$.

20. Cette premiere opération faite, on calculera par les régles de la Trigonométrie, l'inclinaison des orbites de Jupiter & de Saturne à l'orbite de la Comète; & de plus les lieux de Jupiter & de Saturne correspondans aux tems t. On rapportera ces lieux sur l'orbite de la Comète, ce qui donnera

Les distances accourcies ξ de chacune des deux Planètes, correspondantes aux x & aux t.

Les angles ζ entre les lieux de la Comète & ceux des Planètes perturbatrices, rapportés à l'orbite de la Comète. Ces angles ζ se compteront toujours depuis la Planète jusqu'à la Comète, & dans le sens où la Comète se meut.

21. Dans ce calcul il ne faudra chercher les positions de Jupiter & de Saturne que depuis le tems où la Comète est à 90 degrés du périhélie *A* jusqu'au point *E*, & depuis le point *e* jusqu'à 270 degrés du périhélie. Pour tout le reste de l'orbite, savoir pour la partie *K A k* (*fig.* 17.) qui s'étend à 90 degrés de part & d'autre du périhélie, voici ce que l'on fera.

22. On calculera la position *J* de Jupiter à l'instant du périhélie *A*, & sa position *i* à l'instant où la Comète est

eſt en K; & on ſuppoſera que pendant tout le tems que la Comète parcourt AK, Jupiter eſt immobile au point de milieu i' de cet eſpace.

23. On fera la même choſe pour l'eſpace kA de la premiere révolution, ainſi que pour l'eſpace AK de la ſeconde.

24. On fera le même calcul pour Saturne.

25. Cela poſé, ſoit l'angle conſtant & connu $i'SA = A$ (*fig.* 17.); on aura depuis A juſqu'en K, en nommant ξ la diſtance accourcie & conſtante Si', & ξ' la diſtance réelle correſpondante de la Planète au Soleil, (§. XXI, XXII & XXIII),

$$X = -\frac{J.4a^4}{S.\xi'^3(1+\text{coſ.}\,z)^3} + \frac{3J.\xi^2\,\text{coſ.}\,2A.4a^4\,\text{coſ.}\,z^2}{S.\xi'^5(1+\text{coſ.}\,z)^3}$$

$$- \frac{3J.\xi^2.4a^4\,\text{ſin.}\,2A\,\text{coſ.}\,z\,\text{ſin.}\,z}{S\xi'^5(1+\text{coſ.}\,z)^3} + \frac{3J.\xi^2\,4a^4(1-\text{coſ.}\,2A)}{2.S.\xi'^5(1+\text{coſ.}\,z)^3}$$

$$- \frac{3J.\xi^2}{S.\xi'^5} \times \frac{\text{ſin.}\,2A}{2} \times \frac{4a^4\,\text{ſin.}\,z}{(1+\text{coſ.}\,z)^4} + \frac{3J.\xi^2\,\text{ſin.}\,2A}{S.\xi'^5}$$

$$\times \frac{4a^4\,\text{ſin.}\,z\,\text{coſ.}\,z^2}{(1+\text{coſ.}\,z)^4} + \frac{3J.\xi^2\,\text{coſ.}\,2A}{S.\xi'^5} \times \frac{4a^4\,\text{ſin.}\,z^2\,\text{coſ.}\,z}{(1+\text{coſ.}\,z)^4};$$

Et $Y = \frac{3J.\xi^2\,\text{ſin.}\,2A}{S.\xi'^5} \times \frac{4a^3}{(1+\text{coſ.}\,z)^4} -$

$$\frac{3J.\xi^2\,\text{ſin.}\,2A}{S.\xi'^5} \times \frac{8a^3\,\text{coſ.}\,z^2}{(1+\text{coſ.}\,z)^4} - \frac{3J.\xi^2\,\text{coſ.}\,2A}{S.\xi'^5}$$

$$\times \frac{8a^3\,\text{ſin.}\,z\,\text{coſ.}\,z}{(1+\text{coſ.}\,z)^4}.$$

26. De-là, & des formules du §. XXXIII, on tirera aiſément la valeur de $\int X dz\,\text{ſin.}\,z$, lorſque $z = 90°$, comme auſſi celle de $\int X dz\,\text{coſ.}\,z$, celle de $\int Y dz$, celle de $\int Y dz\,(1-\text{coſ.}\,z)$, & celle de $\int Y dz\,\text{ſin.}\,z$.

Soit donc lorsque $z = 90°$,

$\int X\,dz \text{ sin. } z = A'$.

$\int X\,dz \text{ cos. } z = B'$.

$\int Y\,dz = C'$.

$\int Y\,dz\,(1 - \text{cos. } z) = D'$.

$\int Y\,dz \text{ sin. } z = E'$;

Et on mettra à part ces quantités pour en faire usage en tems & lieu.

27. De plus on fera depuis A jusqu'en K,

$$-\frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{4} + \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{5}{2}}}{20} = P'.$$

$$\frac{x^2}{8aa} - \frac{1}{8} = Q'.$$

$$\frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{5}{2}}}{10} = R'.$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{6} - \frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{2} = V'.$$

28. Par ces valeurs de P', Q', R', V', & par les valeurs de X & de Y trouvées ci-dessus, on calculera la valeur algébrique des aires $\int XP'\,dz \text{ sin. } z$, $\int XQ'\,dz \text{ cos. } z$, $\int R'Y\,dz$, $\int YP'\,dz\,(1 - \text{cos. } z)$, $\int Y\,Q'\,dz \text{ sin. } z$, $\int YV'\,dz$, en supposant ces aires $= 0$, lorsque $z = 0$. Ces aires se trouveront toujours, ou par des intégrales éxactes, ou par des arcs de cercle, ou par des Logarith-

mes; il faudra avoir recours pour cela aux formules du §. XXXIII, en substituant, selon qu'il paroîtra plus commode, dans les différentielles à intégrer, ou $\frac{2a}{1 + \text{cos. } z}$ au lieu de x, ou $\frac{2a}{x} - 1$ au lieu de cos. z.

29. Ensuite on supposera que lorsque $z = 90°$, on ait

$$\int XP' \, dz \, \text{sin. } z = F'$$

$$\int XQ' \, dz \, \text{cos. } z = G'$$

$$\int R' Y \, dz = H'$$

$$\int YP' \, dz \, (1 - \text{cos. } z) = K'$$

$$\int YQ' \, dz \, \text{sin. } z = L'$$

$$\int YV' \, dz = M',$$

Et on mettra à part chacune de ces quantités, pour en faire usage en tems & lieu.

30. On se souviendra que pour Jupiter $\frac{J}{S} = \frac{1}{1067}$, & pour Saturne $\frac{J}{S} = \frac{1}{3021}$; & on fera le calcul de toutes les quantités susdites pour l'action de chacune des deux Planètes séparément; mais pour abréger ce calcul le plus qu'il sera possible, on aura soin; 1°. de mettre à part les fractions $\frac{J}{S}$ qui doivent multiplier tous les termes dans chacun de ces calculs.

2°. Quand on aura trouvé l'expression algébrique en x de chacune de ces quantités, de faire dans chacune $x = 2a$, pour avoir les valeurs arithmétiques répondantes à $z = 90°$.

3°. De mettre à part les valeurs des conſtantes, comme $\frac{4\,a^4}{\xi'^3}$, $\frac{3\,\xi^2 \text{ coſ. } 2\,A}{\xi'^5}$, $\frac{3\,\xi^2 \text{ ſin. } 2\,A}{\xi'^5}$ &c. qui multiplient chacune de ces quantités, afin de ne pas les calculer deux fois.

31. Depuis le point K où $z = 90°$. juſqu'au point C où $SC =$ la diſtance moyenne de Jupiter, il faut faire un autre calcul.

Soit Δ cette diſtance moyenne, & on aura l'angle ASC que j'appelle ω, par l'équation ſuivante;

$$\text{Coſ. } \omega = \frac{\theta}{\Delta} - \rho.$$

32. Ainſi depuis le point où $z = 90°$, juſqu'à celui où $z = \omega$, on calculera d'abord,

Les poſitions de la Planète pour chaque tems t; ce qui donnera les ξ & les ζ, c'eſt-à-dire, les diſtances de la Planète au Soleil, rapportées ſur l'orbite de la Comète, & les diſtances des lieux de la Planète à ceux de la Comète, auſſi rapportées ſur l'orbite de la Comète; ces diſtances ou élongations ſe compteront toujours de la Planète à la Comète, en ſuivant le ſens ſelon lequel la Comète ſe meut.

On aura auſſi les diſtances réelles de la Planète au Soleil; qu'on nommera ξ'.

33. Enfin on connoîtra les diſtances réelles de la Planète à la Comète, que l'on nommera k.

On cherchera enſuite de degré en degré les quantités

$$X' = -\frac{J.\,x^2\,a^2\,\xi \text{ coſ. } \zeta}{S.\,p.\,\xi'^3} - \frac{J.\,x^3\,a^2}{S.\,p.\,k^3} + \frac{J\,x^2\,a^2\,\xi \text{ coſ. } \zeta}{S.\,p.\,k^3}$$

$$-\frac{J\xi \text{ fin. } \zeta}{S.\xi'^3} \times \frac{x^3\, a\, a \text{ fin. } z}{p.\theta} + \frac{J\xi \text{ fin. } \zeta}{S.k^3} \times \frac{x^3\, a\, a \text{ fin. } z}{p.\theta};$$

Et $Y' = \frac{J\xi \text{ fin. } \zeta . x^3}{S.\xi'^3.p} - \frac{J.\xi \text{ fin. } \zeta . x^3}{S.k^3\, p}$.

34. Dans ce calcul on aura encore foin, comme dans les précédens; 1°. de mettre à part la quantité $\frac{J}{S}$ pour chaque Planète perturbatrice, ou les fractions $\frac{1}{1067}$ & $\frac{1}{3021}$; 2°. de mettre auffi à part les quantités conftantes $\frac{a^2}{p}$, & $\frac{a^2}{p.\theta}$, ou leurs Logarithmes, afin de ne pas les calculer plufieurs fois; & de ne les multiplier par les variables, ou plutôt de ne leur donner leur valeur arithmétique, qu'à la fin de l'opération dont on parlera dans les n°. 35. & 36. qui fuivent.

35. Ces précautions prifes, on cherchera par les quadratures, fuivant les méthodes connues des Géometres, & expliquées ci-deffus §. XXXV, les valeurs de $\int X'\, d\,z$ fin. z depuis le point où $z = 90°$. jufqu'à celui où $z = \omega$. On cherchera de même les valeurs de $\int X'\, d\,z$ cof. z, de $\int Y'\, d\,z$, de $\int Y'\, d\,z\, (1 - \text{cof. } z)$, & de $\int Y'\, d\,z$ fin. z; on obfervera que ces valeurs foient $= 0$ lorfque $z = 90°$.

36. Soit donc lorfque $z = \omega$,

$\int X'\, d\,z$ fin. $z = A''$.

$\int X'\, d\,z$ cof. $z = B''$.

$\int Y'\, d\,z = C''$.

$\int Y' dz (1 - \text{cof.}\, z) = D''$.

$\int Y' dz\, \text{fin.}\, z = E''$.

37. On prendra enfuite les angles α, déja calculés n°. 10. & qui font tels que

$$\text{Cof.}\ \alpha = \frac{\delta - x}{\delta - a},$$

Et on fera depuis K jufqu'en C,

$$P'' = -\frac{\overline{\delta - a}^2 . \delta}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}} \alpha + \frac{\overline{\delta - a}^3 . \text{fin.}\, \alpha}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\delta^2 . \overline{\delta - a}^3}{(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}} \times$$

$$\text{fin.}\, \alpha + \frac{\delta . \overline{\delta - a}^4}{4(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}} \text{fin.}\, 2\alpha + \frac{(3\delta\delta - 2a\delta + aa)(\delta - a)^2 \delta\alpha}{2(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}};$$

$$Q'' = -\frac{\overline{\delta - a}^2}{2(2\delta - a)^2} + \frac{\overline{\delta - a}^2 . x^2}{2.(2a\delta - aa)^2}.$$

$$R'' = -\frac{\delta . \overline{\delta - a}^2}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}} \alpha + \frac{\delta . \overline{\delta - a}^3\, \text{fin.}\, \alpha}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{2\delta - a}{\delta - a} \left(-\frac{2\delta . \overline{\delta - a}^4}{(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}} \text{fin.}\, \alpha + \right.$$

$$\left. \frac{\overline{\delta - a}^5\, \text{fin.}\, 2\alpha}{4.(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\overline{3\delta\delta - 2a\delta - aa} . \overline{\delta - a}^3}{2.(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}} \alpha \right).$$

$$\text{Enfin}\ V'' = -\frac{\delta . \overline{\delta - a}^2}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}} \alpha + \frac{\overline{\delta - a}^3\, \text{fin.}\, \alpha}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}}.$$

38. Par ces valeurs de P'', Q'', R'', V'', & par les valeurs trouvées n°. 33 pour X' & pour Y', on cherchera, fuivant les méthodes expliquées §. XXXV, les quadra-

tures des aires $\int P'' X' dz \sin. z$, $\int Q'' X' dz \cos. z$, $\int R'' Y' dz$, $\int Y' P'' (1-\cos. z) dz$, $\int Y' Q'' dz \sin. z$, $\int Y' V'' dz$, en supposant ces aires $=0$ lorsque $z=90°$. Et dans ce calcul on usera des mêmes attentions que dans le n°. 34, pour le rendre le moins long que faire se pourra.

39. On fera ensuite lorsque $z=\omega$,

$\int X' P'' dz \sin. z = F''$.

$\int X' Q'' dz \cos. z = G''$.

$\int R'' Y dz = H''$.

$\int Y' P'' (1-\cos. z) dz = K''$.

$\int Y' Q'' dz \sin. z = L''$.

$\int Y' V'' dz = M''$.

Et on mettra ces quantités chacune à part.

40. Depuis le point C où $x=\Delta$, jusqu'au point E où $x=2000000$, il faut faire un autre calcul.

On commencera par chercher l'angle ω' ou ASE, tel que l'on ait

$$\text{Cos. } \omega' = \frac{\theta}{2000000} - \rho.$$

Et depuis $z=\omega$ (trouvé ci-dessus n°. 31.) jusqu'à $z=\omega'$, on prendra (§. XVI, XVII & XVIII).

$$\varphi = -\frac{2J.\xi \cos. \zeta}{x^3} + \frac{J.x - \xi \cos. \zeta}{k^3}.$$

$$\pi = +\frac{J.\xi \sin. \zeta}{x^3} - \frac{J.\xi \sin. \zeta}{k^3},$$

ou plutôt

$$X'' = +\frac{2J.a^2 \xi \cos. \zeta}{S\,p\,x} - \frac{Jx^3 . a^2}{S.pk^3} + \frac{Jx^2 a^2 \xi \cos. \zeta}{S.pk^3}$$

$$-\frac{J\xi \text{ fin. } \zeta}{S} \times \frac{a\,a \text{ fin. } z}{p\,.\,\theta} + \frac{J\xi \text{ fin. } \zeta\,.\,x^3\;a\,a \text{ fin. } z}{S p \theta k^3};$$

Et $Y'' = \frac{J\,.\,\xi \text{ fin. } \zeta}{S p} - \frac{J\xi \text{ fin. } \zeta\,.\,x^3}{S\,.\,p\,k^3}$.

41. De-là on tirera par les quadratures les valeurs de $\int X'' d z$ fin. z, $\int X'' d z$ cof. z, $\int Y'' d z$; $\int Y'' d z$ $(1 - \text{cof. } z)$, $\int Y'' d z$ fin. z, depuis le point C jufqu'au point E, c'eft-à-dire, depuis $z = \omega$ jufqu'à $z = \omega'$; ayant foin par conféquent que ces aires foient $= o$ lorfque $z = \omega$.

42. Soit donc lorfque $z = \omega'$,

$\int X'' d z$ fin. $z = A'''$.

$\int X'' d z$ cof. $z = B'''$.

$\int Y'' d z = C'''$.

$\int Y'' d z (1 - \text{cof. } z) = D'''$.

$\int Y'' d z$ fin. $z = E'''$. On mettra à part ces quantités.

43. On prendra enfuite les angles α déja calculés n°. 10, & qui font tels que

Cof. $\alpha = \frac{\delta - x}{\delta - a}$,

Et on cherchera depuis C jufqu'en E, c'eft-à-dire, depuis $z = \omega$, jufqu'à $z = \omega'$, les valeurs correfpondantes de P'', Q'', R'', V'', qui feront exprimées par les mêmes formules que dans le n°. 37. Continuant enfuite l'opération comme dans l'art. 38, on cherchera les aires $\int X'' P''$ $d z$ fin. z, &c. enforte qu'elles foient $= o$ lorfque $z = \omega$.

44. On fera enfuite lorfque $z = \omega'$,

$\int X'' P'' d z$ fin. $z = F'''$.

$\int X'' Q'' d z$ cof. $z = G'''$.

$\int R'' Y'' d z = H'''$

$\int R'' Y'' dz = H'''$.

$\int Y'' P'' (1 - \text{cos.}\, z) dz = K'''$.

$\int Y'' Q'' dz \text{ sin.}\, z = L'''$.

$\int Y'' V'' dz = M'''$.

Et on mettra ces quantités à part.

45. Depuis le point E, où $x = 2000000$, jusqu'au point e correspondant, c'est-à-dire, depuis $z = \omega'$ jusqu'à $z = 360 - \omega'$, il faut faire un nouveau calcul.

On prendra

$\varphi = + \frac{J}{x^2}$.

$\pi = o$,

ou plutôt

$X^{IV} = - \frac{J a a}{S \cdot p}$.

$Y^{IV} = o$,

& on calculera l'aire $\int - \frac{J a a}{S \cdot p} dz \text{ sin.}\, z = \frac{= J a a}{S \cdot p}$ $(\text{cos.}\, \omega' - \text{cos.}\, 360 - \omega') = o$, que j'appelle A^{IV};

Et l'aire $\int - \frac{J a a}{S \cdot p} dz \text{ cos.}\, z = + \frac{J a a}{S \cdot p} (2 \text{ sin.}\, \omega')$, que j'appelle B^{IV}.

46. Dans la valeur générale de P'' trouvée n° 37, on prendra la valeur qui répond à $z = 360 - \omega'$, & on l'appellera P^{IV}; de même on prendra dans la valeur générale de Q, celle qui répond à $z = 360 - \omega'$, & on la nommera Q^{IV}.

On fera ensuite (§. XIX. n°. 14.) $+ \frac{J a a P^{IV}}{S \cdot p}$ $(\text{cos.}\, \omega' - \text{cos.}\, 360 - \omega') = - A^{IV} P^{IV} = o$;

& $-\frac{JaaQ^{IV}}{S.p}$. 2 sin. $\omega' = -Q^{IV}B^{IV}$, que j'appelle O'.

On cherchera (§. XXXIII.) l'aire $+\frac{Jaa}{p}\times$ $\int\frac{dz\,(\text{cos}.\,\omega' - \text{cos}.\,z)\,\text{cos}.\,z}{(\varrho + \text{cos}.\,z)^3}$ en supposant cette aire $= o$ lorsque $z = \omega'$.

Et l'aire $+\frac{Jaa}{p}\times\int\frac{dz\,(\text{sin}.\,\omega' - \text{sin}.\,z)\,\text{sin}.\,z}{(\varrho + \text{cos}.\,z)^3}$, en supposant de même cette aire $= o$ lorsque $z = \omega'$.

On supposera la premiere de ces aires $= T'$ lorsque $z = 360 - \omega'$, & la seconde $= Z'$ dans le même cas; & on mettra à part les quantités O', T', Z'.

47. Depuis le point *e* jusqu'au point *c*, on fera les mêmes opérations que depuis le point *C* jusqu'au point *E*; depuis le point *c* jusqu'au point *k*, les mêmes que depuis le point *K* jusqu'au point *C*; depuis le point *k* jusqu'au point *A*, on supposera la Planète perturbatrice en repos au milieu de l'espace qu'elle parcourt pendant ce tems-là; & du reste on fera les mêmes opérations que depuis *A* jusqu'en *K*.

48. On se souviendra seulement que depuis *k* jusqu'en *A*, comme z est $> 180°$. & $< 360°$, il faudra dans les valeurs de P', R', V', qui seront alors de la même espéce que celles du n°. 27, avoir l'attention (§. XXXIII. n°. 27.) de prendre le radical négatif, & d'ajouter à l'intégrale une constante convenable en supposant $x = 2a$; ou, ce qui est encore plus commode, on supposera $\frac{x}{a} - 1 = \frac{x\,\text{sin}.\,z}{2a}$; & au lieu de $\sqrt{\frac{x}{a} - 1}$, on

écrira $\frac{x \sin. z}{2a}$ &c. A quoi on ajoutera ce que deviennent les valeurs de P'', Q'', R'', V'', trouvées n°. 37. lorsque $z = 270°$. Soient ϖ'', q'', ρ'', ν'', ces dernieres valeurs, trouvées précédemment dans le calcul qu'on a fait pour la partie ck; & on aura depuis k jusqu'en A;

$$P'' = \varpi'' - \frac{x \sin. z}{4 . 2a} - \frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{x \sin. z}{2a}\right)^5}{20} + \frac{1}{20}.$$

$$Q'' = + q'' + \left(\frac{x^2}{8aa} - \frac{1}{2}\right).$$

$$R'' = \rho'' + \frac{\left(\frac{x \sin. z}{2a}\right)^3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{\left(\frac{x \sin. z}{2a}\right)^5}{10} + \frac{1}{10}.$$

$$V'' = \nu'' - \frac{\left(\frac{x \sin. z}{2a}\right)^3}{6} - \frac{1}{6} - \frac{x \sin. z}{2 . 2a} - \frac{1}{2}.$$

Et dans ces différentes valeurs on substituera au lieu de x sa valeur $\frac{2a}{1 + \text{cos}. z}$, ou au lieu de sin. z sa valeur $-\frac{2\sqrt{ax - aa}}{x}$, selon qu'on le jugera plus commode. Au reste dans toutes les opérations qui se font depuis e jusqu'en A, on se souviendra de prendre les angles z & α, à compter depuis le commencement A de la révolution; & on nommera A^{v}, A^{vi}, A^{vii} les quantités qui répondent aux A''', A'', A', des trois premieres opérations; B^{v}, B^{vi}, B^{vii}, celles qui répondront aux B''', B'', B', &c. & ainsi de suite.

49. Pour la seconde révolution jusqu'au point e, on fera les mêmes opérations que pour la premiere, en

partant toujours du point A de la premiere révolution; pour compter les z & les α, ainsi que les angles ω, ω' &c. qui seront alors de 360 degrés plus grands que dans la premiere révolution; on aura par ce moyen de nouvelles quantités A^{VIII}, A^{IX}, A^{X}, A^{XI}, & B^{VIII}, B^{IX} &c. qui répondront aux A', A'', A''' &c. & B', B'', B''' &c. de la premiere révolution.

50. Cela fait, on ajoutera d'abord ensemble toutes les valeurs de A', A'', A''' &c. trouvées à chaque opération, & on nommera leur somme a'.

On aura de même les quantités b', c', d', e', f', g' &c. en ajoutant ensemble les valeurs de B', B'', B''' &c. & celles de C', C'' &c.

51. Ensuite on nommera p' ce que devient P'' (n°. 37.) lorsque $z = 360 + 360 - \omega'$.

q' ce que devient Q'' dans le même cas,

r' ce que devient R'' dans le même cas,

u' ce que devient V'' dans le même cas,

O'', T'', Z'', les quantités qui sont analogues dans la seconde révolution aux quantités O', T', Z' de la premiere, déja calculées n°. 46; celles-ci commençoient à l'angle $z = + \omega'$, & finissoient à l'angle $z = 360 - \omega'$. Celles-là commenceront à l'angle $z = 360 + \omega'$, & finiront à l'angle $z = 2 \cdot 360 - \omega'$.

Cela fait, on calculera la quantité $\frac{2 . m . \overline{2 a \delta - a a}^{\frac{5}{2}}}{a a \delta . 6,283185 . \overline{\delta - a}^{3}}$ $\times [p' a' - \frac{2 a a p' d'}{p} + q' b' - \frac{2 a a q' e'}{p} +$

$\frac{2aar'c'}{p} - f' - g' - \frac{2aah'}{p} + \frac{2aak'}{p} +$
$\frac{2aal'}{p} + O' + T' + Z' + O'' + T'' + Z''] +$
$\frac{m.(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}}{\delta.6,283185(\delta - a)^2}[u'c' - m'];$

dans laquelle le coëfficient $\frac{2m.\overline{2a\delta - aa}^{\frac{5}{2}}}{aa\delta.6,283185.\overline{\delta - a}^{3}}$ représente $\frac{m\sqrt{S + \mathcal{C}}}{\delta^{\frac{3}{2}}.6,283185} \times \frac{2}{a^3 g} \times \frac{\overline{2a\delta - aa}^{3}}{(\delta - a)^3}$, ou $\frac{2.\overline{2a\delta - aa}^{3}}{(\delta - a)^3 a^3 g} \times \frac{m\sqrt{S}}{\delta^{\frac{3}{2}}.6,283185}$; & le coëfficient $\frac{m.\overline{2a\delta - aa}^{\frac{3}{2}}}{\delta.6,283185.\overline{\delta - a}^{2}}$ représente $\frac{\overline{2a\delta - aa}^{2}}{(\delta - a)^2.ag} \times \frac{m\sqrt{S}}{\delta.6,283185.\overline{\delta - a}^{2}}$.

52. J'appelle, ſuivant le §. XX. n°. 4, cette quantité $\mathcal{C}$;

Et je nomme α la valeur de la même quantité, lorſque $z = 360°$. Cette valeur de α ſera facile à trouver; car il n'y a qu'à, dans la formule précédente, prendre les valeurs de p', a', q', b', &c. lorſque $z = 360°$.

Ces opérations finies, le plus long & le plus difficile eſt fait, il ne reſte plus que les ſuivantes.

53. On cherchera lorſque la Comète eſt en C, à la diſtance moyenne de Jupiter, la poſition $C\gamma$ (*fig.* 18.) & la viteſſe du Satellite γ. Pour cela on commencera par prendre $C\gamma = \frac{J.\xi}{S}$, ξ étant la diſtance accourcie de la

Planète au Soleil, calculée pour le moment qui répond au lieu C de la Comète.

54. On connoîtra pour ce même moment l'angle ζ; & par conséquent la position de $C\gamma$, & l'on aura $S\gamma = SC - C\gamma \operatorname{cof.} \zeta = SC - \frac{J \cdot \xi \operatorname{cof.} \zeta}{S}$; je mets $-$, parce que, suivant la construction de la figure, ζ est ici plus grand que 90 degrés.

55. On connoîtra de plus, par le §. XXV. n°. 9, la position de la tangente en C, c'est-à-dire, la direction de la Comète en C, ou l'angle SCL; & par conséquent menant γN parallèle à cette tangente, on aura l'angle $S\gamma N = SCL + CS\gamma = SCL + \frac{J \cdot \xi \operatorname{fin.} \zeta}{S \cdot SC}$.

56. On connoîtra encore par le §. XXV. n°. 11. la vitesse g en C, laquelle sera telle que $gg = S\left(\frac{p}{aa} + \frac{2}{\Delta} - \frac{2}{a}\right)$.

57. On connoîtra de même (§. XXXIV.) la vitesse du Satellite en γ autour de C, & sa direction; c'est-à-dire, l'angle $O\gamma C$, que cette direction fait avec $C\gamma$.

58. Donc puisqu'on connoît l'angle de γC avec γN ou γn, on connoîtra l'angle $O\gamma N$, dont on nommera le cosinus ν, & le sinus ϖ; ainsi supposant la vitesse suivant $\gamma O = \sqrt{S \cdot n}$ (n est un nombre connu par le n°. 57.) on trouvera la direction du Satellite $\gamma N'$ en ajoutant à l'angle $S\gamma N$ l'angle $N'\gamma N = \frac{\varpi\sqrt{S \cdot n}}{g}$; & sa

vitesse g', en retranchant de g la quantité $\nu\sqrt{S.n}$; ce qui donnera $g'g' = gg - 2g\nu\sqrt{Sn} = S\left(\frac{p}{aa} + \frac{2}{\Delta} - \frac{2}{a} - 2\sqrt{n}.\sqrt{\frac{p}{aa} + \frac{2}{\Delta} - \frac{2}{a}}\right)$.

Il faut bien remarquer que si la ligne γO étoit autrement dirigée qu'on ne le suppose dans cette figure, on devroit alors ajouter dans certains cas, ce qu'on retranche ici, & retrancher ce qu'on ajoute. Un Calculateur tant soit peu exercé, verra facilement ce qu'il doit faire, suivant la position respective des lignes; les opérations que nous prescrivons ici, sont relatives à la figure que nous avons faite. Connoissant $S\gamma$ & la vitesse absolue en γ, on aura l'ellipse $\gamma o \gamma'$ (*fig.* 14.) décrite par le Satellite γ autour du Soleil.

59. Pour trouver le rayon $S\gamma'$ qui doit terminer (§. XX. n°. 8.) la partie elliptique $\gamma O \gamma'$ (*fig.* 14.) de l'orbite du Satellite, on fera attention que l'on a par le n°. 6. du §. XX. la position & la grandeur de $S\lambda$, & la position de SC', qui est semblable à celle de SC; & que l'angle $C'S\gamma' = S\gamma'\lambda =$ à-très-peu-près $\frac{\sin.\lambda SC' \times S\lambda}{SC}$; d'où l'on tirera la position de $S\gamma'$.

60. Les points γ & γ' étant ainsi déterminés, on aura le tems par $\gamma O \gamma'$ par le §. XXVII. n°. 8; & on connoîtra de plus (§. XXVI. n°. 6.) la vitesse g'' en γ'.

61. On repassera ensuite de l'ellipse du Satellite à celle de la Comète, comme on a passé tout à-l'heure de l'orbite de la Comète à celle du Satellite; & dans cette

feconde opération on fuivra éxactement le procédé indiqué au §. XX. n°. 8. 9.

62. On continuera de la forte à fuivre les opérations indiquées dans le §. XX. n°. 10, 11, jufqu'à ce qu'on foit arrivé au point Γ (*fig.* 15.) ou $S\Gamma$ = vingt fois le rayon du grand orbe, c'eft-à-dire, ou $S\Gamma = 2000000$.

63. Là on connoîtra (§. XX. n°. 16.) la pofition $\Gamma C'''$ du Satellite; & fa viteffe autour de C''' (§. XXXIV).

64. Cette pofition & cette viteffe connues, on continuera le calcul, fuivant le procédé expliqué au §. XX. n°. 17, 18 & fuivans; & on obfervera, en finiffant la feconde révolution, de calculer les perturbations dans la partie ec (*fig.* 17.), comme on l'a fait dans la partie CE; dans la partie ck, comme dans la partie KC; & dans la partie kA, comme dans la partie AK, en obfervant de prendre les angles z & α, toujours du point A de la premiere révolution. Cette opération fournira de nouvelles quantités A^{xii}, A^{xiii} &c. B^{xii}, B^{xiii} &c. C^{xii}, C^{xiii} &c. répondantes aux quantités A^{v}, A^{vi}, &c. B^{v}, B^{vi}, &c. de la premiere révolution.

65. Reprenant donc la grande formule du n°. 51, & mettant dans cette formule pour a', p', b', c' &c. ce que deviennent ces quantités, non plus lorfque $z = 2 \times 360 - \omega'$, comme dans ce n°. 51, mais lorfque $z = 2 . 360$, on aura l'altération totale des deux révolutions, ou plutôt la partie de cette altération qu'on a nommée $6 + \vartheta''$ dans le §. XX. n°. 19. Après quoi on achevera le calcul fuivant le procédé prefcrit dans ce §. X X; & on aura la

la différence cherchée de deux révolutions successives.

XXXVII.

Dans les détails de cette opération, on peut employer plusieurs abrégés de calcul dont je n'ai pas parlé, & qui se présenteront aisément à ceux qui mettront la main à l'œuvre.

1. Par exemple, quand on a trouvé p', q', r' &c. (§. préc. n. 51.) pour le cas de $z = 360°$, il sera facile de les trouver pour le cas de $z = 2 . 360$; puisque p' aura une valeur double, ainsi que r' & u', & que q' aura la même valeur dans les deux cas. On peut même observer (ce qui abrege le calcul) que cette valeur de q' sera $= 0$.

2. Dans les quantités a', b', c^{v} &c. & semblables, il faut distinguer trois parties : celle qui répond à $z = 360°$; celle qui répond à $z = 2 \times 360 - \omega'$; & celle qui répond à $z = 2 \times 360$; la seconde est composée de la premiere, & de plus de la somme des quantités A^{VIII}, A^{IX}, &c. ou B^{VIII}, B^{IX}, &c. depuis $z = 360°$, jusqu'à $z = 2 . 360 - \omega'$; la troisiéme est composée de la somme de celles-ci, & de la somme des A^{XII}, A^{XIII}, &c. ou B^{XII}, B^{XIII} &c. depuis $z = 2 . 360 - \omega'$, jusqu'à $z = 2 . 360$.

3. Ainsi quand on sera arrivé à $z = 360°$, on commencera par ajouter ensemble les quantités A', A'', A''' &c. déja trouvées, & mettre à part la somme qui en viendra ; il faudra ensuite ajouter ensemble les quantités

analogues qu'on aura depuis $z = 360°$. jusqu'à $z = 2 . 360 - \omega'$, & mettre à part la somme qui en viendra ; laquelle ajoutée à la premiere somme, donnera la valeur de α' quand $z = 2 . 360 - \omega'$. Enfin il faudra ajouter ensemble les quantités analogues qu'on aura depuis $z = 2 . 360 - \omega'$, jusqu'à $z = 2 . 360$; & ajouter cette somme aux deux précédentes, pour avoir la valeur de α' qui répond à $z = 2 . 360$. On fera la même chose pour les quantités b', c', e', &c.

4. Il faut de plus remarquer que les quantités α & Є, trouvées art. XXXVI. n°. 52. doivent contenir non-seulement l'altération qui vient de l'action de Jupiter, mais aussi celle qui vient de l'action de Saturne ; autrement on n'auroit pas assez éxactement dans le n°. 53. la position du rayon $C''' \Gamma$ (*fig.* 15.). Il faudra seulement avoir soin de séparer dans chacune de ces quantités α & Є, ce qui vient de Jupiter, d'avec ce qui vient de Saturne, afin de voir plus nettement le résultat de l'action de chacun, & de mieux distinguer toutes les différentes parties de l'opération.

5. Pour rendre les quantités P'', Q'', R'', V'' (§. préc. n. 37.) plus aisées à calculer, & plus petites, il seroit bon ; 1°. de les diviser par 6, 283185, qui exprime la circonférence en parties du rayon, auquel cas on supprimeroit ce diviseur de la formule du §. XXXVI. n°. 51 ; 2°. de dresser des tables des variables qui entrent dans les quantités P'', R'', V'', savoir des quantités $\frac{\alpha}{6,283185}$, $\frac{\text{sin.}\, \alpha}{6,283185}$,

& $\frac{\text{sin. } 2\,a}{6,283185}$, ou, ce qui revient au même, des fractions qui expriment de degré en degré le rapport des angles, de leurs sinus, & du sinus des angles doubles, à 360°.

3°. A l'égard des opérations qui se font pour calculer l'action des Planètes depuis *A* jusqu'en *K* (*fig.* 17.), & depuis *k* jusqu'en *A*, ces opérations peuvent se trouver faites dans des tables toutes calculées, qui serviront pour un grand nombre de Comètes, & qui donneront les résultats pour le cas de $\frac{x}{a} - 1 = 1$, ou $x = 2\,a$.

4°. Enfin on calculera toutes les constantes qui doivent multiplier les différentes variables, & on écrira ces différentes constantes sur des papiers séparés avec leur valeur algébrique & arithmétique, afin de les mieux reconnoître. Toutes ces opérations mettront plus de netteté & de promptitude dans les calculs.

6. Quelques personnes m'objecteront peut-être que j'aurois pû encore abréger l'opération, & en général la méthode du §. XX, en prenant, non les deux révolutions entieres avec les altérations, mais seulement les altérations. Cette objection tomberoit uniquement sur le calcul que nous avons fait des différentes portions elliptiques de l'orbite de la Comète, & de celle du Satellite; car au lieu de calculer le tems employé à décrire ces portions d'orbites elliptiques, on auroit pû se contenter de calculer les différences des tems entre ces portions d'orbites, & les portions correspondantes de l'ellipse primitive de la Comète,

7. Pour ſavoir ſi nous avons bien ou mal fait, la queſtion ſe réduit donc à celle-ci. Un mobile décrivant une ellipſe, ſuppoſons que la valeur & la direction de ſa viteſſe, & la valeur de ſon rayon vecteur, changent ſubitement en un point quelconque d'une très-petite quantité; eſt-il plus court de calculer immédiatement le tems dans la nouvelle ellipſe, & de le retrancher enſuite du tems dans la portion correſpondante de l'ellipſe primitive, que de calculer ſimplement les différences des deux tems? Or je crois la premiere de ces opérations plus courte que la ſeconde. Pour le faire ſentir par un exemple, je ſuppoſe qu'on cherche la poſition du nouveau périhélie par la formule $\frac{\epsilon' a'}{a' - \frac{S+C}{g'^2 h'^2}}$ du n°. 3. de l'art. XXVI; & je dis qu'on aura auſſi-tôt fait, & même plutôt fait, de chercher immédiatement la poſition du nouveau périhélie par cette formule, que de chercher le ſimple déplacement du périhélie par la formule

$$\frac{\epsilon\, da + a\, d\epsilon}{a - \frac{S+C}{g^2 h^2}} - \frac{\epsilon\, a\, da}{\left(a - \frac{S+C}{g^2 h^2}\right)^2} + \frac{(S+C)\,\epsilon\, a}{\left(a - \frac{S+C}{g^2 h^2}\right)^2} \times \left(\frac{-g\, dg . h^2 - h\, dh . gg}{g^4 h^4}\right)$$

qui me paroît demander un plus grand nombre de quantités à calculer. Il en ſera de même des autres cas ſemblables. Voilà les raiſons qui m'ont engagé à chercher immédiatement la valeur des deux révolutions totales, ſans me borner à la ſeule différence de ces révolutions, à laquelle j'aurois pû me reſtraindre.

8. Au reste, soit qu'on calcule simplement les altérations, soit qu'on calcule les deux révolutions entieres, il n'en est pas moins vrai que la seule chose qu'on cherche ici réellement, & qu'on détermine par le calcul, c'est la différence des deux révolutions; l'erreur, s'il y en a, ne peut tomber que sur cette différence, parce que le reste du calcul est fondé sur la supposition qu'on a faite d'une certaine ellipse *donnée* pour l'ellipse primitive de la Comète, & que les erreurs ne peuvent par conséquent tomber sur la partie du calcul qui appartient uniquement à la révolution dans l'ellipse primitive; c'est ce qui sera parfaitement éclairci dans le Mém. suivant.

XXXVIII.

La méthode que nous avons donnée pour calculer les altérations de l'orbite des Comètes, a évidemment plusieurs avantages.

1°. Dans toute la partie KAk, elle n'exige que des calculs arithmétiques fort simples, & d'après des formules algébriques qui ne demandent point de quadratures méchaniques; formules dont on peut représenter les résultats dans des tables toutes dressées, & qui peuvent servir pour un grand nombre de Comètes.

2°. Dans les parties CE, & ec, la simplification des valeurs de φ & de π, épargne beaucoup de calculs. (§. XVI n. 3.)

3°. Dans la partie EDe, on n'a pas besoin de calculer les forces φ & π; on fait seulement $\varphi = \frac{A}{x^2}$, ce

qui réduit à presque rien le calcul des altérations dans cette partie $E D e$.

4°. Non-seulement nous avons divisé l'orbite de la Comète en plusieurs parties pour faciliter le calcul; mais dans chacune de ces parties, le calcul se fait de la même maniere, & les angles d'anomalie z sont toujours pris à compter du périhélie A de la premiere révolution. Cette uniformité dans la marche du calcul, le rend tout-à-la-fois plus court & moins sujet à erreur; parce qu'on a moins d'attention à faire au sens suivant lequel on prend les angles d'anomalie, & qu'on n'est point obligé de calculer séparément dans chaque portion de l'orbite, l'altération qu'elle éprouve par la portion précédente.

5°. On n'a jamais à calculer que des aires totales, telles que $\int X dz \cos. z$, $\int P X dz \cos. z$ &c. & il n'entre dans ces aires que des quantités P, X, Y &c. qui n'exigent aucune quadrature.

XXXIX.

1. Si on a quelque scrupule sur la méthode que nous avons employée pour trouver l'altération dans la partie $K A k$ (*fig.* 17.), ce ne peut guères être que par rapport à l'action de Jupiter; car l'action de Saturne étant environ trois fois moindre à la même distance, & la distance de Saturne au Soleil étant plus de vingt fois plus grande en A que celle de la Comète, & plus de dix fois en K; je n'imagine pas qu'il puisse en résulter d'erreur sensible, ou au moins considérable sur l'altération causée par Saturne.

2. A l'égard de Jupiter, comme sa distance en *A* n'est qu'environ neuf à dix fois plus grande que celle de la Comète, & en *K* cinq à six fois seulement; on pourroit, si l'on craignoit l'effet de l'erreur qui en pourroit résulter, n'employer la méthode du §. XXII. pour Jupiter que jusqu'au point *O* où $\frac{x}{a} - 1 = \frac{4}{9}$ (je prends la fraction $\frac{4}{9}$ qui est un nombre quarré, afin que les quantités $\overline{\frac{x}{a} - 1}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{\frac{x}{a} - 1}^{\frac{3}{2}}$, $\overline{\frac{x}{a} - 1}^{\frac{5}{2}}$ &c. soient plus faciles à trouver); & on aura $x = \frac{13\,a}{9}$; & cos. z, ou $\frac{2\,a}{x} - 1 = \frac{18}{13} - 1 = \frac{5}{13}$. Ainsi on feroit depuis le point *A* jusqu'en *O* le même calcul qu'on a fait dans le §. XXXVI. depuis *A* jusqu'en *K*; & depuis *O* jusqu'en *C* le même qui a été fait depuis *K* jusqu'en *C*.

3. Cependant, comme le tems par *AK* ou *kA* est de moins de 40 jours, & que pendant ce tems l'effet de l'action des deux Planètes doit être comme infiniment petit, j'imagine qu'on pourra, sans erreur, employer la méthode du §. XXII. même pour Jupiter, sans avoir à craindre l'effet des négligences.

4. Enfin ceux qui craindroient encore, malgré les réfléxions qu'on vient de lire, l'effet des négligences dans la partie *AK* pour l'action de Jupiter, pourroient calculer cette action rigoureusement depuis *A* jusqu'en *C*, comme on l'a calculée dans le §. XXXVI. depuis *K* jus-

qu'en *C*, & précisément par la même méthode. Mais, comme le calcul seroit alors considérablement plus long, je voudrois qu'on ne l'essayât qu'après s'être assuré que les deux suppositions de $x = 2a$, & $x = \frac{13a}{9}$ pour Jupiter, donnent des résultats assez différens depuis *A* jusqu'en *C*, pour produire une différence assez grande sur le dernier résultat, c'est-à-dire, sur l'accélération ou la rétardation de la seconde période par rapport à la premiere.

XL.

1. Un autre scrupule qu'on peut avoir, c'est sur les forces négligées dans la partie supérieure de l'orbite. Car dans la force φ, la quantité négligée, en prenant ξ' pour la distance réelle de la Planète au Soleil, & ζ' pour l'angle d'élongation réel de la Planète à la Comète, est $-\frac{3J.\xi'^2}{2x^4} + \frac{9J.\xi'^2 \operatorname{cos}.\zeta'^2}{2x^4}$: or cette quantité étant toujours positive, on pourroit craindre peut-être que l'effet n'en fût assez grand pour n'être pas négligé.

2. Pour examiner cette difficulté, nous remarquerons d'abord que cette quantité négligée se change en $\frac{J\xi'^2}{x^4} \times (-\frac{3}{4} + \frac{9}{4} \operatorname{cos}. 2\zeta')$ dans laquelle il n'y a réellement de constamment positive, que la partie $\frac{3J.\xi'^2}{4x^4}$, l'autre étant tantôt positive & tantôt négative, & changeant même fréquemment de signe dans la partie supérieure de

de l'orbite, parce qu'il répond plusieurs révolutions de chacune des deux Planètes perturbatrices, au mouvement de la Comète dans cette partie supérieure de son orbite. On peut donc négliger cette partie, d'autant plus qu'elle est moindre que la partie $\frac{2 J . \xi' \text{cos}. \zeta'}{x^3}$ négligée par d'autres Géometres dans l'action de la Planète sur le Soleil; partie d'action qui est aussi tantôt positive, tantôt négative, & qui change beaucoup moins de signe dans cette même portion supérieure de l'orbite, que la partie $\frac{9 J . \xi' \text{cos}. 2 \zeta'}{4 x^4}$.

3. Il n'y auroit donc d'effet un peu sensible à craindre, que de la partie $\frac{3 J . \xi'^2}{4 x^4}$. Or si on considere que cette partie de la force perturbatrice est à la force de la gravitation, comme $\frac{3 J . \xi'^2}{4 x^2}$ est à S, ou comme $\frac{3 J . \xi'^2}{4 S . x^2}$ est à 1, & qu'ainsi au point où $x = 2000000$, elle est pour Jupiter à-peu-près comme $\frac{3}{4000 \times 16}$ est à 1, & pour Saturne, à-peu-près comme $\frac{3}{12000 \times 4}$ est à 1; on verra qu'on peut les négliger sans crainte, d'autant que ce rapport devient toujours de plus en plus petit dans la même raison que le quarré de x^2 augmente.

4. A l'égard de la force π, dont tous les termes sont multipliés par sin. ζ', & dont par conséquent la partie négligée change souvent de signe dans la portion supé-

rieure de l'orbite, on peut à plus forte raison négliger cette force π.

5. Néanmoins si quelque Calculateur scrupuleux vouloit avoir égard à la partie $\frac{3 J . \xi'}{4 x^4}$ de la force φ, il le pourroit aisément.

6. Pour cela, il suffiroit d'ajouter à la valeur de φ trouvée pour la partie *E D e*, c'est-à-dire à $\frac{J}{x^2}$, la partie $\frac{3 J . \xi'^2}{4 x^4}$; en regardant même ξ' comme constante & comme égale à la distance moyenne de la Planète perturbatrice au Soleil. Les formules du §. XXXIII. donneront des moyens courts & faciles de calculer la petite quantité qui résultera de cette nouvelle considération.

XLI.

1. Pour trouver le mouvement & la variation du périhélie d'une révolution à l'autre, on s'y prendra de la maniere suivante.

Il est facile de voir par ce qui a été dit dans le §. XIX;

1°. Qu'on peut chercher d'abord la variation & le mouvement du périhélie, en cherchant les altérations de l'orbite *A C D A* (*fig.* 13.) par les forces φ & π, & ensuite en traitant comme des portions d'ellipses les portions d'orbites décrites par la Comète & par le Satellite que nous lui avons supposé.

2°. Que de ces portions d'orbites, regardées comme

elliptiques, il ſuffira de conſidérer la ſeule portion que la Comète décrit depuis le point C''' de la fig. 15, puiſque cette portion d'orbite eſt la ſeule dont il ſoit néceſſaire de comparer le périhélie au périhélie A, d'où la Comète a été ſuppoſée partir.

2. Par conſéquent, comme l'on connoît (§. XX. n°. 17.) le rayon vecteur SC''', ainſi que la direction & la viteſſe de la Comète au point C'''; on aura facilement par les formules des §. XXVI. & XXVIII. la diſtance & la poſition du périhélie dans cette orbite, conſidérée comme elliptique.

3. Retranchant cette diſtance de la diſtance périhélie 44851 obſervée en 1661, on aura *à cet égard* la variation du périhélie, ou l'altération de la diſtance périhélie, que j'appellerai Π.

4. On aura de même, en comparant la poſition du nouveau périhélie avec celle du périhélie de 1661, le mouvement du périhélie à cet égard, que je nomme Γ.

5. Voilà donc déja une partie du mouvement & de la variation du périhélie, en regardant les portions d'orbite de la Comète & du Satellite comme des ellipſes. Il nous reſte à chercher ce mouvement & cette variation, en vertu des forces φ & π, agiſſant dans l'orbite $ACDA$ depuis 1661.

6. Pour cela on remarquera qu'au périhélie on a; 1°. $dx = o$, & par conſéquent $du = o$, ou (§. X.) $- a$ ſin. z $+ \frac{s + C}{gg}$ ſin. z — coſ. $z \int Mdz$ coſ. z — ſin. $z \int Mdz$

$\sin. z = 0$, ou $\sin. z = \frac{1}{\frac{S+C}{gg} - a} \times [\cos. z \int M dz$
$\cos. z + \sin. z \int M dz \sin. z]$.

2°. Qu'au même périhélie on a $x = \frac{aa}{u} = aa$:
$[a \cos. z + \frac{S+C}{gg} - \frac{S+C}{gg} \cos. z - \sin. z \int M dz$
$\cos. z + \cos. z \int M dz \sin. z] =$ (en faisant $a \cos. z +$
$\frac{S+C}{gg} - \frac{S+C}{gg} \cos. z = a$, comme cela arrive
en effet lorsque $z = 360°$.) $a + \sin. z \int M dz \cos. z -$
$\cos. z \int M dz \sin. z =$ (§. XIX.) $a - \cos. z \int X dz \sin. z$
$+ \sin. z \int X dz \cos. z - \overline{\cos. z - 1} . \frac{2S}{gg} \times \int Y dz +$
$\cos. z . \frac{2S}{gg} \int Y dz (1 - \cos. z) - \frac{2S. \sin. z}{gg} \int Y dz$
$\sin. z =$ (en faisant $\cos. z = \cos. 360°. = 1$, & $\sin. z =$
$\sin. 360°. = 0$) $a - \int X dz \sin. z + \frac{2S}{gg} \times \int Y dz (1 - \cos. z)$.
Or les quantités $\int X dz \sin. z$ & $- \frac{2S}{gg} \int Y dz (1 - \cos. z)$
ont été calculées §. XXXVI. dans les opérations qui ont été faites pour trouver l'altération causée par les forces φ & π depuis 1661. On cherchera donc dans les résultats de ces opérations, la valeur de ces quantités depuis le périhélie de 1661, jusqu'au suivant : pour cela il faudra chercher dans les calculs déja faits au §. XXXVI. la valeur de ces quantités, depuis le point où $z = 360°$ jusqu'à celui où $z = 2 . 360$; par-là on aura la nouvelle distance périhélie ; par conséquent en retranchant cette distance

de 44851, on connoîtra la nouvelle altération du périhélie en vertu des forces φ & π, altération que je nomme Π'. Ajoutant cette altération, avec le signe qui la caractérise, à la quantité Π déja trouvée, on aura $\Pi + \Pi'$ pour la variation totale de la distance périhélie.

7. A l'égard du mouvement du périhélie, ou plutôt de sa position nouvelle, on le trouvera par l'équation sin. $z = \frac{1}{\frac{aa}{p} - a} \times \int M dz \cos. z$, $\int M dz \cos. z$ étant égal à ce que devient $\int X dz \cos. z + \frac{2aa}{p} \int dz \cos. z \int Y dz$ lorsque $z = 360°$; cette derniere quantité est égale à $\int X dz \cos. z + \frac{2aa}{p} \sin. z \int Y dz - \frac{2aa}{p} \int Y dz \sin. z = \int X dz \cos. z - \frac{2aa}{p} \int Y dz \sin. z$. Or ces deux dernieres quantités ont aussi été calculées dans les opérations du §. XXXVI.

8. Par-là on connoîtra le mouvement du périhélie en vertu des forces φ & π; ce mouvement étant appellé Γ', & ajouté au mouvement déja trouvé Γ, on aura $\Gamma + \Gamma'$ pour le mouvement cherché.

9. Au reste, comme une petite erreur dans la valeur du rayon vecteur peut en produire une beaucoup plus grande dans la position du périhélie, il ne faudra point s'étonner si en conséquence des quantités négligées dans ce calcul, le résultat ne répond pas toujours fort éxactement aux observations. Par exemple, les calculs faits

par la théorie pour la Comète de 1682, ont donné 6′ 33″ de mouvement direct au périhélie, depuis 1682 jusqu'en 1759; & les observations rapportées dans la *Connoissance des Tems* de 1761, donnent 1°. 40′; c'est-à-dire, que le résultat des observations est environ 15 fois plus grand que celui de la théorie; différence énorme, & qu'il faut attribuer, comme nous l'avons dit, aux erreurs considérables qu'on ne peut éviter dans cette recherche.

10. A l'égard de la distance périhélie de cette même Comète, la théorie a donné une diminution de $\frac{3}{10000}$ de la distance moyenne de la Terre au Soleil depuis 1682 jusqu'en 1759; & les observations la donnent au-delà de trois fois plus grande, savoir, de $\frac{1}{1000}$. Au reste les observations elles-mêmes sont sujettes à quelqu'erreur dans le résultat qu'elles donnent sur la distance & sur la position de la Comète périhélie; tant par les erreurs qui peuvent se glisser dans le lieux de la Comète, que par la supposition qu'on fait que la Comète décrit dans la partie visible de son orbite, ou une Parabole éxacte, ou une Ellipse dont les Elémens ne sont jamais bien connus.

XLII.

1. A l'égard du mouvement des nœuds & de la variation de l'inclinaison de l'orbite de la Comète sur le plan de l'orbite de la Planète perturbatrice, nous avons donné dans les Mémoires de l'Académie de 1745, p. 380,

les formules au moyen desquelles on y peut parvenir. On peut démontrer ces formules par les moyens que nous avons exposés dans nos *Recherches sur le Systême du Monde*, art. 11 & 12. Mais pour ne pas y renvoyer nos Lecteurs, nous allons mettre ici ces formules & leur démonstration.

2. Soit comme ci-devant DCB (*fig.* 19.) l'orbite de la Comète, DSB la ligne des nœuds de son orbite avec l'orbite de la Planète perturbatrice. Soit J le lieu de la Planète rapporté sur l'orbite de la Comète, l'angle $JSB = V$, l'angle $CSD = v'$, la distance de la Planète à la Comète $= k$, & la distance accourcie JS de la Planète au Soleil $= \xi$. Il est aisé de voir; 1°. que le point C est tiré perpendiculairement à l'orbite par une force $= \frac{J \cdot \xi \text{ fin. } V}{k^3} \times \text{tang. incl.} - \frac{J \text{ fin. } V \text{ tang. incl.}}{\xi^2 (1 + mm \text{ fin. } V^2)^{\frac{3}{2}}}$; quantité dans laquelle on peut mettre, au lieu de tang. incl. sa valeur $\frac{\text{fin. incl.}}{\text{cof. incl.}}$; 2°. que la petite ligne parcourue perpendiculairement au plan DCB, en vertu de cette force, est $\frac{ds^2}{v^2} \times \left(\frac{J}{k^3} \times \xi \text{ fin. } V \frac{\text{fin. incl.}}{\text{cof. incl.}} - \frac{J \text{ fin. } V \text{ fin. incl.}}{\xi^2 (1 + mm \text{ fin. } V^2)^{\frac{3}{2}} \text{ cof. incl.}}\right)$; 3°. qu'en vertu de cette petite ligne parcourue, la ligne des nœuds SO, change sur le plan de l'orbite de la Planète perturbatrice, en se mouvant de D vers J, d'une quantité $= \frac{ds^2}{v^2} \times \left(\frac{J}{k^3}\right.$

$$\times \frac{\xi \text{ fin. } V \text{ fin. incl.}}{\text{cof. incl.}} - \frac{J \text{ fin. } V \text{ fin. incl.}}{\xi^2 (1 + mm \text{ fin. } V^2)^{\frac{3}{2}} \text{ cof. incl.}}) \times$$

$\frac{CO}{Cc} \times \frac{1}{\text{fin. incl.}} \times \frac{1}{SO}$; 4°. en menant Cd parallèle à SD, & décrivant l'arc CN du rayon SC, on aura $\frac{CO}{Cc} = \frac{SO}{Cd}$; & $Cd = \frac{CN}{\text{fin. } v'} = \frac{x\,d\,\zeta}{\text{fin. } v'}$: faisant donc ces substitutions dans la formule précédente, mettant ξ' pour exprimer la distance réelle de la Planète au Soleil, & effaçant ce qui se détruit, il vient pour l'Elément du mouvement des nœuds

$$\frac{d\,s^2}{v^2} \times \left(\frac{J\,\xi}{k^3} - \frac{J\,\xi}{\xi'^3} \right) \times \frac{\text{fin. } V \text{ . fin. } v'}{x\,d\,\zeta} \times \frac{1}{\text{cof. incl.}}.$$

Dans cette formule on mettra pour $\frac{d\,s}{v}$ sa valeur approchée $\frac{x\,x\,d\,\zeta}{a\,g}$, pour $a\,g$ sa valeur $\sqrt{S.p}$, & pour $\frac{1}{\text{cof. incl.}}$ sa valeur secant. incl.

3. A l'égard de la variation de l'inclinaison; si on appelle, comme au commencement de ce *Mémoire*, la tangente de l'inclinaison m, on trouve que $\frac{x \text{ fin. } v' \times \text{fin. incl.}}{m}$ est la cotangente de l'inclinaison, en prenant pour sinus total la perpendiculaire x fin v' fin. incl. menée de la Comète C sur le plan de l'orbite de la Planète. Or cette cotangente diminue d'une quantité égale au mouvement des nœuds multiplié par x cof. v'. Donc si on appelle $d\zeta$ le mouvement trouvé des nœuds, on aura la différentielle de la cotangente de l'incl. $= \frac{-\,d\,\zeta\,.\,x \text{ cof. } v'}{x \text{ fin. } v' \text{ fin. incl.}}$

=

$= \frac{-ds^2}{v^2} \times \left(\frac{J.\xi}{k^3} - \frac{J.\xi}{\xi'^3} \right) \frac{\text{sin. } V \text{ cos. } v'}{x\, dz} \times \frac{1}{\text{cos. incl.}}$
$\times \frac{1}{\text{sin. incl.}}$; dans laquelle on peut mettre au lieu de
$\frac{1}{\text{cos. incl.}} \times \frac{1}{\text{sin. incl.}}$ sa valeur $\frac{2}{\text{sin. 2 incl.}} = 2 \times$ cosec. du double de l'incl.

4. On peut rendre assez court ce calcul du mouvement des nœuds & de la variation de l'inclinaison, en considérant; 1°. que $\frac{ds^2}{v^2\, x\, dz} = \frac{x^3\, dz}{aagg} = \frac{x^3\, dz}{S.p}$; 2°. que les quantités $\frac{J\xi x^3}{k^3}$, & $\frac{J\xi x^3}{\xi'^3}$ ont été calculées dans les opérations qu'on a faites au §. XXXVI. pour trouver les quantités X & Y; 3°. que depuis le point C (*fig.* 13.) jusqu'au point E, & depuis le point e jusqu'au point c, on peut mettre au lieu de $\frac{J.\xi}{k^3} - \frac{J.\xi}{\xi'^3}$ (§. XVI.) la quantité $\frac{J.\xi}{k^3} - \frac{J.\xi}{x^3}$, dont le second terme rendra les opérations plus faciles, parce qu'étant multiplié par x^3, il se réduit à $-J.\xi$; 4°. que depuis le point E jusqu'au point correspondant e, c'est-à-dire, dans toute la partie supérieure de l'orbite, on peut négliger entiérement l'effet des forces perturbatrices; ensorte qu'on n'a de calcul à faire que pour les parties AE, eA; 5°. que depuis A jusqu'en K (*fig.* 17.) & depuis k jusqu'en A, on peut au lieu de x mettre $\frac{2a}{1 + \text{cos. } z}$, & au lieu de $\frac{J}{k^3}$ sa valeur approchée $\frac{J}{\xi'^3} + \frac{3 J\xi x \text{cos. } \zeta}{\xi'^5}$ &

ce qui réduira la quantité $\left(\frac{J.\xi}{k^3} - \frac{J.\xi}{\xi'^3}\right)$ à $+\frac{3J.\xi x \operatorname{cof.}\zeta}{\xi'^5}$.

5. Ainsi pour calculer la variation des nœuds & de l'inclinaison, il faudra depuis A jusqu'en K, c'est-à-dire, depuis $z=0$ jusqu'à $z=90°$, se servir des formules suivantes.

1°. pour le nœud; $d\zeta = \frac{x^4\,dz}{S.p} \times + \frac{3J\xi \operatorname{cof.}\zeta}{\xi'^5}$ $\times$ fin. V. fin. $v' \times$ fec. incl. 2°. $\frac{x^4\,dz}{S.p} \times + \frac{3J.\xi \operatorname{cof.}\zeta}{\xi'^5}$ $\times$ fin. V cof. $v' \times 2$ cofec. 2 incl. (pour l'inclinaison).

On se souviendra que ξ & ξ' sont ici regardées comme constantes (§. XXI & XXIII.); que $x = \frac{2a}{1+\operatorname{cof.}z}$; que cof. ζ = cof. $\overline{A+z}$ = cof. A cof. z — fin. A. fin. z; que fin. V est aussi regardé comme constant; & que $v' = 180 - V - \zeta =$ (§. XXIII.) $180 - V - A - z$; d'où l'on tire fin v' = fin. $\overline{180 - V - A - z}$ = fin. $(180 - V - A)$ cof. z — fin. z cof. $\overline{180 - V - A}$ = fin. $(V+A)$ cofin. z + fin. z cof. $\overline{V+A}$.

Par ces formules & par celles du §. XXXIII, on trouvera facilement le mouvement des nœuds & la variation de l'inclinaison pour les parties AK, kA.

6. Dans les parties KC, ck, on employera les formules des n°. 2 & 3. du présent Paragraphe.

7. Enfin dans les parties CE, ec, on employera les formules

$$d\zeta = \left(\frac{x^3\,dz}{S.p} \times \frac{J.\xi}{k^3} - \frac{J\xi\,dz}{S.p}\right) \times \text{fin. } V \text{ fin. } v'$$

$\times$ fec. incl.

Et $\left(\frac{x^3\, d\,z}{S.\,p} \times \frac{J.\,.\,\xi}{k^3} - \frac{J\xi\, d\,z}{S.\,p}\right) \times \text{sin.}\, V \,\text{cos.}\, v' \times$ 2 cosec. 2 incl.

8. On peut remarquer, si cela contribue à abréger le calcul, que $v' = 180 - V - \zeta$; & que par conséquent $\text{sin.}\, V \times \text{sin.}\, v' = \frac{-\text{cosin.}\, V + v'}{2} + \frac{\text{cosin.}\, V - v'}{2} = \frac{\text{cosin.}\, 180 - \zeta}{2} + \frac{\text{cosin.} - 180 + 2V + \zeta}{2} = \frac{\text{cosin.}\, \zeta}{2} - \frac{\text{cosin.}\, 2V + \zeta}{2} = \frac{\text{cosin.}\, \zeta}{2} - \frac{\text{cosin.}\, 360 - 2v' - \zeta}{2} = \frac{\text{cosin.}\, \zeta}{2} - \frac{\text{cosin.}\, 2v' + \zeta}{2}$; & que $\text{sin.}\, V \,\text{cos.}\, v' = \frac{\text{sin.}\, V + v'}{2} + \frac{\text{sin.}\, V - v'}{2} = + \frac{\text{sin.}\, \zeta}{2} - \frac{\text{sin.}\, 2V + \zeta}{2} = + \frac{\text{sin.}\, \zeta}{2} + \frac{\text{sin.}\, 2v' + \zeta}{2}$.

9. On pourra se servir des unes ou des autres de ces formules, selon qu'on voudra faire disparoître V ou v': mais V paroît plus commode à chasser.

10. Après avoir fait cette opération, il en reste encore une autre qui n'est pas longue; c'est de trouver la variation des nœuds & de l'inclinaison, en regardant comme des ellipses, les portions d'orbites décrites par la Comète & par le Satellite.

11. Pour cela on prendra, comme dans le §. XXXVI, le point C (*fig.* 19.) ou SC = la distance moyenne de Jupiter, & on tirera d'abord la tangente CO à l'orbite, laquelle coupera en O la ligne des nœuds.

12. On cherchera ensuite par le moyen des formules

du §. XXXIV. & du §. XXXVI n°. 53 & suiv. la vitesse du Satellite dans sa petite orbite, entant que cette vitesse est estimée perpendiculairement à l'orbite de la Comète.

13. On dira ensuite : comme la vitesse g de la Comète suivant CO, est à cette vitesse perpendiculaire qu'on vient de trouver ; ainsi le sinus total ou $57^\circ\ 17'\ 44''$, est à un quatriéme terme, lequel exprimera un angle fort petit.

14. On nommera α cet angle, & on prendra la quantité $\frac{\alpha \times CO - \frac{J}{S} \xi \text{ sin. } V . m}{SO} \times$ cosec. incl. pour la position du nœud de l'orbite réelle que le Satellite décrit dans l'espace absolu, lorsque la Comète est parvenue en C; c'est-à-dire, pour l'angle que la ligne des nœuds de cette orbite fait avec SD.

15. Dans cette formule, $\frac{J \xi m \text{ sin. } V}{S}$ est la hauteur du petit Satellite au-dessus du plan de l'orbite de la Comète ; hauteur à laquelle il faut avoir égard pour déterminer la position de la ligne des nœuds. Au reste nous n'avons pas besoin d'avertir que les quantités α & $\frac{J \xi \text{ sin. } V . m}{S}$ doivent être prises avec les signes convenables, selon les situations respectives des orbites, & celles de la Comète & de la Planète perturbatrice. Examen qu'il faut laisser à l'attention du Calculateur, & qui n'est pas difficile. Dans les figures sur lesquelles on a fait les calculs précédens, on suppose que le plan de l'orbite de la

Planète perturbatrice eſt élevé au-deſſus du plan de l'orbite de la Comète, & que la Planète perturbatrice ſoit dans cette partie de ſon orbite; d'où l'on voit que le Satellite, qui eſt toujours à 180 degrés de la Planète perturbatrice, ſera au-deſſous du plan de l'orbite de la Comète.

16. Lorſque le Satellite ſera en c (*fig.* 13.), au point où $Sc = SC$, alors on trouvera par une formule ſemblable la poſition du nœud de l'orbite, qui redevient alors celle de la Comète.

17. Pour avoir dans les deux mêmes cas la variation de la cotangente de l'inclin. il faut multiplier le mouvement trouvé du nœud par $\frac{\text{coſ. } v'}{\text{ſin. } v' \text{ ſin. incl.}} = \text{cot. } v' \text{ coſec. incl.}$

18. On trouvera donc par ce moyen le mouvement des nœuds & la variation de l'inclinaiſon, en regardant les portions d'orbites de la Comète & du Satellite, comme des ellipſes. On joindra à cette opération le réſultat de celles par leſquelles on a trouvé ces mêmes variations, en ayant égard aux forces perturbatrices, & on aura la variation totale.

19. Après quoi ce ſera une opération de Trigonométrie ſphérique fort ſimple, que de trouver la variation des nœuds & de l'inclinaiſon par rapport à l'ecliptique. Car ayant la poſition nouvelle du nœud & de l'inclinaiſon par rapport à l'orbite de la Planète perturbatrice, on aura cette poſition & cette inclinaiſon par rapport à l'écliptique, & par conſéquent la variation des

nœuds & de l'inclinaison par rapport à ce même grand cercle.

20. Au reste il ne faut pas s'attendre ici à une précision plus grande que dans les calculs du périhélie, & par la même raison. Par exemple, dans la Comète de 1682, la théorie a donné pour le nœud un mouvement de 1° 29′ 11″ en 1759, suivant l'ordre des signes; & les observations donnent le double, savoir 3° 1′. La même théorie donne 6′ 36″ pour la diminution de l'inclinaison depuis 1682, & les observations donnent 3′, c'est-dire, moins de la moitié. On ne doit donc point exiger ni espérer sur cet article beaucoup d'éxactitude dans le résultat des calculs tirés de la théorie.

21. En général toutes les inégalités du mouvement des Comètes venant d'une force qui agit alternativement en différens sens, il ne faut point être surpris que le résultat du calcul puisse être fort différent de l'observation: parce que ce résultat est composé d'un grand nombre de parties, dont les unes se retranchent des autres; & que la différence, qui est le résultat qu'on cherche, peut être à-peu-près du même ordre que les quantités qu'on a négligées; auquel cas il ne seroit point surprenant que le résultat de la théorie fût double ou triple &c. ou la moitié, ou le tiers, de celui des observations. Le Calculateur doit même se trouver fort heureux, si le résultat de la théorie n'est pas quelquefois en sens contraire de celui que les observations donnent, comme cela pourroit très-bien arriver, quelque éxacti-

tude qu'il eût mise dans ses calculs. Car si le résultat cherché est la différence de deux nombres considérables, l'un positif, l'autre négatif, peu différens l'un de l'autre, & que dans chacun de ces nombres il y ait une erreur de plusieurs unités, il se pourra faire que le résultat des deux erreurs combinées soit plus grand que la différence des deux nombres; & alors le résultat de la théorie se trouveroit en sens contraire de l'observation.

22. De-là on doit tirer deux conséquences; 1°. qu'il ne faut compter que jusqu'à un certain point sur l'éxactitude des calculs, dans la théorie des perturbations des Comètes; 2°. que l'inéxactitude, s'il y en a, pourra venir souvent de la nature du Problême, & non pas de la faute du Calculateur.

23. On pourroit joindre à ces recherches sur les perturbations des Comètes, la théorie de la résistance qu'elles éprouveroient de la part d'un milieu très-rare où on les supposeroit se mouvoir; on trouveroit les fondemens de cette théorie, & les principes nécessaires pour la développer, dans nos *Recherches sur le Systême du Monde*, IIe Partie Liv. II. Chap. VI; où nous avons traité des Trajectoires dans des milieux résistans. Mais j'abandonne, au moins quant à présent, cette recherche aux calculs des Mathématiciens, pour deux raisons; 1°. parce qu'on ne peut faire que des suppositions vagues sur la nature du milieu, dans lequel les Comètes se meuvent; 2°. parce que cette recherche forme une des branches de la question proposée par l'Académie des Sciences, pour le

Prix de l'année prochaine 1762 ; à quoi je dois ajouter que M. Euler a déja donné un savant Essai sur ce sujet, en 1746, dans le premier Volume de ses *Opuscules*.

CONCLUSION.

1. En finissant ce Mémoire, je crois devoir remettre sous les yeux du Lecteur les avantages particuliers à ma méthode pour calculer les perturbations des Comètes. Quoique ces avantages soient déja indiqués en différens endroits de ma théorie, il ne m'a pas paru inutile de les réunir tous ici sous un même point de vûe, en y ajoutant quelques remarques qui serviront encore à les rendre plus sensibles.

1°. Dans toute la partie de l'orbite où la distance de la Comète au Soleil est plus grande que vingt fois le rayon du grand orbe, c'est-à-dire, que vingt fois la distance moyenne de la Terre au Soleil; ma méthode non-seulement abrege considérablement le calcul des perturbations, mais (§. XV. n°. 3. & XVIII. n. 9.) le réduit presque à rien, au calcul du mouvement dans une ellipse; sans qu'on ait besoin de chercher dans cette partie de l'orbite la position de la Planète perturbatrice, dont la détermination dans cette partie (§. XVI. n. 2.) pourroit être fort sujette à erreur.

2°. Dans la plûpart des Comètes, ma méthode abrege beaucoup le calcul (§. XXI, XXII & XXIII.) pour la partie qui s'étend depuis le périhélie jusqu'à 90 degrés de part & d'autre ; elle dispense d'avoir recours pour cette

cette partie à des quadratures de courbes méchaniques.

3°. Depuis le point où la distance de la Comète au Soleil est égale à celle de Jupiter, jusqu'au point où le rayon vecteur de la Comète est égal à vingt fois le rayon du grand orbe; ma méthode donne encore (§. XVI. n. 3. & XVII. n. 2.) le moyen d'abréger le calcul, non pas en supprimant absolument les quadratures méchaniques, mais en rendant plus simples les quantités qui y entrent.

4°. Cette même méthode (§. XIX. art. 11 & 16.) réduit tout à des quadratures simples & totales, & jamais à des quadratures représentées par un double signe d'intégration; ce qui rend tout-à-la-fois les approximations plus faciles, & plus susceptibles d'une éxactitude poussée aussi loin qu'on voudra.

5°. Pour connoître la position de la Planète perturbatrice par rapport à la Comète, lorsque celle-ci se rapproche de son périhélie vers la fin de la seconde révolution; je n'ai pas besoin (§. XX. art. 15 & 16.) de faire une fausse supposition sur ce périhélie; supposition qui peut produire une erreur assez considérable & assez à craindre dans la position de la Planète perturbatrice; car si on commettoit, par exemple, une erreur de neuf mois ou davantage dans le tems supposé du périhélie, cette erreur en entraîneroit une de plus de vingt degrés dans la position de Jupiter, & par conséquent pourroit occasionner (§. XVI. n°. 2.) un mécompte très-considérable dans l'estimation des forces perturbatrices & de leur effet.

6°. Un autre avantage de ma méthode, c'eſt de faire toujours marcher les z d'un même côté, dans le ſens du mouvement de la Comète: ce qui rend le calcul plus ſimple, & moins ſujet aux mépriſes que pourroit occaſionner la marche des z en différens ſens. Ceux qui ont employé cette marche alternative des z en ſens contraires dans la recherche des perturbations des Comètes, s'y ſont crus obligés par une autre ſuppoſition qu'ils avoient faite, & qui conſiſte à employer dans leurs calculs l'anomalie excentrique, au lieu de l'anomalie vraie. Pour nous, nous avons cru pouvoir nous en tenir ſans danger à l'anomalie vraie, ſans y ſubſtituer l'anomalie excentrique, & cela pour pluſieurs raiſons. La premiere, parce que dans la partie inférieure de *l'orbite* (dans celle qui eſt la plus proche du Soleil), les rayons vecteurs exprimés par les anomalies vraies, ont un accroiſſement moins rapide par rapport à ces anomalies, & par conſéquent varient moins que par rapport aux anomalies excentriques (*a*). La ſeconde, parce que dans la partie qui s'étend depuis le périhélie juſqu'à 90 degrés de part & d'autre, l'orbite de la Comète pouvant être priſe pour une Parabole, la conſidération des rayons vec-

(*a*) En effet quand le rayon vecteur eſt devenu, par exemple, le double de la diſtance périhélie, l'anomalie vraie eſt déja d'environ 90 degrés, au lieu que l'anomalie excentrique n'eſt encore que d'un aſſez petit nombre de degrés; par exemple, de 14 environ, dans la Comète de 1682. Les rayons vecteurs varient donc moins dans la partie inférieure de l'orbite, par rapport à l'anomalie vraie, que par rapport à l'anomalie excentrique.

teurs exprimés par les anomalies vraies, rend les intégrations beaucoup plus faciles & les calculs moins pénibles sans comparaison (§. XXI. & XXII.), que par les anomalies excentriques, dont la considération suppose qu'on regarde l'orbite de la Comète comme une ellipse. La troisiéme, c'est que dans la partie supérieure de l'orbite, dans celle qui est la plus éloignée du Soleil, & où les rayons vecteurs croissent assez rapidement, ces rayons n'apportent aucun inconvénient aux calculs, soit parce qu'une grande portion de cette partie supérieure est sensiblement elliptique (§. XV. n. 3.) & ne demande aucun calcul; soit parce que la considération du Satellite fait disparoître en grande partie (§. XVI. n°. 3.) le rayon vecteur x des calculs qu'on est obligé de faire. Enfin la quatriéme raison, c'est que la considération des anomalies excentriques introduiroit dans une partie de la quantité M (§. IX. n. 3.) les rayons vecteurs qui répondent à ces anomalies, & que ces rayons vecteurs se trouvant placés au dénominateur, & décroissant prodigieusement par rapport aux derniers degrés d'anomalie excentrique, produisent des sauts considérables dans la quantité M; ce qui peut occasionner des erreurs assez fortes dans les quantités dérivées de celle-là.

7°. Quoique dans ma solution on passe plusieurs fois de l'orbite de la Comète à celle du Satellite fictif dans l'espace absolu, & de celle-ci à celle de la Comète; ces passages n'empêchent point le calcul d'être uniforme & simple dans sa marche. On n'a pas besoin, par exemple,

quand on passe de l'orbite de la Comète à celle du Satellite (ce qui arrive au point C de la fig. 13. ou $SC=$ la distance moyenne de Jupiter); on n'a pas besoin, dis-je, de chercher par un calcul particulier, l'altération que l'action *précédente* des Planètes perturbatrices dans la partie AC, doit produire dans la partie *subséquente* CDc de l'orbite de la Comète, c'est-à-dire, dans celle à laquelle on substitue l'orbite $\gamma o \gamma'$ (*fig.* 14.), que le Satellite fictif γ décrit dans l'espace absolu. On n'a pas besoin non plus, en considérant cette derniere orbite $\gamma o \gamma'$, de chercher l'altération que l'action *précédente* des Planètes perturbatrices sur la Comète dans la partie AC, a dû produire dans la vitesse & dans la direction initiale du Satellite. Voici la preuve de ces deux propositions.

2. Ne considérons, pour abréger, dans la quantité qui exprime l'altération du tems périodique (§. XIX. n. 10.), que le terme $\int dP \int X dz \sin. z$, ou (en faisant $X \sin. z = X'$) $\int dP \int X' dz = P \int X' dz - \int P X' dz$; on fera sur chacun des autres termes le même raisonnement que nous allons faire. Lorsque la Comète est arrivée au point C, où l'on passe de son orbite à celle du Satellite, soit $z = \zeta$, ϖ la valeur de P, α celle de $\int X' dz$, & ς celle de $\int P X' dz$, répondantes à $z = \zeta$; il est évident que la vitesse & la direction que la Comète auroit eûe au point C, sans perturbation, ont souffert par l'action précédente des Planètes perturbatrices, une altération telle, que si cette action cessoit en ce moment, l'altération du tems dans la suite de la période seroit $P\alpha - \varsigma$.

3. Or comme l'orbite du Satellite dans l'eſpace abſolu, & celle de la Comète different très-peu entr'elles, & ſont très-proches l'une de l'autre; il eſt aiſé de voir que l'altération $P\alpha - \beta$, qui vient uniquement de l'action *précédente* des Planètes perturbatrices, ſeroit ſenſiblement la même dans l'orbite $\gamma o \gamma'$ du Satellite & dans celle de la Comète. Soit $P = \varpi + p$, p étant $= o$ lorſque $z = \zeta$, & ϖ une conſtante, qui eſt la valeur de P quand $z = \zeta$: & l'altération dont on vient de parler, ſera $(\varpi + p)\alpha - \beta$.

4. Préſentement ſoit $z = \zeta + u$, u étant $= o$ lorſque $z = \zeta$, c'eſt-à-dire, au point γ, où l'on commence à conſidérer l'orbite du Satellite; & il eſt évident que l'altération du tems dans cette orbite, provenant de l'action des Planètes perturbatrices ſur le Satellite dans la partie d'orbite $\gamma o \gamma'$, ſera $\int dp \int \xi du$, en nommant ξ les différentes valeurs de X' dans cette portion d'orbite; à quoi il faut ajouter l'altération déja trouvée $(\varpi + p)\alpha - \beta$, pour avoir l'altération totale $(\varpi + p)\alpha - \beta + \int dp \int \xi du = (\varpi + p)\alpha - \beta + p\int \xi du - \int p \xi du$. Or il eſt facile de prouver que cette quantité eſt la même choſe que $P\int X' dz - \int P X' dz$; car $P\int X' dz - \int P X' dz = (\varpi + p)(\alpha + \int \xi du) - \beta - \int \overline{\varpi + p} \cdot \xi du = (\varpi + p)\alpha + p\int \xi du + \varpi \int \xi du - \int \varpi \xi du - \beta - \int p \xi du = (\varpi + p)\alpha + p\int \xi du - \beta - \int p \xi du$, à cauſe que ϖ étant conſtante, $\varpi \int \xi du - \int \varpi \xi du = o$. Donc &c.

5. Un ſavant Géometre a donné dans ſa *Théorie des Comètes*, une méthode ingénieuſe pour abréger le calcul

de la perturbation qui vient de l'action des Planètes sur le Soleil. Cette méthode est telle, que la perturbation étant une fois calculée pour une révolution, elle le sera pour une autre révolution quelconque. Mais 1°. la méthode suppose, comme ce Géometre le remarque, qu'on néglige l'excentricité & l'inclinaison de l'orbite de la Planète perturbatrice ; ce qui ne peut être permis que dans certains cas. 2°. Dans la comparaison de deux révolutions successives, cette méthode qui abrege extrêmement, & qui réduit presque à rien le calcul de la perturbation de la seconde révolution, double le calcul de la premiere (*a*) ; ainsi le calcul n'est point réellement abrégé par cette méthode, lorsqu'on ne considere que deux révolutions successives. Il est vrai qu'il le sera beaucoup lorsqu'on calculera plus de deux révolutions ; mais alors il faut non-seulement qu'on puisse négliger sans crainte l'excentricité & l'inclinaison de la Planète perturbatrice, il faut de plus que dans toutes les révolutions on suppose à la Comète la même orbite elliptique primitive, & indépendante des perturbations ; ce qui pourroit n'être pas sans inconvénient dans certains cas, où les ellipses primitives répondantes à chaque révolution, peuvent différer de plusieurs années.

6. Nous avons enseigné ci-dessus (§. XX. n. 16.) à

(*a*) La raison pour laquelle ce calcul est doublé, vient de ce qu'au lieu de cos. ζ & sin. ζ (§. IX.) on substitue cos. A cos. t — sin. A sin. t & sin. A cos. t + cos. A sin. t, A étant l'élongation au périhélie, & ζ étant $= A + t$.

trouver la *véritable Ellipse primitive* de la Comète, lorsqu'on sait par l'observation le tems de la révolution, & qu'on a trouvé par les calculs de la théorie l'altération de cette révolution. Pour trouver l'*Ellipse primitive* de la révolution suivante, dans laquelle je suppose qu'on connoît déja par observation la situation & la distance périhélie, il ne s'agit que de savoir quel seroit le tems de la seconde révolution, indépendamment de l'action des Planètes perturbatrices pendant cette seconde révolution, & en vertu seulement de l'action des Planètes pendant la révolution précédente. Or soient P', R', V', les valeurs de P, R, V (§. XIX. n. 16.) lorsque $z = 360$ degrés ; & soient α, γ, δ, les valeurs de $\int X dz \sin. z$, $\int Y dz$, $\int Y dz (1 - \cos. z)$, à la fin de la premiere révolution; soit supposé de plus, comme dans le §. XIX, m le tems de la premiere révolution, lequel est connu par observation; on aura pour le tems de la seconde révolution, indépendamment des perturbations pendant cette révolution, & en vertu seulement des perturbations de la précédente,

$$m + \frac{m\sqrt{S}}{\delta^{\frac{3}{2}} . 6,283185}\left(P'\alpha + V'\gamma + \frac{2S . R'\gamma}{gg} - \frac{2S . P'\delta}{gg}\right).$$

Cette formule, qu'il est très-aisé de se démontrer, si on a bien compris la théorie précédente, sera d'autant plus facile à employer, que les différentes parties qui la composent se trouveront déja calculées (§. XXXVI.

n. 52.) dans les opérations qu'on aura faites pour trouver la perturbation de la premiere révolution.

7. Nous ne devons pas omettre ici une observation qui peut être de quelque considération dans le calcul des altérations du mouvement de la Comète. On a pris pour le tems de la révolution dans l'Ellipse primitive, celui que les observations donnent depuis le passage au premier périhélie, jusqu'au retour au second périhélie. Or les deux périhélies n'étant pas situés sur la même ligne, il est évident que ce tems est un peu plus petit ou plus grand que celui de la révolution. C'est pourquoi, comme on suppose que l'angle entre les deux périhélies est connu, on calculera, dans l'hypothèse Parabolique, le tems que la Comète mettroit à parcourir cet angle, & qui ne peut jamais être que de très-peu de jours tout au plus; & on ajoutera ou on retranchera ce tems de la quantité m, pour avoir celui que la Comète mettroit à faire une révolution entiere depuis son départ du premier périhélie, jusqu'à ce qu'elle revienne sur la ligne du même périhélie. C'est cette quantité m ainsi corrigée qu'il sera bon d'employer dans le calcul, au lieu de la quantité m, qui exprime le tems d'une révolution d'un périhélie à l'autre. Il ne sera pas même nécessaire d'employer cette correction dans toutes les parties du calcul, mais seulement dans celle qui donne le tems du retour de la Comète sur la ligne du périhélie; c'est-à-dire, le tems qui répond à l'anomalie $z = 360^\circ$.

8. La principale source d'erreur dans cette correction, viendra

viendra de la position du premier périhélie, qui peut être assez fautive, étant fondée sur des observations anciennes & grossieres, comme dans les Comètes de 1531 & 1532. A cet inconvénient, qui vient uniquement de l'incertitude des observations, je ne connois point d'autre remede, que d'en attendre de meilleures, & de calculer, comme par provision, d'après celles qu'on a, & qui sont les seules dont on puisse faire usage.

9. Au reste, je le répete encore en finissant ce Mémoire, la nature du Problême est telle, que les quantités négligées pourroient quelquefois occasionner de grandes erreurs dans le dernier résultat, sans qu'il fût possible au Calculateur d'y remédier: c'est pourquoi on ne doit jamais se fier à ce dernier résultat qu'avec beaucoup de réserve & de restriction; & on ne doit même jamais imputer au Calculateur l'erreur commise, avant que d'avoir prouvé par un calcul plus éxact, qu'il pouvoit l'éviter.

En général, & toutes choses d'ailleurs égales, les calculs des altérations seront d'autant moins éxacts, que les Elémens de la Comète seront moins éxactement déterminés, & que sa période sera plus longue; & par cette raison je ne serois point étonné que la Comète de 1661 donnât deux mois, & peut-être plus, d'erreur dans le calcul de son retour; puisque la Comète de 1682, dont les Elémens sont mieux connus, & dont la période est beaucoup plus courte, a donné près d'un mois de différence entre le calcul & l'observation.

Fin du douziéme Mémoire.



TREIZIÉME MÉMOIRE.

Réflexions sur la Comète de 1682 & 1759.

CETTE Comète, dont le retour a été prédit par M. Halley, & calculé par M. Clairaut, a excité parmi les Savans quelques contestations. Nous allons en rendre compte, & donner en même tems le moyen de les décider.

1. M. Halley ne s'étoit pas contenté de prédire le retour de la Comète de 1682, qui avoit déja paru (comme ses calculs le démontrent) en 1531 & 1607: il annonça de plus qu'à cause de l'action de Jupiter, la période commencée en 1682 feroit plus longue que celle de 1607 à 1682, qui n'avoit été que de 75 ans; il prédit que la nouvelle période feroit allongée de plus d'une année par cette action, qu'elle feroit de plus de 76 ans; & il annonça le retour de la Comète pour la fin de 1758 ou le commencement de 1759. L'événement a vérifié sa prédiction avec une éxactitude surprenante; la Comète a été vûe pour la premiere fois en Saxe, le 14 Décembre 1758 (vieux style); ce style est

celui qu'employoit M. Halley dans ses calculs.

2. Un savant Géometre (qu'on dit être M. Dan. B.) pense (*a*) que dans cette prédiction, *M. Halley, de la maniere dont il s'énonce, ne s'est trompé que de trois mois*; & il ne paroît pas douter *que M. Halley n'eût déterminé encore plus exactement qu'il n'a fait le retour de la Comète, s'il avoit eû égard à l'action de Saturne.* Ce Géometre paroît donc croire que le calcul de M. Halley sur l'action de Jupiter, étoit suffisamment éxact, & qu'il n'a laissé quelque latitude dans sa prédiction, que par rapport à l'action de Saturne. Pour nous, nous croyons que M. Halley en avoit encore une autre raison; c'est qu'il regardoit lui-même son calcul sur l'action de Jupiter, comme n'étant pas assez rigoureux, & ayant été fait, ainsi qu'il le dit, *levi calamo*.

3. Cependant on ne sauroit douter que M. Halley n'ait fait quelque essai de calcul sur l'action de Jupiter, puisqu'il a prévû & prédit que cette action retarderoit la Comète de plus d'un an; il seroit donc à souhaiter qu'il nous en eût donné plus précisément le résultat, & qu'il nous eût dit dans quel tems le calcul lui donnoit le périhélie. Car si le calcul de l'action de Jupiter lui a donné le périhélie à la fin de 1758, ou au commencement de 1759, on peut dire que ce calcul a été fort éxact dans son résultat, puisque ce calcul ne différeroit de l'observation que d'environ trois mois, & que ces trois

(*a*) Voyez le *Journal Etranger* du mois de Janvier 1760, p. 78.

mois, suivant M. Clairaut, sont l'effet de l'action de Saturne, que M. Halley n'a pas calculée. Si au contraire son calcul lui a donné le périhélie en Mars, par exemple, ou en Avril 1759, & que d'après ce résultat il ait annoncé l'apparition de la Comète pour la fin de 1758, ou le commencement de 1759, comme elle a dû effectivement arriver dans cette supposition; en ce cas son calcul sur l'action de Jupiter auroit à la vérité été en erreur de trois mois; mais par une circonstance heureuse, ce calcul se trouveroit d'accord avec l'observation, l'action de Saturne redressant l'erreur commise.

4. Quoi qu'il en soit, on ne peut refuser à M. Halley la gloire d'avoir prédit le premier le retour de la Comète, & d'avoir de plus annoncé son retard, sinon par un calcul éxact, au moins par un calcul dont le résultat a été heureux. Mais on ne sauroit dissimuler en même tems, que ce calcul avoit besoin d'être fait avec plus d'éxactitude, sur-tout depuis qu'on est parvenu à trouver des méthodes pour cet objet.

5. Ce que M. Halley n'avoit pas fait, M. Clairaut l'a entrepris; la solution du Problême des trois corps, qu'il avoit trouvée conjointement avec M. Euler & moi, & qui est le seul moyen de calculer rigoureusement l'action des Planètes les unes sur les autres, l'a mis en état d'appliquer, ou faire appliquer les opérations arithmétiques à la formule qu'il avoit trouvée (conjointement avec nous) pour la solution de ce Problême : & au mois de Novembre 1758, plus de 76 ans après la derniere

apparition de la Comète, il annonça qu'en vertu de l'action de Jupiter & de Saturne, elle ne repasseroit à son périhélie que vers le 15 Avril 1759. Elle y a passé le 12 Mars; ce qui fait 33 jours de différence entre le calcul & l'observation.

6. Quelques Astronomes, en conséquence du calcul de M. Clairaut, se hâterent de dresser des Ephémérides du mouvement de la Comète, qui furent même lûes à l'Académie des Sciences. Mais le calcul de ces Ephémérides donnoit les lieux de la Comète à 40, 50 degrés, & au-delà, du lieu où elle étoit réellement. En conséquence les Astronomes qui avoient aidé M. Clairaut dans ses calculs, cherchant la Comète où elle n'étoit pas, ne la pouvoient trouver; il est vrai qu'ils avoient tort de s'en rapporter si servilement à ces calculs, puisque M. Clairaut lui-même avoit averti qu'il pouvoit bien s'être trompé d'un mois en excès ou en défaut.

7. La différence de plus d'un mois entre le calcul de M. Clairaut & l'observation, différence qui avoit empêché ces Astronomes d'appercevoir la Comète, a été l'objet d'une grande dispute parmi les Mathématiciens. Les uns ont prétendu que l'erreur étoit très-légere, attendu qu'elle devoit être comparée, non-seulement à la révolution totale qui est de 75 ou 76 ans, mais à la somme de deux révolutions consécutives, c'est-à-dire, à plus de 150 ans, ce qui ne fait pas la 1800e partie du tout. D'autres au contraire ont soutenu qu'il falloit comparer cette différence d'un mois, non à la somme, mais

à la ſeule différence des deux périodes conſécutives, laquelle eſt de 18 mois, & qu'ainſi l'erreur eſt au moins d'un dix-huitiéme ; il y en a même qui ont été plus loin, & qui ont fait monter cette erreur à un quart du total. Voyez le *Journal Encycl.* de Juillet 1759, Tome 2, p. 117. Je vais, ſi je ne me trompe, donner des principes bien ſimples pour décider cette conteſtation.

8. Pour déterminer la différence de deux périodes conſécutives de la Comète, qui eſt la ſeule choſe qu'on puiſſe déterminer dans ce Problême, voici comme on s'y prend.

9. On ſuppoſe que la Comète part de ſon périhélie de 1607 avec une certaine viteſſe, qui lui feroit décrire une ellipſe éxacte, ſans l'action de Jupiter & Saturne. En vertu de cette viteſſe, ſa période de 1607 à 1682 auroit été X, quantité qu'on ne connoît pas, qu'on ne ſauroit connoître, ni par conſéquent meſurer, & qu'il ſuffit d'avoir groſſiérement, c'eſt-à-dire, à un an près, ou même un peu moins éxactement, par les obſervations des retours de la Comète.

10. D'après cette ſuppoſition on calcule l'altération que les actions de Jupiter & de Saturne ont dû cauſer à la Comète ; & cette altération eſt ſenſiblement la même, quelque valeur qu'on ſuppoſe à X, pourvû que cette valeur ne ſoit pas fort différente de 75 ans & demi, ou 76 ans.

11. Soit α l'altération que les actions des deux Planètes cauſent à la révolution de la Comète ; on aura

$X + \alpha$ pour la révolution réelle de la Comète, révolution inconnue, parce qu'elle renferme la quantité X, dont on n'est pas sûr à un ou deux ans près.

12. La révolution suivante seroit $= X$, ainsi que la premiere, si pendant les deux révolutions le Soleil seul agissoit sur la Comète : mais la même action des deux Planètes qui a altéré la premiere révolution de la quantité α, altere la seconde révolution d'une autre quantité β que l'on trouve également par le calcul ; de sorte qu'on a $X + \beta$ pour la seconde révolution.

13. Cette quantité est inconnue, ainsi que la valeur $X + \alpha$ de la premiere révolution, parce que X n'est pas assez exactement connue ; mais en retranchant la premiere révolution $X + \alpha$ de la seconde $X + \beta$, l'inconnue X disparoît, & l'on a la différence $\beta - \alpha$ des deux révolutions consécutives, qu'on peut comparer à l'observation.

14. Par cet exposé du calcul, il est aisé, ce me semble, de démontrer, que *la différence du calcul à l'observation doit être comparée, non à la somme, mais à la différence des deux périodes consécutives.* En effet ; 1°. on convient unanimement, & M. Clairaut l'a très-bien remarqué, que si on connoissoit exactement par les observations la quantité X, l'erreur commise dans le calcul de la révolution devroit être uniquement comparée aux quantités α & β. Or que l'on connoisse ou non cette quantité X, l'erreur commise dans le calcul n'en doit pas moins être comparée uniquement aux quantités α & β ;

puisque ces quantités α & β sont absolument indépendantes de la valeur précise de X, qu'on ne peut, ni connoître, ni mesurer, & que ces quantités α & β sont les seules qu'on mesure & qu'on calcule véritablement; l'erreur ne peut donc être comparée qu'aux seules quantités qu'on a calculées, c'est-à-dire, α & β. 2°. Non-seulement on n'a point calculé la quantité X, mais encore cette quantité, comme on vient de le voir (*art.* 13.) disparoît entiérement du calcul quand on compare les deux révolutions; nouvelle raison pour n'y avoir aucun égard dans la comparaison du calcul avec l'observation. Il est donc incontestable que la différence d'un mois qui s'est trouvée entre le calcul & l'observation, doit être comparée uniquement à la différence des deux périodes, c'est-à-dire, à 18 mois; d'où il s'ensuit qu'elle est *au moins* $\frac{1}{18}$ du total; je dis *au moins*, car je ferai voir plus bas qu'elle est vraisemblablement beaucoup plus grande.

15. M. Clairaut est venu lui-même à l'appui de ce raisonnement (*a*); » la différence des deux périodes, » dit-il, est bien l'objet que je me suis proposé de me» surer, mais il n'en étoit pas plus susceptible de mesure » immédiate, il falloit toujours calculer les perturbations » de deux périodes. Pourquoi donc répandre l'erreur sur » un autre espace *que sur celui qu'il a fallu mesurer* «? De ce principe incontestable, il est aisé de tirer la conséquence; l'espace *qu'il a fallu mesurer*, n'est pas celui

(*a*) *Réponse à quelques pièces*, &c. 1759.

des

des 151 ans qui font la fomme des deux périodes ; c'eft uniquement l'*efpace de tems* qui exprime l'*altération* de la premiere période, & celle de la feconde. Voilà le feul efpace de tems qu'on ait calculé, le feul qu'on ait pû calculer, & par conféquent le feul auquel on doive comparer l'erreur du calcul.

16. En un mot, pour comparer l'erreur d'un mois à ces 151 ans, il faudroit que les efpaces de tems $X + \alpha$ & $X + \beta$ (art. 13.) dont la fomme fait environ 152 ans, euffent été mefurés tout entiers : or ils ne l'ont point été ; & la partie $2X$, qui eft d'environ 151 ans, n'eft ni mefurée, ni connue ; on n'a calculé, encore une fois, que les feuls efpaces de tems α & β, l'un & l'autre très-petits par rapport à ce nombre d'années.

Avant que d'aller plus loin, il ne fera peut-être pas inutile de répondre à quelques objections faites par des perfonnes très-peu inftruites dans cette matiere, & qu'il eft bon d'éclairer. Un autre motif qui nous y engage, c'eft que d'habiles Mathématiciens ont paru adopter ces objections ; mais nous ne pouvons croire que ce foit férieufement ; & ce n'eft pas proprement à eux que nous allons répondre.

17. On fuppofe, dit-on, qu'un Obfervateur mefure la diftance de Paris à Saint-Denis, & la trouve de 4300 toifes ; que le même Obfervateur mefure enfuite la diftance de Paris à Saint-Cloud, & la trouve de 4700 toifes ; il en conclura que la différence des deux diftances eft de 400 toifes ; fi cette différence fe trouvoit de 401 toifes,

feroit-il équitable de dire que l'Obfervateur s'eft trompé d'une toife fur 400, lorfqu'au contraire il ne s'eft trompé réellement que d'une toife fur 9000?

18. La différence entre cet exemple & celui de la Comète eft bien grande, & faute aux yeux. Dans l'exemple propofé on mefure *en entier* la diftance de Paris à Saint-Cloud, & celle de Paris à Saint-Denis. Dans le cas de la Comète, on ne mefure point en entier, à beaucoup près, chacune des deux périodes; on ne mefure qu'une très-petite partie de ces deux périodes, celle qui eft dûe à l'altération.

19. Pour rendre la comparaifon parfaitement jufte, voici comment il la faut faire. On fuppofe qu'il y ait entre Paris & Saint-Cloud un Village confidérablement plus près de Saint-Cloud que de Paris, & dont on mefure la diftance à Saint-Cloud, fans connoître ni mefurer la diftance de ce Village à Paris. On fuppofe de plus qu'au-delà de Saint-Denis par rapport à Paris, il y ait un autre Village, auffi beaucoup plus près de Saint-Denis, que Saint-Denis ne l'eft de Paris, & qu'on mefure la diftance de ce Village à Saint-Denis, fans mefurer ni connoître la diftance du même Village à Paris. On fuppofe enfin que l'on fache par quelque moyen indépendant de l'opération qu'on a faite, que les deux Villages dont il s'agit, font *à égale diftance* de Paris, fans qu'on connoiffe exactement cette diftance; je dis 1°. qu'en mefurant les diftances d'un des Villages à Saint-Cloud, & de l'autre à Saint-Denis, & en ajoutant ces diftances, on aura la diffé-

rence des distances de Paris à Saint-Cloud, & de Paris à Saint-Denis. 2°. Que si les distances ajoutées donnoient, par exemple, 190 toises, & que la différence cherchée fût plus petite de 10 toises, on se seroit trompé de 10 toises sur 180, c'est-à-dire, de 1 sur 18.

20. Or voilà précisément le cas de la Comète. La distance inconnue de Paris aux deux Villages, mais qu'on sait être la même de part & d'autre, représente la longueur inconnue X dont chaque période auroit été par l'action seule du Soleil. Les quantités α & β qui sont les seules qu'on mesure, représentent les distances des deux Villages à Saint-Cloud & à Saint-Denis. Cette comparaison bien entendue, confirme donc tout ce qui a été dit jusqu'ici, bien loin d'y être contraire.

21. On objecte encore que les Astronomes & les Géometres qui ont construit des tables de la Lune, ont toujours comparé la différence qu'ils trouvoient entre le calcul & l'observation, non aux équations du mouvement de la Lune, mais à la révolution totale. S'ils l'ont fait, ils ont eu tort; car le mouvement vrai de la Lune est composé de deux parties; d'un mouvement moyen *uniquement donné par les observations*, & d'un certain nombre d'équations qui se déterminent par le calcul, & qui se retranchent du mouvement moyen, ou s'y ajoutent, pour avoir le mouvement vrai. Or ces équations étant la seule chose qu'on calcule & qu'on puisse calculer, sont par conséquent la seule à laquelle on doive comparer les erreurs du calcul; c'est pourquoi la somme des équa-

tions lunaires pouvant monter à environ 8 degrés, si l'erreur est, par exemple de 8′, elle sera de 8′ sur 8°; c'est-à-dire, de $\frac{1}{60}$; & si la somme des équations n'étoit que de 2′, & que l'erreur fût de 1′, il seroit vrai de dire que l'erreur seroit de la moitié du tout, quoique cette erreur parût peu considérable en elle-même; ce qui n'implique aucune contradiction, puisque dans ce cas la différence du mouvement vrai au mouvement moyen seroit elle-même peu considérable, n'étant que de deux minutes, & que l'erreur, sans être considérable en elle-même, le seroit par rapport à la quantité qu'on chercheroit.

22. Mais pour rendre d'ailleurs le cas de la Lune parfaitement semblable à celui de la Comète, il faut supposer qu'un Astronome cherche à déterminer la différence de deux révolutions successives de la Lune; or je dis que s'il détermine cette différence à 15 minutes d'heure, par exemple, & qu'elle soit de 14, son erreur aura été de 1′ sur 14, c'est-à-dire, de $\frac{1}{14}$; parce que cette différence est la seule chose qu'il ait mesurée & calculée, & que le mouvement moyen (commun aux deux révolutions de la Lune), non-seulement n'entre point dans le calcul, mais même en a disparu, en retranchant la seconde révolution de la précédente.

23. En voilà, ce me semble, beaucoup plus qu'il n'est nécessaire, pour prouver démonstrativement que la différence d'un mois entre le calcul du retour de la Comète & l'observation de ce retour, ne doit pas être comparée à la révolution totale, & encore moins à la somme de

deux révolutions successives, mais à la différence d'environ 18 mois, qui se trouve réellement entre ces deux révolutions.

24. Allons plus loin, & tâchons de prouver que cette différence est non-seulement $\frac{1}{18}$ du total, mais qu'elle est même vraisemblablement bien plus considérable.

25. Pour cela supposons que y soit la quantité dont on s'est trompé en calculant l'altération α de la premiere révolution, causée par Jupiter seul; on aura donc pour la valeur éxacte de cette premiere révolution, en vertu de l'action de Jupiter, $X + \alpha + y$; supposons de même que ζ soit la quantité dont on s'est trompé en calculant l'altération β de la seconde révolution, causée par Jupiter seul; on aura cette seconde révolution $= X + \beta + \zeta$; & la différence réelle des deux révolutions, en vertu de l'action seule de Jupiter $= \beta + \zeta - \alpha - y$. M. Clairaut trouve de plus que la seconde période a dû être allongée par l'action de Saturne de 100 jours; quantité que j'appelle γ, & dans laquelle je suppose que l'erreur soit $+ z$; donc la différence réelle de la seconde révolution sur la premiere est $\beta + \zeta + \gamma + z - \alpha - y$: or cette différence est de 586 jours suivant l'observation; & suivant le calcul de M. Clairaut (*a*), on a $\beta + \gamma - \alpha = 618$;

(*a*) Je donne ici le résultat du calcul de M. Clairaut, tel qu'il se trouve dans son Mémoire de 1758, publié avant le retour de la Comète; Mémoire qui a donné lieu aux contestations que je me propose d'examiner dans cet Ecrit. Depuis le retour de la Comète, M. Clairaut a fait un calcul un peu plus éxact; mais il s'agit ici du premier calcul, de celui par lequel il a prédit le retour de la Comète; & d'ailleurs on peut appliquer

donc $\zeta + z - y = -32$; de plus, suivant le même calcul, $\alpha = -420$; donc $\gamma + \beta = 198$.

26. Il faut maintenant comparer les quantités ζ, z & y, aux quantités β, γ & α, trouvées parle calcul ; & pour cela il faut tâcher de découvrir, au moins à-peu-près, la valeur de ces quantités ζ, z & y.

27. Or on voit d'abord que les quantités α & $\gamma + \beta$ étant à-peu-près comme 2 à 1, la supposition la plus naturelle qu'on puisse faire, c'est de répandre à-peu-près dans la même proportion l'erreur -32^j. sur chacune de ces deux quantités. Supposons donc 22 jours d'erreur sur $\alpha = -420$, & 10 sur $\gamma + \beta = 198 = 100 + 98$, ensorte que $y = +22$, $z = -5$, & $\zeta = -5$; ce qui est la répartition la plus naturelle & *la plus favorable*; & voyons ce qui en résultera pour l'erreur commise sur la période de 1531 à 1607.

28. Soit ξ la valeur qu'auroit eûe la période de 1531 à 1607 par la seule action du Soleil, & δ l'altération causée à cette période par l'action de Jupiter (*a*); on aura par le calcul de M. Clairaut $\delta = -19$; de plus M. Clairaut trouve que la période suivante (celle qui commence à 1607) seroit abrégée de 31 jours par cette même

---

à ce second calcul, *mutatis mutandis*, les raisonnemens que nous allons faire sur le premier.

(*a*) M. Clairaut trouve que les effets de l'action de Saturne se détruisent à-peu-près dans les deux premieres périodes, & par cette raison n'en fait aucune mention dans son Mémoire de 1758. Nous n'en ferons pas mention non plus, & nous en dirons d'ailleurs plus bas une autre raison.

action de Jupiter depuis 1531 jusqu'en 1607; donc en nommant $\xi + \varepsilon$ ce que la période de 1607 devroit être par l'action de Jupiter sur la période précédente, indépendamment de son action de 1607 à 1682, on aura $\varepsilon = -31$. Enfin M. Clairaut trouve encore que cette période de 1607 à 1682, seroit accourcie de 420 jours, quantité que nous avons nommée α, ensorte que $\alpha = -420$. Donc $\varepsilon + \alpha - \delta = -451 + 19 = -432^{j}$.

29. Soit maintenant v l'erreur commise dans δ, x l'erreur commise dans ε; on aura $\varepsilon + x + \alpha + y - \delta - v = -459^{j}$. différence réelle de la période de 1531 à celle de 1607. Donc $x + y - v = -27$ (a); donc si on suppose comme ci-dessus (art. 27.) $y = +22$, on aura $x - v = -49$, & par conséquent $\varepsilon - \delta + x - v = -31 + 19 - 49 = -12 - 49$. Ainsi l'erreur de 49^{j}. commise sur $\varepsilon - \delta = -12$, seroit plus que quadruple de cette quantité: ce qu'on ne sauroit guères supposer; car il faudroit pour cela (même dans la combinaison la plus favorable) qu'on se fût trompé sur chacun des nombres trouvés 31 & 19, d'une quantité égale à chacun de ces nombres; ce qui détruiroit toute espéce de confiance dans le résultat de ce calcul.

30. De-là on peut conclure que y est beaucoup plus

(a) M. Clairaut trouve dans son Mémoire de 1758, que la différence est de 37 jours; en quoi il s'est trompé à son désavantage, n'ayant pas fait attention au retranchement de 10 jours qu'il faut faire de 1531 à 1607, suivant le nouveau style.

petit que $+ 22$, & vraiſemblablement même eſt négatif, ainſi qu'on le va voir. Comme les quantités ϵ, δ, dépendent des obſervations de 1531 qui ſont peu éxactes, ſuppoſons que dans chacune de ces quantités ϵ, δ, on ſe ſoit trompé de la moitié ; ce qui donne dans la combinaiſon la plus favorable, $x = - 15$, $\nu = 9$: cette ſuppoſition eſt d'autant moins choquante, que dans un calcul fait poſtérieurement, M. Clairaut a trouvé la quantité $\delta = -8$, après l'avoir trouvée d'abord $= - 19$, ce qui donneroit $\delta + \nu = -8$, & $\nu = -8 + 19 = 11$; ainſi l'erreur du premier calcul de la quantité δ, en ſuppoſant le ſecond calcul à peu-près éxact, auroit été de plus de la moitié du total. On aura donc $x + y - \nu = - 24 + y = -27$; & $y = - 3$ (*a*).

31. Donc puiſque $\zeta + z - y = - 32$, on aura $\zeta + z = - 35$. Donc la vraie valeur de $\gamma + \beta$ ſera tout au plus $198 - 35 = 163$; donc l'erreur commiſe ſur $\gamma + \beta$ ſeroit au moins de 35 ſur 163, c'eſt-à-dire, de plus d'un cinquiéme.

32. Si on ſuppoſe les erreurs x, ν plus petites que de la moitié du total, ou même égales à cette moitié, mais

(*a*) Cette erreur $y = - 3$ pourra paroître aſſez petite par rapport à la quantité $\alpha = - 420$; mais il faut, ou adopter cette concluſion, ou ſuppoſer que l'erreur commiſe dans les derniers réſultats du calcul ($\epsilon = - 31$, & $\delta = - 19$) eſt égale ou à-peu-près égale à chacun de ces réſultats mêmes ; enſorte que ϵ au lieu d'être $- 31$, auroit dû être environ $- 60$, & que δ au lieu d'être $- 19$, auroit dû être à-peu-près $= 0$; or de pareilles erreurs dans les quantités qu'on cherche, m'ont paru trop conſidérables pour les ſuppoſer.

d'un

d'un autre signe, alors l'erreur $z + \zeta$ seroit beaucoup plus considérable, & pourroit aller à la moitié du tout, ou au-delà. Il n'est donc pas surprenant que quelques Mathématiciens ayent trouvé l'erreur égale à $\frac{1}{4}$ du total. C'est qu'ils supposoient les erreurs x, v, plus petites que de la moitié des quantités auxquelles elles se rapportent; supposition qu'il étoit assez naturel de faire. La nature de la question présente est telle, que quand on diminue les erreurs dans un sens, elles augmentent dans un autre.

33. J'ai supposé ici avec M. Clairaut dans son Mémoire de 1758, $\delta = -19$, parce qu'encore une fois, c'est de ce Mémoire seul qu'il s'agit ici. Dans *sa Théorie des Comètes*, il trouve δ plus petit de la moitié, & $= -8$; donc $\epsilon + \alpha - \delta = -443$; donc $x + y - v = -16$. Ainsi 1°. en n'ayant égard qu'à l'action de Jupiter, l'erreur dans la différence des deux premieres périodes, ne seroit que de 16 jours. 2°. M. Clairaut trouve qu'en ayant égard de plus à l'action de Saturne, l'erreur seroit de 33 jours (*a*). La considération de l'action de Saturne sur les

(*a*) M. Clairaut dit dans *sa Théorie des Comètes*, qu'en négligeant l'action de Saturne sur les deux premieres périodes, il avoit d'abord trouvé une erreur de 37 jours, & que cette erreur s'est réduite à 33 en ayant égard à l'action de Saturne, & en rectifiant quelques erreurs de calcul qui s'étoient glissées dans les autres opérations. Il devoit dire (V. la Note sur l'art 29.) que l'erreur, qui n'étoit d'abord que de 27 jours (& non de 37) en négligeant l'action de Saturne, & qui même n'est proprement que de 16 jours, s'est trouvée ensuite de 33 jours, en ayant égard à cette action. Ainsi plus de scrupule dans les opérations n'a fait ici qu'augmenter l'erreur; c'est ce qui est encore arrivé à ce savant Géometre dans d'autres occasions; comme on le

deux premieres périodes, ne fait donc ici que multiplier l'erreur, & par conséquent on peut avec justice faire abstraction de ce calcul, & regarder l'effet de l'action de Saturne comme nul dans les deux premieres périodes.

34. La supposition de $x+y-\nu=-16$, donneroit (en faisant toujours $y=22$) $x-\nu=-38$, & par conséquent $\epsilon-\delta+x-\nu=-31+8-38$ $=-23-38$. Et l'erreur -38 commise sur $\epsilon-\delta$ seroit encore trop forte; puisqu'il faudroit qu'on se fût trompé de la valeur entiere de chacune des quantités ϵ,δ. En corrigeant l'erreur par la supposition de $x=\frac{\epsilon}{2}$; $\nu=\frac{\delta}{2}$, c'est-à-dire, $x=-15$, $\nu=4$, on auroit $y=+3$, & $\zeta+z=-29$. Ainsi l'erreur seroit encore de 29 sur 169, c'est-à-dire d'environ $\frac{1}{5}$. Au reste je ne fais cette remarque qu'en passant, parce qu'il n'est point question ici des résultats que trouve M. Clairaut dans sa *Théorie des Comètes*, mais de ceux qu'il a annoncés dans son Mémoire de 1758, & qui ont été l'objet de la contestation. Or on a vû (art. 31.) que l'erreur dans le dernier résultat est vraisemblablement de plus de $\frac{1}{5}$.

35. Donc en faisant la répartition la plus vraisemblable

peut voir p. 229 de sa *Théorie des Comètes*. Que faut-il conclure de-là? Rien autre chose, sinon que le Probléme des perturbations des Comètes n'est pas susceptible *par sa nature* d'un certain degré de précision dans sa solution; & c'est uniquement ce que je me propose de faire voir dans cet Ecrit, sans prétendre d'ailleurs attaquer les calculs de M. Clairaut, dont on ne sauroit trop louer le courage & la patience.

& la plus favorable des erreurs commises dans les différens résultats, la différence de 32 jours entre le résultat du calcul & l'observation du périhélie de 1759, suppose une erreur de plus de $\frac{1}{5}$ dans le calcul de la quantité $\gamma + 6$.

36. Quelque considérable que paroisse cette erreur, il seroit néanmoins injuste de l'imputer à M. Clairaut, puisqu'il a reconnu lui-même dans son Mémoire de 1758, que son calcul pourroit bien différer d'un mois d'avec l'observation. Or cette différence d'un mois décomposée & analysée de la maniere la plus vraisemblable, suppose une erreur de $\frac{1}{5}$, & au delà, sur le dernier résultat, ainsi que nous l'avons fait voir; & tout Calculateur qui prévoit & annonce la quantité dont il peut s'être trompé, ne doit point être chargé de cette erreur, quelque considérable qu'elle puisse être.

37. Il est vrai que dans un Ecrit postérieur, cet habile Mathématicien semble attribuer la différence susdite (au moins en grande partie) aux erreurs des observations antérieures, à l'action des autres Planètes & de leurs Satellites, à celle des Comètes, & à la résistance de l'éther. Mais il ne paroît pas que ces différentes causes puissent altérer beaucoup les révolutions de la Comète. M. Clairaut convient lui-même dans son Mémoire de 1758, que l'action des autres Planètes *ne produit qu'un effet presque insensible*; & à l'égard de l'action des autres Comètes, ou même de quelque Planète trop distante du Soleil pour être jamais apperçue, il convient aussi

qu'il paroît peu vraiſemblable que de telles cauſes de dérangemens ayent eu lieu. Enfin la réſiſtance de l'éther, dont M. Clairaut n'avoit point parlé dans ſon Mémoire de 1758, paroît ne devoir produire ici qu'un effet preſque inſenſible. Car comment concevoir que cette réſiſtance, qui n'altere pas ſenſiblement un grand nombre de révolutions ſucceſſives des Planètes, rende chaque révolution de la Comète plus courte d'environ un mois dans l'eſpace de 75 ans?

38. Ajoutons, que quelles que ſoient les différentes cauſes, négligées dans le calcul, qui peuvent altérer le mouvement de la Comète, M. Clairaut les a ſéparées entiérement (& ce me ſemble avec raiſon) dans ſon Mémoire de 1758, des cauſes d'erreur qui viennent des quantités négligées dans le calcul de l'action de Jupiter & de Saturne; car il s'exprime ainſi à la fin de ſon Mémoire, après avoir annoncé le retour de la Comète pour le 15 Avril 1759. » On ſent avec quels ménagemens je » préſente une telle annonce, *puiſque tant de petites quan-* » *tités négligées néceſſairement par les méthodes d'appro-* » *ximation pourroient bien en altérer le terme d'un mois....* *puiſque* d'ailleurs *tant de cauſes inconnues, ainſi que je l'ai dit au commencement de ce Mémoire, peuvent avoir agi ſur notre Comète.* Ces cauſes inconnues (les ſeules dont M. Clairaut ait parlé dans ſon Mémoire de 1758) ſont l'action des autres Planètes & de leurs Satellites; le mot *d'ailleurs* fait voir que M. Clairaut ne penſoit point alors à leur attribuer la différence d'un mois qui

pouvoit se trouver entre son calcul & l'observation, mais uniquement aux quantités négligées dans le calcul; & je n'imagine pas non plus qu'il regarde la résistance de l'éther comme une cause qui puisse influer fort sensiblement dans l'altération du mouvement des Comètes, sur-tout dans celle de la Comète de 1682.

39. De toute cette discussion, il s'ensuit 1°. qu'on peut attribuer aux seules quantités qu'on est forcé de négliger dans le calcul de l'action de Jupiter & de Saturne, la différence d'un mois qui s'est trouvée entre le calcul & l'observation; 2°. que cette différence doit être comparée, non à la révolution entiere de la Comète, ni à plus forte raison à la somme de deux révolutions successives, mais à la différence de 18 mois qui se trouve entre les deux dernieres périodes; & qu'ainsi l'erreur est au moins de $\frac{1}{18}$, & non pas de $\frac{1}{900}$, ni de $\frac{1}{1800}$, comme l'ont prétendu quelques Ecrivains peu instruits. 3°. Qu'en éxaminant quelles peuvent être les erreurs les plus vraisemblables des différentes parties du calcul, on trouve que l'erreur commise sur l'altération de la derniere période, peut être $\frac{1}{5}$ de cette altération. 4°. Que cette erreur, quelque considérable qu'elle soit, doit être imputée uniquement à la nature du Problême; puisque d'une part il n'est peut-être pas possible (sans s'engager dans des calculs impraticables) de déterminer l'altération plus éxactement; & puisque d'un autre côté on doit se proposer dans ces sortes de calculs, non de prédire éxactement le retour d'une Comète, de maniere qu'on puisse

avoir son lieu dans le Ciel, à 30, 40 & 50 degrés près, mais seulement de prouver, que par la Théorie de la gravitation, l'action de Jupiter & de Saturne doit altérer considérablement le cours de ces Astres; & c'est ce que M. Clairaut a suffisamment prouvé par son travail.

40. Voilà mon sentiment sur cette dispute; sentiment que plusieurs Savans m'ont engagé à mettre par écrit, & qui ne peut, ce me semble, offenser personne, ni par lui-même, ni par la maniere dont j'ai tâché de l'exposer. Quoique ce Mémoire soit fait il y a long-tems, j'ai différé jusqu'à présent à le mettre au jour, parce qu'il m'a paru à propos d'attendre un tems où personne ne prendroit plus guères d'intérêt à cette question, que celui de la vérité. Peut-être même n'aurois-je point communiqué aux Géometres ces réfléxions, si la méthode dont je me sers pour déterminer d'une maniere vraisemblable les erreurs du calcul dans la théorie des perturbations des Comètes, n'étoit, ce me semble, fondée sur des considérations assez délicates, qui peuvent la rendre curieuse par elle-même, & utile dans d'autres occasions.

Fin du treiziéme Mémoire.





QUATORZIÉME MÉMOIRE.

Réfléxions sur le Problême des trois Corps, avec de nouvelles Tables de la Lune, d'un usage très-simple & très-facile.

I.

J'AI publié dans mes *Recherches sur le Systême du Monde,* imprimées en 1754, des Tables de la Lune, telles que la théorie me les avoit données. J'avois cru devoir conserver dans ces Tables la forme de celles des *Institutions Astronomiques*, parce que les Astronomes me paroissoient accoutumés à cette forme, & parce que d'ailleurs cette forme me sembloit avoir quelques autres avantages, dont j'ai fait mention p. 249 & 250 de la premiere Partie des *Recherches* déja citées.

II.

Ayant fait réfléxion depuis, qu'il seroit très-commode & très-utile aux Astronomes d'avoir des Tables particulieres qui marquassent seulement la différence des miennes d'avec celles des *Institutions*, j'ai publié ces Tables

de correction au commencement de 1756 ; & je me proposois d'en faire usage, pour m'assurer de combien la théorie s'écartoit des observations, & pour rectifier par les observations ces mêmes Tables de correction, qui étant ensuite réunies & comme incorporées dans les Tables des *Institutions Astronomiques*, auroient vraisemblablement donné les lieux de la Lune aussi éxactement qu'on auroit pû le desirer.

I I I.

Mais d'autres occupations m'ayant empêché de suivre ce travail, je n'ai pû tirer de ces Tables de correction tout le parti que j'aurois desiré. Cependant elles ne m'ont pas été tout-à-fait inutiles. Car comme j'avois indiqué les cas où il falloit les comparer aux observations pour juger de leur éxactitude, quelques Astronomes ayant bien voulu prendre la peine de les calculer dans quelques-uns de ces cas, ont cru s'appercevoir que j'avois fait la *variation* trop petite, & l'*évection* trop grande ; ce qui ne m'a point paru surprenant, malgré le soin & la patience que j'avois mis à calculer en particulier la valeur de ces deux équations ; car j'ai toujours été persuadé, & je le suis encore, que l'on ne peut jamais être assuré *à priori* d'avoir assigné à une minute près, ou même davantage, les coëfficiens de chacune des équations de la Lune. J'en ai dit ailleurs les raisons plus en détail.

I V.

Il étoit donc nécessaire en conséquence, de réformer ces

ces deux équations dans mes Tables de correction. D'un autre côté je remarquois des différences assez considérables entre mes Tables & celles de M. Mayer, qui jusqu'ici ont paru les plus éxactes, pour me faire naître des soupçons sur l'éxactitude des miennes; enfin je ne pouvois me dissimuler que la forme des Tables de M. Mayer étoit de toutes la plus commode & la plus expéditive. Ces considérations m'ont engagé à calculer de nouvelles Tables de la Lune, auxquelles j'ai donné en partie cette derniere forme, en la simplifiant encore. Ces Tables seront beaucoup plus éxactes que celles que j'ai publiées précédemment, & seront d'ailleurs d'un calcul aussi court qu'on puisse le desirer.

V.

1. Mais avant que d'entrer dans le détail de mes nouveaux calculs, je crois devoir faire quelques réfléxions sur la solution que j'ai donnée du Problême des trois Corps, & en montrer les avantages. Cette discussion est d'autant plus nécessaire, qu'il me paroît très-essentiel de rendre sur cette matiere à chacun la justice qui lui appartient. Quoiqu'on ait affecté, ce me semble, de déprimer mon travail sur ce sujet, je me flatte que les Géometres en jugeront autrement, quand ils auront lû les réfléxions suivantes, qui pourront être utiles à l'Histoire de ce fameux Problême, & qui renferment d'ailleurs des discussions délicates, dont l'Analyse pourra tirer quelque fruit.

2. Le Problême des trois Corps, entant qu'il est applicable au mouvement des Planètes, se réduit, comme Mrs Euler, Clairaut & moi l'avons remarqué, à trouver, au moins par une méthode d'approximation, l'orbite d'une Planète qui est attirée vers le Soleil en raison inverse du quarré de la distance, & qui est en même tems troublée par deux forces φ & π, très-petites par rapport à la gravitation, & dont la premiere φ est dans la direction du rayon vecteur, & la seconde π perpendiculaire à ce rayon.

3. Pour déterminer cette orbite, il faut remplir deux objets; 1°. trouver l'équation différentielle; 2°. intégrer cette équation.

4. Quant au premier objet, je crois y être arrivé par une méthode beaucoup plus simple qu'aucun des Géometres qui ont résolu la même question.

5. Cette méthode consiste à prendre d'abord l'équation de l'orbite, en la supposant décrite par une force Q qui tende toujours vers le centre commun des rayons vecteurs; cette équation, comme le savent tous les Géometres, est $dz = \frac{-dx}{xx\sqrt{\frac{1}{hh} - \frac{2\int Q dx}{gghh} - \frac{1}{xx}}}$; laquelle en faisant $\frac{1}{x} = u$, & en différentiant, se change en $ddu + udz^2 - \frac{Qdz^2}{hhuugg} = 0$.

6. Dans l'orbite ainsi décrite, l'Elément du tems seroit

$\frac{xxdz}{gh}$, c'est-à-dire, proportionnel au secteur; mais dans cette même orbite décrite en vertu des forces Ψ & π, dont l'une est supposée dans la direction du rayon vecteur, & l'autre perpendiculaire à ce rayon, l'Elément du tems seroit $\frac{qxxdz}{gh}$, q étant une inconnue que nous déterminerons dans un moment. Dans cette derniere orbite décrite en vertu des forces Ψ & π, la force qui agit suivant le rayon vecteur, est $\Psi + \frac{\pi dx}{xdz}$, comme il est aisé de s'en assurer par une décomposition très-simple de la force π: de plus cette force $\Psi + \frac{\pi dx}{xdz}$ faisant parcourir la même petite ligne parallèle au rayon vecteur, qui est parcourue en vertu de la force Q, il s'ensuit que la force $\Psi + \frac{\pi dx}{xdz}$ est à la force Q, par les principes de Méchanique, en raison inverse des quarrés des tems, c'est-à-dire, comme 1 est à q^2; donc $Q = \left(\Psi + \frac{\pi dx}{xdz}\right) q^2$; or on trouve par un calcul fort simple que $q^2 = \left(1 - \frac{ds}{vxxdz}\int\frac{\pi x ds}{v}\right)^2$, ou $q^2 = \frac{1}{1 + 2\int\frac{\pi x^3 dz}{g^2 hh}}$ (a); donc l'équation de

(a) Cette seconde équation se tire de l'équation $d(xxdz) = \pi x dt^2$, qui donne en multipliant par $xxdz$, l'intégrale $\frac{(xxdz)^2}{2}$

l'orbite sera $ddu + udz^2 - \frac{dz^2}{uugghh} \times q^2 \left(\Psi - \frac{\pi du}{udz}\right)$ $= o$, dans laquelle on peut mettre indifféremment pour q^2, une des deux valeurs trouvées ci-dessus.

7. On voit donc que j'arrive à cette équation par la méthode & le calcul du monde le plus facile, en substituant dans la formule (très-connue & très-usitée) des trajectoires décrites par une seule force centrale, à la place de Q sa valeur, qu'une simple Analogie m'a fournie ; & que je n'ai pas besoin des transformations & des substitutions épineuses que d'autres Géometres ont em-

---

$dt^2 \int \pi x^3 dz + \frac{dt^2 \,.\, g^2 h^2}{2}$. Voyez *Rech. sur le Systême du Monde*, I. Partie, p. 14. On peut encore considérer que dt, ou $\frac{ds}{v} = \frac{xxdz}{gh} - \frac{ds}{vgh} \int \frac{\pi x ds}{v}$, comme je l'ai trouvé dans mon Mémoire de 1745; ce qui donne $q = 1 - \frac{ds}{vxxdz} \int \frac{\pi x ds}{v}$; expression qui revient absolument au même que $q = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\int \frac{\pi x^3 dz}{gghh}}}$ comme il est aisé de s'en assurer; car $\left(1 + 2\int \frac{\pi x^3 dz}{gghh}\right)^{-\frac{1}{2}}$ réduit en serie, donnera précisément la même formule que $1 - \frac{ds}{vxxdz} \int \frac{\pi x ds}{v}$, en mettant pour $\frac{ds}{v}$, 1°. sa valeur primitive $\frac{xxdz}{gh}$; 2°. sa valeur corrigée $\frac{xxdz}{gh}\left(1 - \int \frac{\pi x^3 dz}{g^2 h^2}\right)$; & ainsi de suite.

ployées pour parvenir à la même équation.

VI.

1. A l'égard de l'intégration de cette équation, je ne ſai pourquoi un très-ſavant Mathématicien l'a appellée une *intégration délicate & neuve*; car dès 1740 (ſept ans avant qu'il fût queſtion du Problême des trois Corps), M. Euler avoit donné dans ſa Piéce ſur le *Flux & Reflux de la Mer*, p. 301 & ſuiv. une méthode pour intégrer les équations de cette forme $ddu + Kudz^2 + \Sigma dz^2 = 0$, K étant une conſtante quelconque, & Σ une fonction quelconque de z. Cette méthode, que M. Euler explique aſſez au long, & que j'ai depuis dévelopée & un peu ſimplifiée (ce qui étoit très-facile) dans l'art. 101 de la premiere Edition de mon *Traité de Dynamique*, imprimé en 1743 (quatre ans avant aucune ſolution connue du Problême des trois Corps) eſt analogue à celle dont M. Bernoulli s'eſt ſervi en 1697, pour intégrer les équations de cette forme $du + Kudz + \Sigma dz = 0$. Elle conſiſte à prendre $u =$ au produit de deux indéterminées; on la peut voir miſe en uſage, p. 131 de la ſeconde Partie de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, où elle eſt appliquée à l'intégration même de l'équation différentielle du Problême des trois Corps.

2. La méthode, par laquelle le ſavant Mathématicien déja cité a intégré cette équation, ſe déduit aiſément de cette méthode des indéterminées, qui eſt même plus analytique; car la méthode des indéterminées fait trouver

directement la quantité cos. z, par laquelle le savant Mathématicien multiplie l'équation avant que de l'intégrer. Cette multiplication semble supposer qu'on connoissoit déja l'intégrale par une autre méthode plus directe, dont on a ensuite abrégé tant soit peu le calcul, en multipliant les différentielles avant l'intégration, par les quantités que la méthode des indéterminées a fait trouver.

3. En effet, suivant la méthode donnée en 1743, dans mon *Traité de Dynamique*, soit $u = sq$; on trouve $sddq + 2dsdq + qdds + sqdz^2 + \Sigma dz^2 = 0$; & faisant (comme je l'ai prescrit dans l'endroit cité) $sddq + sqdz^2 = 0$, on a $q = \cos. z$, & $2dsdq + qdds + \Sigma dz^2 = 0$, ou $d(qqds) + \Sigma qdz^2 = 0$; ou mettant pour s sa valeur $\frac{u}{q} = \frac{u}{\cos. z}$ $d\left(\frac{\cos. z^2 du}{\cos. z} + udz \sin. z\right) + \Sigma qdz^2 = 0$, ou $ddu \cos. z + udz^2 \cos. z + \Sigma dz^2 \cos. z = 0$; ce qui prouve qu'il faut multiplier l'équation par cos. z pour la rendre intégrable, & pour avoir l'intégrale $du \cos. z + udz \sin. z + dz \int \Sigma dz \cos. z = \text{const.}$

4. Au reste, soit que les Géometres, qui ont eu recours à cette préparation, l'ayent trouvée par la méthode des indéterminées ou autrement, il est au moins certain que M. Euler, & moi après lui, sommes les premiers qui ayons donné des méthodes pour l'intégration de ces sortes d'équations, plusieurs années avant qu'on en pût prévoir l'usage par rapport au Problême des trois Corps.

Cela est si vrai, que M. Euler, dans ses Opuscules imprimées à Berlin en 1746, p. 260, cherchant la quantité P, qu'il faut ajouter à u dans l'hypothèse de la résistance du milieu, trouve cette équation $ddP + Pdz^2 = \frac{sdz^2}{cg}$, qui est précisément semblable à celle du Problême des trois Corps; & il ajoute, *quæ si methodo alibi expositâ integretur, dabit* $P = \frac{\sin. t}{cg} \int s\,dt \cos. t - \frac{\cos. t}{cg} \int s\,dt \sin. t$; résultat qui est précisément semblable à celui que le savant Mathématicien déja cité a donné depuis, & qu'il regarde, on ne voit pas pourquoi, comme le caractere distinctif de sa solution, qui la rend, selon lui, supérieure à toutes les autres.

Il est donc incontestable; 1°. qu'on avoit long-tems avant 1747, des méthodes pour intégrer l'équation $ddu + udz^2 + \Sigma dz^2$; 2°. qu'on avoit la formule même qui exprime l'intégrale de cette équation; & que ceux qui l'ont intégrée depuis, n'ont rien ajouté à cet égard à ce que les Géometres savoient.

VII.

1. J'ai donné, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin de 1748 & 1750, une méthode générale pour intégrer des équations beaucoup plus compliquées que l'équation $ddu + udz^2 + \Sigma dz^2 = 0$, & dont elle n'est qu'un cas très-simple. Cette méthode, qui dans les Mémoires de Berlin de 1748, est datée du 13 Avril 1747,

& qui par conséquent est encore antérieure à toutes les solutions du Problême des trois Corps, est celle dont je me suis servi la même année 1747, pour intégrer l'équation $ddu + udz^2 + \Sigma dz^2$, relative au Problême des trois Corps.

2. Ce qui m'a déterminé à faire usage dans cette solution, des exposans imaginaires (dont j'aurois pû me passer, puisque dès 1743 j'avois intégré de pareilles équations sans employer ces exposans); c'est que l'usage de ces exposans imaginaires dispense de se souvenir des formules des sinus & des cosinus multipliés entr'eux, desquelles on a besoin dans la théorie des perturbations des Planètes. D'ailleurs la solution que j'ai employée, & où se trouvent ces exposans imaginaires, a l'avantage de pouvoir être appliquée à un grand nombre d'autres équations différentielles, plus compliquées que celle à laquelle se réduit le Problême des trois Corps. Enfin les exposans imaginaires ne causent aucun inconvénient dans le résultat de la solution, puisque j'ai donné les moyens de faire disparoître ces exposans, si on le juge à propos (*a*). En un mot, qu'on se serve des exposans imaginaires ou non, on parviendra toujours dans tous les cas à la même formule.

VIII.

1. Un des deux Mathématiciens qui ont donné dans le

(*a*) Voyez là-dessus mon Mémoire *sur la Théorie des Comètes*, §. V. Il est imprimé dans ce Volume.

le même tems que moi, la ſolution du Problême des trois Corps, regarde comme un avantage particulier à ſa ſolution (& qui la rend, ſelon lui, préférable à la mienne & à celle de M. Euler), celui de donner l'intégrale de l'orbite ſons une forme telle, qu'elle renferme *deux parties;* dont l'une eſt l'équation de l'orbite non troublée, & l'autre exprime les dérangemens cauſés à cette orbite par les forces perturbatrices. Comme cette aſſertion attaque ma ſolution, & tend à la déprimer, je me crois obligé d'y répondre.

J'obſerve d'abord, que quand il s'agit de l'orbite des Comètes, où le terme $u\,d\,z^2$ reſte *néceſſairement* ſans coëfficient, l'intégrale contiendra *néceſſairement ces deux parties*. Car les trois premiers termes de l'équation différentielle ſeront alors, comme je l'ai expreſſément remarqué dans mon Mémoire de 1745, art. XVII. (& comme je l'ai rappellé ci-deſſus, §. IV & VI. de ma *Théorie des Comètes*) $ddu + udz^2 - Fdz^2 = 0$; or ces trois premiers termes ſont l'équation differentielle de l'orbite non troublée, & par conſéquent l'intégrale contiendra *néceſſairement* deux parties; dont l'une repréſentera l'équation de cette orbite non troublée; & l'autre, les dérangemens qui y ſont produits par l'action des forces perturbatrices.

2. La méthode du ſavant Mathématicien dont nous venons de parler, n'a donc encore à cet égard aucun avantage, & ne peut même en avoir, puiſque la ſéparation de l'intégrale en deux parties, eſt une ſuite *néceſſaire*

de l'intégration dans le cas de l'orbite des Comètes, où le terme $u\,dz^2$ ne sauroit avoir d'autre coëfficient que l'unité. Mais je vais plus loin, & je me propose de faire voir que dans le cas de l'orbite des Planètes, cette disposition de l'intégrale a plusieurs inconvéniens considérables.

IX.

1. Ces inconvéniens, que je vais détailler, viennent en général de ce que cet habile Géometre a laissé mal-à propos, *dans le cas de l'orbite des Planètes*, l'équation différentielle de l'orbite sous la forme $ddu + u\,dz^2 + \Sigma\,dz^2 = 0$. En conséquence l'équation intégrée contient un coëfficient de cette forme A cos. z; or si ce coëfficient se trouvoit dans la valeur du rayon vecteur, il en résulteroit dans la formule intégrale donnée par ce Géometre, des termes affectés d'arcs de cercle, qui rendroient la solution fautive. Pour éviter cet inconvénient, l'habile & adroit Analyste a recours à la méthode des indéterminées; il suppose le rayon de l'orbite égal à une formule dont les coëfficiens sont inconnus, & dans laquelle il a soin que cos. z ne se trouve pas; ensuite il substitue cette valeur dans l'intégrale générale de l'équation de l'orbite, & il fait égal à zéro dans cette intégrale, le terme qui contiendroit cos. z.

2. On pourroit d'abord demander sur quel fondement ce Géometre donne à la valeur du rayon la forme qu'il choisit, & dans laquelle il n'y a d'indéterminés que les

coëfficiens constans. D'où sait-on que la valeur du rayon doit avoir cette forme? Ne pourroit-on pas croire qu'en donnant une autre forme à la valeur du rayon, toujours avec des coëfficiens indéterminés, substituant cette valeur dans l'intégrale générale, & comparant les termes d'une autre maniere, on parviendroit à un autre résultat qui n'approcheroit pas moins du vrai que le premier, ou du moins qui pourroit paroître aussi légitime, puisque l'Analyse n'offriroit aucune raison de préférence? Et ce doute ne seroit-il pas d'autant plus fondé, qu'il ne s'agit point ici d'avoir la valeur du rayon de l'orbite éxactement, mais seulement à-peu-près?

3. D'où sait-on en particulier que la valeur du rayon ne doit point contenir cos. z? Il seroit d'autant plus naturel de penser le contraire, que l'équation de l'orbite non troublée contient ce terme cos. z avec un coëfficient considérable, & qu'il est assez difficile de concevoir (sur-tout quand on se contente de le supposer, & qu'on ne le tire pas directement de la solution même) comment ce terme si considérable peut disparoître tout-à-coup par l'action de très-petites forces perturbatrices?

4. La solution dont nous parlons, porte même à conserver les termes de cette forme; car un des grands avantages de cette solution (selon son Auteur) est de renfermer d'une part l'équation de l'orbite non troublée, & de l'autre la perturbation; or il est naturel de croire que la premiere substitution à faire dans la partie qui contient la perturbation, est celle du rayon de l'orbite

primitive & non troublée, lequel rayon contient cos. z dans son expression.

5. Enfin puisque ce terme *A* cos. z, qu'on avoit exclu de la valeur du rayon, se retrouve après les substitutions dans l'intégrale, pourquoi vouloir l'en chasser en faisant son coëfficient égal à zéro ? Quand même on accorderoit à l'Auteur de cette solution, qu'il a pû omettre ce terme dans la premiere valeur approchée qu'il a supposée au rayon de l'orbite, il n'en seroit pas plus en droit de le faire disparoître dans la valeur tirée de l'intégrale. Car la premiere valeur qu'il a supposée au rayon, n'est qu'une valeur approchée ; il peut donc se trouver dans la seconde valeur, & il s'y trouve en effet des termes très-petits qui ne sont pas dans la premiere ; or le terme qui contient cos. z, peut être du nombre de ces derniers, & avoir un coëfficient très-petit, comme les autres termes qui ne se trouvent pas dans la premiere valeur supposée au rayon ; pourquoi donc vouloir que le coëfficient de ce terme soit $= o$, lorsqu'on ne fait pas la même supposition sur les autres ?

6. Cette derniere objection revient pour le fond, à celle qui a été déja faite à ce savant Géometre par M. Fontaine, sur la supposition qu'il fait dans sa solution, du coëfficient de cos. z égal à zéro. M. Fontaine, en envisageant l'équation intégrée sous une autre forme, fait voir que supposer le coëfficient de cos. $z = o$, c'est supposer égale à zéro, une constante qu'on doit ajouter en intégrant, & qu'on n'est pas le maître de supposer nulle,

quand on n'a pas démontré directement & *à priori* qu'elle le doit être (*a*).

X.

1. Notre habile Analyste ne peut faire qu'une seule réponse à cette derniere objection & à toutes celles de l'article précédent; c'est que s'il conservoit dans la valeur du rayon des termes qui continssent cos. z, ces termes dans la suite du calcul introduiroient des arcs de cercle dans la valeur du rayon, & rendroient sa solution fautive. Mais en premier lieu, d'où sait-il que la valeur du rayon ne doit point contenir d'arcs de cercle? Il est vrai qu'elle ne doit point en contenir, pour être conforme à ce que les observations nous apprennent du mouvement des Planètes, & principalement de la Lune; mais il pourroit se faire que la théorie Newtonienne donnât à cet égard un résultat différent des Phénomènes; & supposer le contraire, c'est supposer ce qui est en question; il faut faire voir *à priori*, & par la nature de l'équation même (ce que notre savant Mathématicien n'a pas fait) que la valeur du rayon ne doit point contenir d'arcs de cercle.

2. En second lieu, quand même on se seroit assuré, par une voie directe & analytique, qu'il ne devroit point

(*a*) Le Mémoire de M. Fontaine sur ce sujet, doit se trouver dans le Recueil de ses Œuvres, qui est actuellement sous Presse, & qui vraisemblablement ne tardera pas à paroitre.

y avoir d'arcs de cercle dans la valeur du rayon, il y auroit, pour faire disparoître ces arcs, un autre moyen que de supposer égal à zéro le coëfficient de cos. z; ce seroit de donner à cos. z un coëfficient indéterminé A, & par le moyen de ce coëfficient & des autres, de rendre égaux à zéro les termes qui contiendroient des arcs de cercle dans l'expression du rayon trouvée par l'intégration. J'avoue que ce calcul seroit plus compliqué que celui dans lequel on fait $= o$ le coëfficient de cos. z; mais le degré de complication plus ou moins grand ne décide rien ici pour ou contre la méthode; il falloit faire voir *à priori*, & par la nature de l'équation même, pourquoi le coëfficient de cos. z doit être nécessairement égal à zéro, pour qu'il ne se rencontre point d'arcs de cercle dans l'expression du rayon vecteur; & c'est encore ce que l'Auteur de la solution dont il s'agit, n'a pas fait.

3. Il est vrai que dans la premiere substitution, où l'on néglige une grande quantité de termes, ceux qui renfermeroient des arcs de cercle ne donneroient point d'autre condition que celle du coëfficient A égal à zéro; mais qu'on continue le calcul, qu'on ajoute de nouveaux termes avec des coëfficiens indéterminés à la formule du rayon vecteur, & qu'on pousse l'éxactitude plus loin dans les substitutions, & on verra bientôt que les termes qui doivent renfermer des arcs de cercle dans l'intégrale, contiendront dans leur coëfficient d'autres indéterminées que A; que d'ailleurs cette indéterminée A s'y trouvera

élevée à différentes puiſſances, & que par conſéquent on pourra faire évanouir ces termes par d'autres ſuppoſitions que par celle de $A = o$.

4. En troiſiéme lieu, quand même toutes les ſuppoſitions qu'on peut faire pour anéantir les termes qui contiennent des arcs de cercle, reviendroient à celle de $A = o$ (ce qui n'eſt pas), il eſt certain que cela ne ſe voit pas facilement; & que la ſolution ſeroit au moins imparfaite à cet égard, puiſqu'on y auroit ſuppoſé comme vraies des choſes qui demandoient à être prouvées.

5. Enfin (& c'eſt ici le point important & déciſif) ſi dans la ſolution que nous examinons, les termes qui contiennent coſ. z donnent des arcs de cercle, c'eſt un défaut particulier à cette ſolution, & qu'elle n'auroit pas ſi l'Auteur eût donné à l'équation différentielle de l'orbite, & à ſon intégrale, la vraie forme qu'elle doit avoir dans le cas de l'orbite des Planètes, & ſinguliérement de l'orbite de la Lune.

6. Cette forme conſiſte à ſuppoſer, comme je l'ai fait, $u = a + t$, a étant la valeur premiere de u au commencement du mouvement. Cette valeur de u étant ſubſtituée dans l'équation différentielle, on verra, après le développement des différens termes, qu'au lieu du terme $u\,dz^2$ dont le coëfficient eſt l'unité, & qui fait le grand embarras de la ſolution que nous examinons, on aura un terme de cette forme $K\,t\,dz^2$, K étant un coëfficient différent de l'unité, & qui pour la Lune, par exemple,

eſt égal à environ $1 - \frac{3n^2}{2}$ (*n* étant le rapport du mouvement moyen du Soleil à celui de la Lune); au moyen de ce coëfficient, s'il ſe trouve dans l'expreſſion du rayon des termes qui renferment coſ. z, ces termes ne doivent point donner des arcs de cercle dans l'équation intégrée, mais des termes de cette forme $\frac{B \text{ coſ. } z}{K - 1}$, comme il réſulte de ma ſolution; toute autre ſolution eſt donc fautive à cet égard, & induit l'Analyſte en erreur.

X I.

1. Auſſi la ſolution que nous éxaminons, ne donneroit-elle point la vraie valeur du rayon vecteur de la Lune, ſi l'apogée du Soleil étoit immobile; car dans ce cas l'Auteur convient lui-même (Voyez ſa *Théorie de la Lune*, p. 51.) que ſa ſolution donneroit des arcs de cercle dans la valeur du rayon vecteur. Cependant il eſt aiſé de voir par l'article précédent, que dans le cas même où l'apogée du Soleil ſeroit immobile, il ne devroit pas y avoir pour cela des arcs de cercle dans l'expreſſion du rayon; car l'immobilité de l'apogée donneroit à la vérité des coſ. z dans la différentielle, mais on vient de voir que dans une ſolution éxacte (telle qu'eſt la nôtre) ces coſ. z ne doivent point donner d'arcs de cercle.

2. D'ailleurs en ſuppoſant même fauſſement que les termes qui renfermeroient coſ. z dans la différentielle, duſſent donner des arcs de cercle dans l'intégrale, on peut

peut demander à l'Auteur de la ſolution que nous examinons, pourquoi ces coſ. z, que renfermeroit l'équation différentielle dans le cas où l'apogée du Soleil ſeroit immobile, l'embarraſſeroient plus que les coſ. z que renferme l'équation intégrale primitive du rayon vecteur, & qu'il fait diſparoître au moyen des indéterminées? Pourquoi n'y auroit-il pas quelque expreſſion indéterminée à donner au rayon vecteur, & qui étant ſubſtituée dans l'équation différentielle, feroit diſparoître tous les coſ. z? Cela ſeroit facile : car trouvant d'abord au rayon vecteur (avec M. Clairaut) un terme de cette forme A coſ. z, & ſubſtituant ce terme dans l'équation différentielle; ſoit $m A dz^2$ coſ. z le terme qui en réſulte, & $B dz^2$ coſ. z le terme qui vient de l'immobilité ſuppoſée de l'apogée du Soleil; on aura $mA + B = o$, ou $A = -\frac{B}{m}$: ſuppoſition qui empêchera qu'il ne ſe rencontre des arcs de cercle dans l'intégrale. Pourquoi l'Auteur n'a-t-il pas fait cette ſuppoſition, ou pourquoi n'a-t-il pas démontré qu'il ne faut pas la faire?

XII.

1. En vain ce ſavant Mathématicien allégueroit-il ce qu'il a dit, p. 52 de ſa *Théorie de la Lune*, que l'apogée du Soleil n'eſt pas immobile, & qu'ainſi au lieu des coſ. z il y aura dans l'équation différentielle des coſ. pz, dans leſquels p eſt un nombre qui n'eſt pas exactement l'unité, quoiqu'il en differe preſque inſenſiblement, attendu le

mouvement presque insensible de cet apogée.

2. Cette réponse ne mettroit pas sa solution hors d'atteinte. Car 1°. il faudroit au moins qu'il convînt que cette solution seroit fautive dans le cas du repos de cet apogée, où d'autres solutions, telles que la mienne, n'ont pas le même inconvénient; or une solution qui ne s'étend pas à tous les cas où elle devroit & pourroit s'étendre, n'est pas une bonne solution. 2°. Dans le cas même de la mobilité de cet apogée, ce savant Géometre a tort de croire, comme il le dit, p. 52 de sa Théorie, que le diviseur de cos. pz dans l'intégrale soit $1 - pp$; & d'en conclure, comme il le fait au même endroit, *qu'on ne puisse trouver par la théorie* les coëfficiens de ces sortes de termes; car le diviseur seroit, non pas $1 - pp$, mais $K - pp$, ou (pour la Lune) à très-peu-près $1 - \frac{3n^2}{2} - pp$, c'est-à-dire, à-peu-près $-\frac{3n^2}{2}$; & comme le numérateur de ces termes est beaucoup plus petit, étant de l'ordre de $\frac{n^2 \lambda}{B}$, où λ est à-peu-près l'excentricité de l'orbe de la Terre, c'est-à-dire, $\frac{1}{60}$, & $\frac{1}{B}$ le rapport de la parallaxe du Soleil à celle de la Lune; il n'en résulte point d'inconvénient dans l'intégrale, puisque le coëfficient après l'intégration est encore de l'ordre de $\frac{\lambda}{B}$, c'est-à-dire, d'environ $\frac{15}{57 \cdot 60^2}$, en supposant la parallaxe du Soleil de 15″, & celle de la

Lune de 57′. C'eſt ce que j'ai fait voir plus en détail dans ma Théorie de la Lune, p. 237 & 244.

XIII.

1. Voilà une partie des défauts qu'on peut reprocher à la ſolution que nous éxaminons, & dont nous avons été forcés de parler, par la néceſſité de défendre la nôtre contre les objections de l'Auteur.

Ajoutons que cette méthode laiſſe à deſirer non-ſeulement du côté de l'éxactitude, mais encore du côté de la ſimplicité & de l'élégance. En effet, ſi on ſe permet avec l'Auteur de ſuppoſer une valeur indéterminée au rayon vecteur, l'intégration de l'équation différentielle de l'orbite devient alors abſolument inutile; il ſuffit de ſubſtituer dans la différentielle la valeur ſuppoſée du rayon vecteur, & de faire les coëfficiens des différens termes chacun égaux à zéro.

2. C'eſt la méthode qu'a ſuivie le célébre M. Euler, & qui eſt la plus ſimple & la plus facile de toutes; elle n'a qu'un ſeul inconvénient, comme je l'ai déja remarqué dans mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, art. 103, 104 & 106. C'eſt qu'on n'eſt pas aſſuré que la forme qu'on donne à l'expreſſion du rayon vecteur, ſoit la vraie; j'ai même fait voir que cette ſuppoſition avoit en effet produit une mépriſe dans la ſolution de M. Euler.

3. Mais l'inconvénient qui réſulte de cette ſuppoſition, eſt beaucoup moins grand dans la ſolution de M.

Euler, que dans celle que nous éxaminons. On desireroit seulement que M. Euler eût démontré directement & *à priori*, pourquoi la forme qu'il suppose au rayon vecteur est la vraie; & en particulier, pourquoi il ne fait point entrer cos. z dans l'expression de ce rayon. Du reste sa méthode pour connoître le rayon vecteur par le seul secours de l'équation différentielle, est très-courte, très-élégante, & n'est point sujette aux autres difficultés que les cos. z font naître dans la solution éxaminée ci-dessus; difficultés particulieres à cette solution, puisqu'elles viennent de la forme peu avantageuse que son Auteur a donnée à l'intégrale qui exprime le rayon de l'orbite.

X I V.

1. La solution que j'ai donnée du Problême des trois Corps, appliqué au mouvement des Planètes, demande des intégrations pour trouver la valeur du rayon vecteur; & à cet égard elle est moins simple que celle de M. Euler; mais elle a sur cette solution & sur toutes les autres, l'avantage de donner directement & sans aucune supposition précaire, la forme du rayon vecteur. Et d'abord l'on voit d'un coup d'œil par la premiere intégration, qu'à cause du coëfficient K du terme $t\,dz^2$, le rayon vecteur ne doit point renfermer de cos. z.

2. De plus ma solution a sur celle que j'ai éxaminée dans ce Mémoire, l'avantage de n'être point fautive, dans le cas même où il se rencontreroit des cos. z dans l'équation différentielle; cas où cette derniere solution

donne des arcs de cercle, quoiqu'il ne doive point y en avoir; voyez §. XI.

3. En général si $A\,dz^2$ cos. Qz est un des termes de la différentielle, ma méthode donne dans tous les cas le diviseur que A doit avoir dans l'intégrale, & qui n'est point $1 - QQ$, comme le donne la solution éxaminée dans ce Mémoire, mais $1 - \frac{3\,n^2}{2} - QQ$, ou plus généralement $K - QQ$, K étant le coëfficient du terme $t\,dz^2$.

4. Ma méthode a de plus l'avantage de la facilité du calcul. Car 1°. la seule inspection du coëfficient K du terme $t\,dz^2$ donne le premier terme de la série qui exprime le mouvement de l'apogée; ensorte que $z\sqrt{K}$ est la premiere valeur de l'anomalie. 2°. De même la seule inspection des termes qui renferment cos. Nz dans la différentielle, donne tout d'un coup, & sans employer aucun autre calcul, la correction qu'il faut faire au mouvement de l'apogée; ensorte que si γ est le coëfficient de ces termes, la correction à faire à $\sqrt{K}$ est $\sqrt{K + \frac{\gamma}{P}}$, P exprimant l'excentricité. Et l'on ne sauroit m'objecter que des termes de cette forme $\gamma\,dz^2$ cos. Kz devroient donner des arcs de cercle dans ma solution; car j'ai démontré *directement*, art. 27. de ma *Théorie de la Lune*, que la valeur du rayon ne devoit point contenir d'arcs de cercle dans le cas de l'orbite des Planètes, & j'ai donné le moyen de faire disparoître ces arcs. J'ai de

plus déterminé, p. 242 & 243 de la même Théorie; les cas où les termes de cette forme $\gamma\, dz^2 \cos. Kz$ donneroient des arcs de cercle; & j'ai remarqué que ces cas n'ont point lieu dans l'orbite des Planètes.

X V.

1. L'avantage que ma solution me paroît avoir de donner avec facilité & d'une maniere directe la forme du rayon vecteur, & le mouvement des apsides, a lieu non-seulement dans la théorie de la Lune & des autres Planètes, mais aussi dans tous les Problêmes du même genre, où il est question de trouver l'orbite décrite en vertu des forces perturbatrices ajoutées à la force primitive. Supposons, par exemple, avec le savant Géometre dont nous examinons la solution, que π soit $= 0$, & la force $\Psi = \frac{F}{x^2} + \frac{K}{x^3}$, ou $Fu^2 + Ku^3$ (a); alors l'équation différentielle de l'orbite, en employant ma méthode, & en faisant $u = a + t = 1 + t$, sera $ddt + (1 - \frac{K}{gg})\, t\, dz^2 - F\, dz^2 + dz^2 - K\, dz^2 = 0$; d'où l'on tire tout d'un coup en intégrant par ma méthode (art. 25 de ma *Théorie*) $t = \frac{(1 - K - F) \times (\cos. z \sqrt{1 - \frac{K}{gg}} - 1)}{1 - \frac{K}{gg}}$; & par conséquent la valeur de u ou $1 + t$.

(a) Voyez p. 18 de sa Théorie de la Lune.

2. Au contraire le Géometre dont nous venons de parler, eſt obligé, pour ce cas ſi ſimple, d'employer la méthode des indéterminées, qui eſt moins directe, & plus longue; moins directe, parce qu'on a beſoin, de l'aveu de ce Géometre, de ſavoir d'avance la forme que doit avoir l'expreſſion du rayon vecteur; plus longue, parce qu'il faut employer au moins trois indéterminées; la premiere, pour faire diſparoître le terme qui contiendroit cof. z; la ſeconde, pour connoître le coëfficient de z, ou, ce qui revient au même, le mouvement de l'apſide; & la troiſiéme, pour déterminer le terme conſtant que l'expreſſion de u doit contenir.

3. L'inconvénient de la méthode que nous éxaminons, eſt encore plus grand, lorſque la force Ψ eſt égale à $F u^2 + K u^m + L u^n$ &c. un des coëfficiens m, n &c. étant différent du nombre 3; car indépendamment de la longueur du calcul, qui eſt incomparablement plus grande que par ma méthode, ce cas a un inconvénient de plus que celui de $\Psi = F u^2 + K u^3$. En effet dans le cas où $\Psi = F u^2 + K u^3$, quoiqu'on ne ſoit pas ſûr d'abord que la valeur indéterminée qu'on a ſuppoſée au rayon vecteur, ait la forme convenable, on en eſt aſſuré à la fin du calcul, parce que l'intégrale ſe trouve éxacte, en déterminant convenablement les conſtantes inconnues. Au contraire dans le cas de $\Psi = F u^2 + K u^m + L u^n$ &c. l'intégrale n'eſt pas éxacte, & ne ſauroit l'être par aucune méthode; on ne ſauroit donc être ſûr que la forme qu'on a ſuppoſée au rayon vecteur, ſoit la vraie:

d'autant plus que si on lui donnoit une autre forme ; & dans laquelle il se trouvât, par exemple, des cos. z, la formule de notre savant Géometre donneroit en ce cas des arcs de cercle dans l'expression du rayon vecteur ; & qu'il faut démontrer auparavant (ce qu'il n'a pas fait) qu'il ne doit point y avoir des arcs de cercle dans cette expression.

4. Ma méthode n'est point sujette à ces inconvéniens. Car 1°. j'ai démontré (art. 27 de *ma Théorie de la Lune*) qu'il ne devoit point y avoir d'arcs de cercle dans l'équation de l'orbite, au moins dans le cas où K & L sont très-petits par rapport à F ; ce qui est le seul cas dont il soit question ici. 2°. Je trouve par le calcul le plus court & le plus simple, l'équation différentielle approchée $ddt + \left(1 - \frac{\overline{m-2}\,.\,K}{gg} - \frac{\overline{n-2}\,.\,L}{gg}\right) t\,dz^2 + (1 - K - L - F)\,dz^2 = o$, dont l'intégrale est par l'art. 25 de ma *Théorie*, $t = \frac{1 - K - L - F}{1 - \frac{\overline{m-2}\,.\,K}{gg} - \frac{\overline{n-2}\,.\,L}{gg}} \times \left(-1 + \cos.\, z \sqrt{1 - \frac{\overline{m-2}\,.\,K}{gg} - \frac{\overline{n-2}\,.\,L}{gg}}\right)$. 3°. Elle donne enfin, comme on le voit par l'art. 27 de cette même *Théorie*, un moyen facile d'approcher de plus en plus de la vraie valeur de t, & de corriger le mouvement déja trouvé des apsides, sans avoir aucune indéterminée à introduire dans l'expression du rayon, &

sans

ſans être embarraſſé des termes qui paroîtroient devoir donner des arcs de cercle dans l'expreſſion du rayon vecteur.

XVI.

1. On peut voir dans mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, p. 110 de la premiere partie, & p. 237 & ſuiv. pluſieurs autres remarques ſur l'intégration de l'équation différentielle de l'orbite des Planètes. Je ne répéterai point ici ces remarques, auxquelles je renvoye le Lecteur. J'ajouterai ſeulement à ce qui a été dit à la page 241 de cet Ouvrage, que quand il ſe trouveroit dans l'équation différentielle de l'orbite lunaire, des termes de cette forme coſ. $Nz - nz + \pi n z$, (N marquant, non pas la racine du coëfficient de $t\,d\,z^2$, mais le mouvement réel de l'apogée de la Lune, & π étant un nombre très-peu différent de l'unité, qui donne le mouvement de l'apogée du Soleil); il n'y auroit point à craindre que ces termes en introduiſiſſent de trop grands par l'intégration. Car le diviſeur de ces termes dans l'intégrale ſeroit (p. 244 & ſuiv. de notre Théorie) $1 - \frac{3\,n^2}{2} - (N - n + \pi\,n)^2$; c'eſt-à-dire, à-très-peu-près $1 - \frac{3\,n^2}{2} - N^2$, ou $\frac{3\,n^2}{2}$, qui ne ſeroit pas trop petit eu égard au coëfficient que pourroient avoir ces termes dans la différentielle. Ainſi quand même il ſe trouveroit dans l'équation différentielle des termes qui contiendroient coſ.

$Nz - nz + \pi nz$, ces termes, quoique fort augmentés par l'intégration, demeureroient encore très-petits.

XVII.

Après avoir exposé les avantages de ma solution du Problême des trois Corps, je ne dois point dissimuler qu'elle a des inconvéniens : mais ces inconvéniens lui sont communs avec toutes les autres solutions, & viennent de ce qu'on n'a point encore de méthode complette pour résoudre le Problême dont il s'agit.

Ces inconvéniens sont en général ;

1°. Que le grand nombre de quantités, qu'on est forcé de négliger, rend la valeur des coëfficiens très-incertaine. J'en ai donné la preuve dans la premiere & la troisiéme partie de mes *Recherches sur le Systéme du Monde*. Voyez premiere Partie, p. 197 — 204, 234, 235, 249, 250, 254; & troisiéme Partie, p. 17, 18, 29, 30, 31. Voyez aussi l'Ecrit inséré à la fin de la seconde Edition de mon *Traité de Dynamique*.

2°. Que les séries qui expriment la valeur des coëfficiens, ne sont pas toujours convergentes ; c'est ce qu'on remarque sur-tout dans celle qui exprime le mouvement de l'apogée, & dont le premier terme ne donne qu'environ la moitié de ce mouvement. M. Clairaut s'en est apperçu le premier, & a remarqué qu'en poussant le calcul plus loin, on retrouvoit l'autre moitié de ce mouvement. Mais quoique cette remarque soit très-importante, & réponde à la difficulté qui s'étoit élevée sur le mouvement de l'apo-

gée; cependant, pour s'assurer entiérement de la conformité de la théorie avec les observations, ce calcul ne suffisoit pas encore, ainsi que je l'ai déja remarqué ailleurs. Car les deux premiers termes de la série qui exprime le mouvement de l'apogée, étant à-peu-près égaux, il pouvoit se faire que la série ne fût pas convergente au-delà de ces deux termes; il falloit donc prouver que les termes suivans étoient beaucoup plus petits que les deux premiers; & c'est ce que j'ai fait dans la premiere Partie de mes *Recherches*, Ch. XX. Cependant, malgré le résultat favorable de ce calcul, c'est toujours une imperfection commune à toutes les solutions, de ne pas donner le mouvement de l'apogée par une serie qui soit tout d'un coup convergente.

3°. Le même inconvénient se rencontre, mais moins sensiblement, dans plusieurs autres termes de l'équation lunaire; inconvénient qui tient encore à l'imperfection de l'approximation. J'en ai donné la preuve dans les endroits déja cités de mes *Rech. sur le Systême du Monde*.

4°. Enfin on remarquera qu'il y a plusieurs termes, qui étant très-petits dans l'équation différentielle de l'orbite lunaire, augmentent considérablement par l'intégration. Tels sont, par exemple, les termes qui expriment les sinus de $2z - 2nz - 2Nz$, n étant le rapport de la révolution moyenne de la Lune à celle du Soleil, & Nz l'anomalie de la Lune. J'ai remarqué le premier la nécessité d'avoir égard à ces termes dans l'équation de l'orbite lunaire; & je fis part de cette remarque, pendant

l'Eté de 1748, à M. Clairaut, qui n'ayant pas encore fait à ces sortes de termes une attention suffisante, croyoit alors que la théorie s'éloignoit entiérement des observations.

5°. Il est d'autres termes qui peuvent augmenter encore plus que ceux-ci par l'intégration; & qui peuvent même augmenter assez pour rendre la vraie valeur des coëfficiens assez incertaine. Tels sont, par exemple, les termes qui renferment sin. $2z - 2pz - 2Nz$, p étant le rapport du mouvement moyen du nœud à celui de la Lune; voyez la premiere Partie de mes *Rech.* p. 47 & 49, & la troisiéme Partie, p. 17. Il y auroit même telle combinaison qui rendroit énormément grand le résultat de l'intégration. Par exemple, s'il se trouvoit dans $\int \pi x^3 dz$ des sinus de $nz - \pi nz$ (πnz exprimant l'anomalie du Soleil); la double intégration qu'exige la quantité $xxdz \int \pi x^3 dz$ dans l'expression du tems, donneroit pour dénominateur $n^2 (1 - \pi)^2$; c'est-à-dire, une quantité d'une petitesse extrême, puisqu'à cause de la lenteur du mouvement de l'apogée du Soleil, $1 - \pi$ est presque égal à zéro; en ce cas l'intégrale deviendroit fort grande. S'il se trouvoit par hasard dans l'équation de l'orbite lunaire des termes de cette sorte, ils mettroient en défaut toutes les théories connues.

Or dans la combinaison infinie & inépuisable des différens termes qui doivent entrer dans l'équation de l'orbite lunaire, il me paroît bien difficile de s'assurer qu'on n'aura point de pareils termes. Leur effet seroit de pro-

duire à la longue une altération *apparente* dans le moyen mouvement, tant que $nz - \pi nz$ seroit assez petit pour que sin. $nz - \pi nz$ pût être censé à-peu-près égal à $nz - \pi nz$; car soit A le coëfficient de sin. $nz - \pi nz$ qu'on suppose entrer dans la valeur de $\int \pi x^3 dz$; l'intégration donnera $\frac{A \cos. nz - \pi nz}{n(1-\pi)}$; & la double intégration $\frac{A \sin. nz - \pi nz}{n^2(1-\pi)^2} = \frac{Az}{n(1-\pi)}$, c'est-à-dire, proportionnelle au moyen mouvement; ce qui donne par conséquent une altération apparente au moyen mouvement, tant que $nz - \pi nz$ est une partie assez petite de la circonférence. Mais au bout d'un grand nombre d'années, ou, si l'on veut, de siécles, lorsque sin. $nz - \pi nz$ ne peut plus être pris pour $nz - \pi nz$; alors l'équation n'est plus proportionnelle au moyen mouvement, & rentre dans la classe des équations ordinaires (*a*).

Il suit de-là que les solutions trouvées jusqu'ici du Problême des trois Corps, & en particulier des inégalités de la Lune, n'ont point encore le dégré de perfection qu'on y peut souhaiter; & on ne sauroit trop exhorter les Géometres à chercher les moyens de parvenir à

(*a*) Voyez la seconde Partie de mes *Recherches sur le Systême du Monde*, p. 94 & suiv. J'y fais voir que l'altération *apparente* du moyen mouvement de Saturne pourroit bien tenir à des termes de cette espéce; c'est aussi ce qu'on a remarqué depuis dans la piéce qui a remporté le Prix de l'Académie des Sciences en 1760, sur l'*altération du mouvement moyen des Planètes*.

ce but si desiré, en perfectionnant, si cela est possible, les méthodes analytiques qui peuvent y conduire.

XVIII.

Dans l'application du Problême des trois Corps au mouvement de Jupiter & de Saturne, il se rencontre une difficulté que M. Euler a le premier résolue, & qui vient des coëfficiens de certains termes de l'équation. Voyez mes *Recherches sur le Systême du Monde*, seconde Partie, art. 222 & suiv. Je dois remarquer à cette occasion, que quand j'ai proposé, art. 232 du même Ouvrage, une méthode pour trouver les coëfficiens de ces termes, par la rectification des Sections coniques, & que j'ai donné cette méthode *comme plus curieuse & plus géométrique, que commode pour le calcul*; ce n'est pas que je ne la croye très-praticable, & préférable même aux quadratures que d'autres Géometres ont employées pour le même objet; car en général les approximations par rectification sont plus éxactes que les approximations par quadrature; mais c'est que j'avois donné dans cette même *seconde Partie*, pag. 55 — 89, d'autres méthodes encore plus commodes (& aussi éxactes, ce me semble, qu'aucune autre), pour parvenir à la valeur de ces coëfficiens; méthodes qui m'appartiennent en propre, & qui consistent dans la sommation approchée de certaines series, dont les derniers termes forment à-très-peu-près une progression géométrique.

Je fais cette remarque relativement à deux endroits

des Mémoires de l'Académie de 1754, p. 545 & 549. Au reste que l'on employe ces series, ou la quadrature méchanique de certaines courbes, ou la rectification des Sections coniques, il n'est pas moins certain que la méthode donnée dans ces Mémoires, est fondée sur une idée que j'ai proposée le premier, & qui n'a rien de commun, comme on l'à voulu faire entendre, avec la méthode, d'ailleurs très-ingénieuse, de M. Euler. Cette idée consiste à remarquer, comme je l'ai fait art. 232 de la seconde Partie de mes *Recherches sur le Systême du Monde*, que la connoissance des coëfficiens dépend de l'intégration complette de certaines quantités, lorsque la variable qu'elles renferment, est égale à la moitié de la circonférence, ou à la circonférence entiere; ce que j'ai démontré de la maniere la plus simple, sans avoir besoin du savant circuit qu'on a employé pour cela dans les Mémoires cités de 1754.

XIX.

Je viens maintenant à mes nouvelles Tables. La forme que je leur donne, est celle que M. Euler a employée le premier, & que M. Mayer a suivie. Elle consiste à regarder l'excentricité comme constante, & à substituer à l'excentricité variable des Tables des *Institut.* un terme proportionnel à sin $2Z - 2z' - N.Z$, qui fait à-peu-près le même effet. Comme les Astronomes commencent à faire usage des Tables disposées suivant cette nouvelle forme, qui est en effet plus commode & plus simple,

je me suis déterminé à donner maintenant à mes Tables cette forme qui résulte immédiatement de la théorie, & que je leur aurois donnée plutôt, si je n'avois vû les Astronomes encore attachés à la forme ancienne, comme je l'ai dit en publiant mes premieres Tables.

Il y a néanmoins quelque différence entre la forme des Tables de M. Mayer, & la forme des miennes.

1°. M. Mayer suppose qu'on ait calculé le lieu vrai du Soleil, au lieu que je n'ai besoin que du lieu moyen de cet Astre. Cette supposition abrege le calcul; il est vrai qu'on ne pourroit pas employer le même abrégé pour simplifier les Tables des *Institutions*, comme je l'ai remarqué dans la troisiéme Partie de mes *Recherches*, §. XXIV, mais cela vient de la forme particuliere aux Tables des *Institutions*, qui est très-différente de celle des Tables de M. Mayer.

2°. J'ai donné une disposition différente à mes Tables quant à la place que certaines équations y occupent.

3°. Quelques équations, comme celle des argumens VI & XIII, me sont particulieres.

4°. Quelques équations sont autrement présentées, comme celles des argumens IV & V. qui reviennent à l'équation VIII de M. Mayer, & à l'équation qu'il donne pour l'anomalie moyenne, dont je suppose au contraire que le mouvement est uniforme, ce qui me paroît plus simple.

5°. Dans notre argument XV, qui répond à l'argument XIII de M. Mayer, on n'a point d'égard à la correction qui

qui vient de l'équation du centre, au lieu que M. Mayer y a eu égard, comme on l'a déja remarqué dans la troisiéme Partie des *Recherches sur le Systême du Monde*, p. 24.

X X.

Du reste, pour construire les différentes équations de ces Tables, voici comment je m'y suis pris.

J'ai eu recours aux quatre différentes Tables, dont j'ai offert la comparaison, p. 28 de la troisiéme Partie de mes *Recherches sur le Systême du Monde*; & voici l'usage que j'en ai fait. Je suppose que le Lecteur ait ces Tables sous les yeux.

La premiere équation qui est proportionnelle à sin. $\pi z'$, & qui dépend de l'anomalie moyenne du Soleil, je l'ai prise de $11' 30''$, qui est à-peu-près le milieu entre les quatre Tables; le vrai milieu est $11' 40''$, mais j'ai retranché $10''$, parce que je crois un peu trop grande l'équation $12' 57''$ que donne ma théorie; cette équation est le premier argument de mes nouvelles Tables.

J'ai conservé la seconde équation de mes Tables $+ 2' 28''$ sin. $2 Z - 2 z' - 2 N . Z$; parce que cette équation ne differe pas beaucoup de celle de M. Clairaut, & qu'il paroît que dans les Tables de Mrs Mayer & le Monnier, qui donnent $3' 45''$, on s'est contenté de la valeur de cette équation trouvée par Newton, dont la théorie ne semble pas assez éxacte. C'est le second argument des nouvelles Tables de cet Ouvrage.

Il en est de même de l'équation $- 1' 9''$ sin. $2 z' -$

$2pZ$, donnée par ma Théorie, & que j'ai conservée par les mêmes raisons. C'est le troisiéme argument de mes nouvelles Tables.

Quant à la *variation* (qui fait l'argument XV des nouvelles Tables, & l'argument IV de la page 28 de la troisiéme partie de mes *Recherches*); comme il est difficile de la déterminer rigoureusement par la théorie, & que je crois en particulier, ainsi que je l'ai dit ci-dessus, ne l'avoir pas déterminée assez exactement par la mienne, j'ai pris le milieu 40′ 38″ entre les deux équations de Mrs Mayer & le Monnier, qui paroissent fondées sur les observations. De plus (art. 95 de la premiere Partie de mes *Recherches sur le Systême du Monde*) j'ai retranché 23″ à cause de la correction du lieu qui provient du mouvement des nœuds & de l'inclinaison, & j'ai eû 40′ 15″. Cette équation fait partie de l'argument XV de mes nouvelles Tables, du quel je parlerai encore plus bas.

Pour la cinquiéme équation, j'ai pris d'abord 1′ 30″, qui est à-très-peu-près le milieu entre les quatre équations des quatre Tables; ce qui donne d'abord $+ 1' 30''$ $\sin. 2Z - 2z' + \pi z' - NZ$. De plus en mettant pour z', longitude vraie du Soleil, la quantité $\zeta - 2\lambda$ $\sin. \pi\zeta$ dans l'équation VII, il en vient à-peu-près un terme de cette forme $- 2' 32'' \sin. 2z - 2\zeta + \pi\zeta - N.Z$; reste donc $- 1' 2'' \sin. 2Z - 2\zeta + \pi\zeta - N.Z$ pour dernier résultat de l'équation. C'est l'argument X de mes nouvelles Tables.

J'ai gardé la sixiéme équation 2′ 5″ que la Théorie

m'a donnée, & qui d'ailleurs est à-peu-près moyenne entre les deux de Mrs le Monnier & Mayer. Celle de M. Clairaut 3′ 40″ paroît incertaine, & je la crois trop grande. Voyez *Rech. sur le Systême du Monde*, troisiéme Partie, p. 29. C'est une partie de l'argument XV des nouvelles Tables.

Pour l'équation VII nommée *Evection*, j'ai pris l'équation — 1° 17′ de M. le Monnier, qui tient à-peu-près le milieu entre les autres; ayant d'ailleurs lieu de croire, comme je l'ai dit ci-dessus, que l'équation 1° 18′ 18″ que j'ai trouvée par ma Théorie, est un peu trop grande. C'est l'argument XVI de mes nouvelles Tables.

Pour l'équation VIII, j'ai pris celle de M. Mayer — 3′ 0″, qui est à-peu-près moyenne entre les autres; c'est l'argument IX de mes nouvelles Tables.

Pour l'équation IX, j'ai pris — 1 38″ qui est à-peu-près moyenne entre les autres; & à laquelle les deux Tables de Mrs le Monnier & Mayer sont d'ailleurs assez conformes; c'est l'argument IV de mes nouvelles Tables.

Pour l'équation X, j'ai pris + 2 20″, sur laquelle Mrs Clairaut & Mayer s'accordent à-peu-près, & que j'ai reconnue par le calcul avoir en effet à peu près cette valeur; c'est l'argument V.

Pour la XIe Equation, j'ai pris d'abord 1′ qui est à-peu-près moyen entre les Tables de M. Clairaut & les miennes, & qui ne différe pas d'ailleurs beaucoup de celles de M. Mayer. Ensuite comme la substitution de $\zeta - 2\lambda$ sin. $\pi\zeta$ au lieu de z' dans l'*Evection* donne encore ici +

2′ 32″ sin. $2Z - 2\zeta - \pi\zeta - N.Z$, il en résulte l'équation totale $+$ 3′ 32″ sin. $2Z - 2\zeta - \pi\zeta - N.Z$; c'est l'argument XI de mes nouvelles Tables.

Pour la XII Equation, j'ai pris 1′ 2″ qui est à-peu-près le milieu entre les Tables de M. Clairaut & les miennes, & qui d'ailleurs s'accorde à-très-peu-près avec celles de M. Mayer; c'est l'argument XII.

J'ai supprimé la XIII[e] Equation, qui est nulle dans les deux Tables de M[rs] Mayer & le Monnier, & qui est assez incertaine par la Théorie, comme on le voit non-seulement par ce que nous avons dit plus haut §. XVII, & p. 17 de la troisiéme Partie de mes *Recherches*, mais encore par la comparaison des Tables de M. Clairaut avec les miennes, les deux résultats étant même de signes différens.

Pour la XV[e] Equation, j'ai pris — 45″, qui est celle des Tables des *Institutions*, & qui est à-peu-près moyenne entre les autres; ensuite comme la *variation*, en mettant pour z' sa valeur $\zeta - 2\lambda$ sin. $\pi\zeta$, donne à-peu-près $+$ 1′ 8″ sin. $2Z - 2\zeta + \pi\zeta$, il en résulte une équation totale de 23″; c'est l'argument VII.

Enfin pour la XVI[e] Equation, j'ai pris d'abord le résultat — 1′ 2″ des Tables de M. Mayer, qui est à-peu-près moyen entre les autres; à quoi ajoutant — 1′ 8″, donné par la substitution de $\zeta - 2\lambda$ sin. $\pi\zeta$ dans la *variation*, j'ai — 2′ 10″ sin. $2Z - 2\zeta - \pi\zeta$. C'est l'argument VIII.

A l'égard de la XVII[e] Equation qui est nulle dans

les trois Tables de Mrs le Monnier, Clairaut & moi, je l'ai ſupprimée, quoique dans les Tables de M. Mayer elle monte à près de 30″.

J'aurois pû en faire de même de la XIVe Equation, qui eſt nulle dans les trois Tables de Mrs Mayer, le Monnier & Clairaut, & qui dans la mienne monte à 18″; cependant, comme j'ai tout lieu de croire que mon réſultat eſt préférable, par la raiſon que mes formules (§. XII.) ſont beaucoup plus éxactes pour calculer ces ſortes d'équations, j'ai cru qu'on pourroit faire uſage de cette équation; & j'en ai dreſſé une Table à part, dont j'ai fait l'Argument VI: on peut la ſupprimer quand l'argument ſera de peu de degrés; l'équation qui en réſulte, n'étant alors que de quelques ſecondes.

XXI.

L'Equation du moyen mouvement ou du tems par le mouvement vrai, qui donne la valeur de Z en z, renfermant deux termes de cette forme $+ \alpha$ ſin. $2z - 2nz - Nz - 6$ ſin. $2z - 2nz$, il en réſulte 1°. une équation $- \frac{\alpha\alpha}{2}$ ſin. $4Z - 4z' - 2N.Z$, qui donne en changeant le ſigne, pour appliquer cette équation au lieu moyen, un réſultat égal à $+ 46''$ ſin. $4Z - 4z' - 2N.Z$. Ce réſultat fait partie de l'Argument XVI. 2°. Une équation $- 66$ ſin. $4Z - 4z'$, qui donne en changeant le ſigne $+ 23''$ ſin. $4Z - 4z'$. Ce réſultat fait partie de l'Argument XV; dans la Table propre

à cet argument, il est combiné avec la *variation* & la VIe Equation dont il a été parlé ci-dessus. 3°. Deux Equations $-\frac{\alpha\beta}{2}$ sin. $N.Z + \frac{3\alpha\beta}{2}$ sin. $4Z - 4z' - N.Z$, qui donnent en changeant les signes $+ 23''$ sin. $N.Z - 1'\,12''$ sin. $4Z - 4z' - N.Z$.

La premiere de ces Equations $+ 23''$ sin. NZ doit se combiner avec l'Equation du centre (argument XIV.) que j'ai faite avec M. Mayer $- 6°.\ 18'\ 44''$, & qui s'accorde d'ailleurs très-bien avec les Tables de M. le Monnier, & à-très-peu-près avec les miennes.

A l'égard de l'Equation $- 1'\,12''$ sin. $4Z - 4\zeta - N.Z$, j'en ai fait une Table particuliere, qui est celle de l'argument XIII. Cette derniere Equation paroît avoir été négligée (au moins en partie) par M. Mayer; & c'est peut-être pour cela que dans les syzygies, les Tables de cet habile Astronome donnent quelquefois autant d'erreur que hors des syzygies. Au reste je ne dis ceci que par conjecture, M. Mayer n'ayant point encore publié la théorie ou la méthode d'après laquelle il a construit ses Tables.

XXII.

Pour calculer la latitude, j'ai employé la méthode expliquée dans la troisiéme Partie de mes *Recherches sur le Systême du Monde*, p. 50 & 51; & c'est d'après cette méthode, que j'avois dressé d'abord les Tables de latitude, en prenant $9'\ 30''$ pour l'équation du nœud, &

$9'$ pour la plus grande équation donnée par le second argument de la latitude ; & en supposant l'inclinaison moyenne de $5° 9'$.

Mais j'ai trouvé ensuite un moyen de rendre ces équations plus exactes. Pour cela j'ai considéré 1°. que dans les équations du nœud, telles que nous les avons données dans la troisiéme Partie des *Rech. sur le Systême du Monde* §. VIII, on trouve entr'autres équations, ces deux-ci $- 8' 22'$ sin. $2z - 2z' + 8' 22''$ sin. $2z - 2pz$. 2°. Qu'à ces équations du mouvement du nœud, il en répond deux de même signe pour l'inclinaison ; savoir $(- 8' 22''$ cos. $2z - 2z' + 8' 22''$ cos. $2z - 2pz)$ $\times \mu$, μ exprimant le rapport de la tangente de l'inclinaison au sinus total. 3°. Que si par conséquent on se sert de ces équations pour corriger la latitude suivant la méthode donnée dans la troisiéme Partie des *Recherches sur le Systême du Monde* §. XXV ; on aura pour la correction de la latitude $- 8' 22'' \times \mu \times$ sin. $z - pz - 2z + 2z'$ $+ 8' 22'' \times \mu$ sin. $z - pz - 2z + 2pz =$ à-très-peu-près $41''$ sin. $z - 2nz + pz - 41''$ sin. $z - pz$. Il faut donc retrancher $41''$ de la plus grande équation de la premiere Table, ce qui la réduit à $5° 9' - 41''$, ou $5° 8' 19''$; & il faut au contraire ajouter $41''$ à la plus grande équation de la seconde Table ; ce qui la change en $9' 41''$. C'est d'après cette correction que les deux premieres Tables de la latitude ont été formées.

Outre les deux équations du nœud dont nous venons de parler, il y en a encore une autre assez considérable

$+ 4' 45''$ ſin. $2z - 2Nz - 2pz$, qui peut produire environ $23''$ dans la latitude; cette équation eſt à-très-peu-près $+ 23''$ ſin. $2Nz - z + pz$, & ſon argument eſt le double de l'anomalie moyenne de la Lune, moins l'argument de la latitude, ou plus éxactement, le double de l'argument XIV, moins l'argument de la latitude. J'en ai formé une troiſiéme Table, qui ne ſe trouve point dans celles de M. Mayer.

XXIII.

Quant à la parallaxe de la Lune, j'ai employé d'abord la parallaxe moyenne de $57' 12''$, ainſi que je l'ai trouvée dans ma *Théorie de la Lune*, art. 154; or la parallaxe moyenne, ſuivant les Tables de M. Mayer, eſt $57' 18''$, (en prenant le milieu entre la plus grande parallaxe de ces Tables $60' 26''$, & la plus petite $54' 10''$); ainſi il faut ôter conſtamment $6''$ de la Table des parallaxes de M. Mayer. C'eſt de cette maniere que j'ai formé la Table des parallaxes.

A l'égard des deux Tables de corrections de la parallaxe, elles ont été faites d'après un calcul nouveau, qui s'accorde d'ailleurs aſſez avec les Tables de M[rs] Mayer & Clairaut.

Fin du quatorziéme Mémoire.



NOUVELLES TABLES

NOUVELLES
TABLES
DE
LA LUNE.

EPOQUES POUR LES CALCULS DE LA LUNE.

N. B. Ces Epoques sont conformes à celles des *Institutions Astronomiques*, avec cette seule différence, qu'on a ajouté 15″ à la longitude moyenne de la Lune.

Années.	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de son Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud ascendant rétrograde.
	Sig. D.M.S.	*Sig. D.M.S*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*
1749	9 10 14 40	6 01 39 48	01 28 53 31	04 10 19 02	09 18 34 29	09 29 34 43
1750	9 10 00 21	6 01 24 26	06 08 16 34	05 20 58 52	00 17 17 42	09 10 15 00
1751	9 09 46 01	6 01 09 03	10 17 39 38	07 01 38 43	03 16 00 55	08 20 55 17
1752 B	9 10 30 49	6 01 52 48	03 10 13 16	08 12 25 14	06 27 48 02	08 01 32 23
1753	9 10 16 29	6 01 37 25	07 19 36 20	09 23 05 05	09 26 31 15	07 12 12 40
1754	9 10 02 09	6 01 22 02	11 28 59 23	11 03 44 55	00 25 14 28	06 22 52 56
1755	9 09 47 49	6 01 06 39	04 08 22 27	00 14 24 46	03 23 57 41	06 03 33 13
1756 B	9 10 32 38	6 01 50 25	09 00 56 05	01 25 11 17	07 05 44 48	05 14 10 19
1757	9 10 18 18	6 01 35 02	01 10 19 09	03 05 51 08	10 04 28 01	04 24 50 36
1758	9 10 03 58	5 01 19 39	05 19 42 12	04 16 30 58	01 03 11 14	04 05 30 53
1759	9 09 49 38	6 01 04 16	09 29 05 16	05 27 10 49	04 01 54 27	03 16 11 10
1760 B	9 10 34 27	6 01 48 01	02 21 38 54	07 07 57 20	07 13 41 34	02 26 48 16
1761	9 10 20 07	6 01 32 39	07 01 01 57	08 18 37 10	10 12 24 47	02 07 38 33
1762	9 10 05 47	6 01 17 16	11 10 25 00	09 29 17 01	01 11 07 59	01 18 08 50
1763	9 09 51 27	6 01 01 53	03 19 48 04	11 09 56 51	04 09 51 13	00 28 49 06
1764 B	9 10 36 15	6 01 45 38	08 12 21 43	00 20 43 23	07 21 38 20	00 09 26 12
1765	9 10 21 55	6 01 30 15	00 21 44 46	02 01 23 13	10 20 21 33	11 20 06 29
1766	9 10 07 36	6 01 14 53	05 01 07 50	03 12 03 04	01 19 04 46	11 00 46 45
1767	9 09 53 16	6 00 59 30	09 10 30 53	04 22 42 54	04 17 47 59	10 11 27 03
1768 B	9 10 38 04	6 01 43 15	02 03 04 32	06 03 29 26	07 29 35 06	09 22 04 09
1769	9 10 23 44	6 01 27 52	06 12 27 35	07 14 09 16	10 28 18 19	09 02 44 26
1770	9 10 09 25	6 01 12 30	10 21 50 39	08 24 49 07	01 27 01 32	08 13 24 43
1771	9 09 55 05	6 00 57 07	03 01 13 42	10 05 28 57	04 25 44 45	07 24 05 00
1772 B	9 10 39 53	6 01 40 52	07 23 47 21	11 16 15 29	08 07 31 52	07 04 42 06
1773	9 10 25 33	6 01 25 29	00 03 10 24	00 26 55 19	11 06 15 05	06 15 22 23
1774	9 10 11 13	6 01 10 06	04 12 33 28	02 07 35 10	02 04 58 18	05 26 02 40
1775	9 09 56 54	6 00 54 44	08 21 56 31	03 18 15 00	05 03 41 31	05 06 42 57
1776 B	9 10 41 42	6 01 38 29	01 14 30 10	04 29 01 32	08 15 28 38	04 17 20 03

EPOQUES POUR LES CALCULS DE LA LUNE.

N. B. Ces Epoques sont conformes à celles des *Institutions Astronomiques*, avec cette seule différence, qu'on a ajouté 15" à la longitude moyenne de la Lune.

Années.	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de son Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud ascendant rétrograde.
	Sig. D. M. S.	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*
1777	9 10 27 22	6 01 23 06	05 23 53 13	06 09 41 22	11 14 11 51	03 28 00 20
1778	9 10 13 02	6 01 07 43	10 03 16 17	07 20 21 13	02 12 55 04	03 08 40 37
1779	9 09 58 42	6 00 52 20	02 12 39 20	09 01 01 03	05 11 38 17	02 19 20 54
1780 B	9 10 43 31	6 01 36 06	07 05 12 59	10 11 47 35	08 23 25 24	01 29 58 01
1781	9 10 29 11	6 01 20 43	11 14 36 02	11 22 27 25	11 22 08 37	01 10 38 18
1782	9 10 14 51	6 01 05 20	03 23 59 06	01 03 07 16	02 20 51 50	00 21 28 35
1783	9 10 00 31	6 00 49 57	08 03 22 09	02 13 47 06	05 19 35 03	00 02 08 52
1784 B	9 10 45 20	6 01 33 43	00 25 55 48	03 24 33 38	09 01 22 10	11 12 35 57
1785	9 10 31 00	6 01 18 20	05 05 18 51	05 05 13 28	00 00 05 23	10 23 16 14
1786	9 10 16 40	6 01 02 57	09 14 41 55	06 15 53 19	02 28 48 36	10 03 56 31
1787	9 10 02 20	6 00 47 34	01 24 04 58	07 26 33 09	05 27 31 49	09 14 36 48
1788 B	9 10 47 09	6 01 31 20	06 16 38 37	09 07 19 41	09 09 18 56	08 25 13 54
1789	9 10 32 49	6 01 15 57	10 26 01 40	10 17 59 31	00 08 02 09	08 05 54 11
1790	9 10 18 29	6 01 00 34	03 05 24 44	11 28 39 22	03 06 45 22	07 16 34 28
1791	9 10 04 09	6 00 45 11	07 14 47 47	01 09 19 12	06 05 28 35	06 27 14 45
1792 B	9 10 48 57	6 01 28 56	00 07 21 26	02 20 05 44	09 17 15 42	06 07 51 51
1793	9 10 34 37	6 01 13 33	04 16 44 29	04 00 45 34	00 15 58 55	05 18 32 08
1794	9 10 20 17	6 00 53 10	08 26 07 33	05 11 25 25	03 14 42 08	04 29 12 25
1795	9 10 05 57	6 00 42 47	01 05 30 36	06 22 05 15	06 13 25 21	04 09 52 42
1796 B	9 10 50 46	6 01 26 33	05 28 04 15	08 02 51 47	09 25 12 28	03 20 29 48
1797	9 10 36 26	6 01 11 10	10 07 27 18	09 13 31 37	00 23 55 41	03 01 10 05
1798	9 10 22 06	6 00 55 47	02 16 50 22	10 24 11 29	03 22 38 53	02 11 50 22
1799	9 10 07 46	6 00 40 24	06 26 13 25	00 04 51 19	06 21 22 06	01 22 30 39
1800 B	9 10 52 35	6 01 24 10	11 18 47 04	01 15 37 50	10 03 09 14	01 03 07 46

MOYENS MOUVEMENS DU SOLEIL ET DE LA LUNE.

pour le dernier jour de chaque mois.

Mois.	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de l'Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud ascendant rétrograde.
	S. D. M. S.	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*
Janvier	01 00 33 18	01 00 33 13	01 18 28 06	0 03 27 13	01 15 00 53	0 01 38 30
Février	01 28 09 11	01 28 09 01	01 27 24 26	0 06 34 23	01 20 50 03	0 03 07 28
Mars	02 28 42 30	02 28 42 14	03 15 52 32	0 10 01 37	03 05 50 55	0 04 45 57
Avril	03 28 16 39	03 28 16 18	04 21 10 03	0 13 22 09	04 07 47 54	0 06 21 17
Mai	04 28 49 58	04 28 49 32	06 09 38 08	0 16 49 22	05 22 48 46	0 07 59 47
Juin	05 28 24 08	05 28 23 37	07 14 55 39	0 20 09 55	06 24 45 44	0 09 35 06
Juillet	06 28 57 26	06 28 56 49	09 03 23 45	0 23 37 08	08 09 46 37	0 11 13 35
Août	07 29 30 44	07 29 30 02	10 21 51 51	0 27 04 21	09 24 47 30	0 12 52 05
Septem	08 29 04 54	08 29 04 07	11 27 09 21	01 00 24 53	10 26 44 28	0 14 27 24
Octob.	09 29 38 12	09 29 37 20	01 15 37 27	01 03 52 07	00 11 45 20	0 16 05 53
Nov.	10 29 12 22	10 29 11 24	02 20 54 58	01 07 12 39	01 13 42 19	0 17 41 12
Décem.	11 29 45 40	11 29 44 37	04 09 23 04	01 10 39 52	02 28 43 12	0 19 19 43

MOYENS MOUVEMENS DU SOLEIL ET DE LA LUNE pour les jours du Mois (a).

Jours.	Longitude moyenne du Soleil. S. D. M. S.	Anomalie moyenne du Soleil. S. D. M S.	Longitude moyenne de la Lune. S. D. M. S.	Longitude moyenne de l'Apogée. S. D. M. S.	Anomalie moyenne de la Lune. S. D. M. S.	Nœud ascendant rétrograde. S. D. M. S.
1	00 00 59 08	00 00 59 08	00 13 10 35	00 00 06 41	00 13 03 54	00 00 03 11
2	00 01 58 17	00 01 58 17	00 26 21 10	00 00 13 22	00 26 07 48	00 00 06 21
3	00 02 57 25	00 02 57 25	01 09 31 45	00 00 20 03	01 09 11 42	00 00 09 32
4	00 03 56 33	00 03 56 33	01 22 42 20	00 00 26 44	01 22 15 36	00 00 12 43
5	00 04 55 42	00 04 55 42	02 05 52 55	00 00 33 25	02 05 19 30	00 00 15 53
6	00 05 54 50	00 05 54 49	02 19 03 30	00 00 40 06	02 18 23 24	00 00 19 04
7	00 06 53 58	00 06 53 57	03 02 14 05	00 00 46 48	03 01 27 17	00 00 22 14
8	00 07 53 07	00 07 53 06	03 15 24 40	00 00 53 29	03 14 31 11	00 00 25 25
9	00 08 52 15	00 08 52 14	03 28 35 15	00 01 00 10	03 27 35 05	00 00 28 36
10	00 09 51 23	00 09 51 22	04 11 45 50	00 01 06 51	04 10 38 59	00 00 31 46
11	00 10 50 32	00 10 50 30	04 24 56 25	00 01 13 32	04 23 42 53	00 00 34 57
12	00 11 49 40	00 11 49 38	05 08 07 00	00 01 20 13	05 06 46 47	00 00 38 08
13	00 12 48 48	00 12 48 46	05 21 17 35	00 01 26 54	05 19 50 41	00 00 41 18
14	00 13 47 57	00 13 47 55	06 04 28 10	00 01 33 35	06 02 54 35	00 00 44 29
15	00 14 47 05	00 14 47 03	06 17 38 45	00 01 40 16	06 15 58 29	00 00 47 40
16	00 15 46 13	00 15 46 11	07 00 49 20	00 01 46 57	06 29 02 23	00 00 50 50
17	00 16 45 22	00 16 45 19	07 13 59 55	00 01 53 38	07 12 06 17	00 00 54 01
18	00 17 44 30	00 17 44 27	07 27 10 30	00 02 00 19	07 25 10 11	00 00 57 11
19	00 18 43 38	00 18 43 35	08 10 21 05	00 02 07 00	08 08 14 05	00 01 00 22
20	00 19 42 47	00 19 42 44	08 23 31 40	00 02 13 41	08 21 17 59	00 01 03 33
21	00 20 41 55	00 20 41 52	09 06 42 15	00 02 20 23	09 04 21 52	00 01 06 43
22	00 21 41 03	00 21 41 00	09 19 52 50	00 02 27 04	09 17 25 46	00 01 09 54
23	00 22 40 12	00 22 40 08	10 03 03 26	00 02 33 45	10 00 29 41	00 01 13 05
24	00 23 39 20	00 23 39 16	10 16 14 01	00 02 40 26	10 13 33 35	00 01 16 15
25	00 24 38 28	00 24 38 24	10 29 24 36	00 02 47 07	10 26 37 29	00 01 19 26
26	00 25 37 37	00 25 37 33	11 12 35 11	00 02 53 48	11 09 41 23	00 01 22 37
27	00 26 36 45	00 26 36 41	11 25 45 46	00 03 00 29	11 22 45 17	00 01 25 47
28	00 27 35 53	00 27 35 49	00 08 56 21	00 03 07 10	00 05 49 11	00 01 28 58
29	00 28 35 02	00 28 34 57	00 22 06 56	00 03 13 51	00 18 53 05	00 01 32 09
30	00 29 34 10	00 29 35 05	01 05 17 31	00 03 20 32	01 01 56 59	00 01 35 19
31	01 00 33 18	01 00 33 13	01 18 28 06	00 03 27 13	01 15 00 53	00 01 38 30

(a) Dans les années Bissextiles, il faut retrancher un jour de la date du mois, si cette date tombe dans les mois de Janvier ou de Février. Par exemple, si on demande le lieu de la Lune le 31 Janvier dans une année Bissextile, ou le 10 Février, il faudra prendre le lieu qui répond au 30 Janvier, ou au 9 Février.

MOYENS MOUVEMENS DU SOLEIL ET DE LA LUNE, pour les Heures, Minutes & Secondes.

N. B. Pour les Heures, Minutes & Secondes, le mouvement de l'Apogée du Soleil est insensible. C'est pourquoi dans les deux Tables suivantes l'Anomalie moyenne du Soleil est toujours égale à la longitude moyenne de cet Astre.

	Longitude moy. du Soleil.	Anomalie moy. du Soleil.	Longitude moy. de la Lune.	Longitude moy. de l'Apogée.	Anomalie moy. de la Lune.	Nœud ascendant rétrograde.
Secondes.	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*
Minutes.	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*
Heures.	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*
1	00 02 28	00 02 28	00 32 56	00 00 17	00 32 40	00 00 08
2	00 04 56	00 04 56	01 05 53	00 00 33	01 05 20	00 00 16
3	00 07 24	00 07 24	01 38 49	00 00 50	01 37 59	00 00 24
4	00 09 51	00 09 51	02 11 46	00 01 07	02 10 39	00 00 32
5	00 12 19	00 12 19	02 44 42	00 01 24	02 43 18	00 00 40
6	00 14 47	00 14 47	03 17 39	00 01 40	03 15 59	00 00 48
7	00 17 15	00 17 15	03 50 35	00 01 57	03 48 38	00 00 56
8	00 19 43	00 19 43	04 23 32	00 02 14	04 21 18	00 01 04
9	00 22 11	00 22 11	04 56 28	00 02 30	04 53 58	00 01 12
10	00 24 38	00 24 38	05 29 24	00 02 47	05 26 37	00 01 19
11	00 27 06	00 27 06	06 02 21	00 03 04	05 59 17	00 01 27
12	00 29 34	00 29 34	06 35 18	00 03 20	06 31 58	00 01 35
13	00 32 02	00 32 02	07 08 14	00 03 37	07 04 37	00 01 43
14	00 34 30	00 34 30	07 41 10	00 03 54	07 37 16	00 01 51
15	00 36 58	00 36 58	08 14 07	00 04 11	08 09 56	00 01 59
16	00 39 25	00 39 25	08 47 03	00 04 27	08 42 36	00 02 07
17	00 41 53	00 41 53	09 20 00	00 04 44	09 15 16	00 02 15
18	00 44 21	00 44 21	09 52 56	00 05 01	09 47 55	00 02 23
19	00 46 49	00 46 49	10 25 53	00 05 18	10 20 35	00 02 31
20	00 49 17	00 49 17	10 58 49	00 05 34	10 53 15	00 02 39
21	00 51 45	00 51 45	11 31 46	00 05 51	11 25 55	00 02 47
22	00 54 12	00 54 12	12 04 42	00 06 08	11 58 34	00 02 55
23	00 56 40	00 56 40	12 37 39	00 06 24	12 31 15	00 03 03
24	00 59 08	00 59 08	13 10 35	00 06 41	13 03 54	00 03 11
25	01 01 36	01 01 36	13 43 32	00 06 58	13 36 34	00 03 19
26	01 04 04	01 04 04	14 16 28	00 07 14	14 09 14	00 03 27
27	01 06 32	01 06 32	14 49 24	00 07 31	14 41 53	00 03 35
28	01 09 00	01 09 00	15 22 21	00 07 48	15 14 33	00 03 43
29	01 11 27	01 11 27	15 55 18	00 08 05	15 47 13	00 03 51
30	01 13 55	01 13 55	16 28 14	00 08 21	16 19 53	00 03 59

SUITE de la Table des Moyens Mouvemens du Soleil & de la Lune. pour les Heures, Minutes & Secondes.

	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de l'Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud ascendant rétrograde.
Secondes.	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*
Minutes.	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*
31	01 16 23	01 16 23	17 01 10	00 08 38	16 52 32	00 00 04
32	01 18 51	01 18 51	17 34 07	00 08 55	17 25 12	00 00 04
33	01 21 19	01 21 19	18 07 03	00 09 11	17 57 52	00 00 04
34	01 23 47	01 23 47	18 39 59	00 09 28	18 30 31	00 00 04
35	01 26 14	01 26 14	19 12 55	00 09 44	19 03 11	00 00 05
36	01 28 42	01 28 42	19 45 52	00 10 01	19 35 51	00 00 05
37	01 31 10	01 31 10	20 18 48	00 10 17	20 08 31	00 00 05
38	01 33 38	01 33 38	20 51 45	00 10 35	20 41 10	00 00 05
39	01 36 06	01 36 06	21 24 41	00 10 51	21 13 50	00 00 05
40	01 38 34	01 38 34	21 57 38	00 11 08	21 46 30	00 00 05
41	01 41 01	01 41 01	22 30 34	00 11 24	22 19 10	00 00 06
42	01 43 29	01 43 29	23 03 31	00 11 42	22 51 49	00 00 06
43	01 45 57	01 45 57	23 36 27	00 11 58	23 24 29	00 00 06
44	01 48 25	01 48 25	24 09 24	00 12 15	23 57 09	00 00 06
45	01 50 53	01 50 53	24 42 20	00 12 31	24 29 49	00 00 06
46	01 53 21	01 53 21	25 15 17	00 12 49	25 02 28	00 00 06
47	01 55 48	01 55 48	25 48 13	00 13 05	25 35 08	00 00 06
48	01 58 16	01 58 16	26 21 10	00 13 22	26 07 48	00 00 06
49	02 00 44	02 00 44	26 54 06	00 13 38	26 40 28	00 00 06
50	02 03 12	02 03 12	27 27 03	00 13 56	27 13 07	00 00 07
51	02 05 40	02 05 40	27 59 59	00 14 12	27 45 47	00 00 07
52	02 08 08	02 08 08	28 32 56	00 14 29	28 18 27	00 00 07
53	02 10 36	02 10 36	29 05 52	00 14 45	28 51 07	00 00 07
54	02 13 03	02 13 03	29 38 49	00 15 03	29 23 46	00 00 07
55	02 15 31	02 15 31	30 11 45	00 15 19	29 56 26	00 00 07
56	02 17 59	02 17 59	30 44 42	00 15 36	30 29 06	00 00 07
57	02 20 27	02 20 27	31 17 38	00 15 52	31 01 46	00 00 08
58	02 22 55	02 22 55	31 50 34	00 16 09	31 34 25	00 00 08
59	02 25 23	02 25 23	32 23 31	00 16 26	32 07 05	00 00 08
60	02 27 50	02 27 50	32 56 27	00 16 42	32 39 45	00 00 08

ARG. . *Anomalie moyenne du Soleil.*

Ajoutez en descendant

	0ˢ.	I.	II.	
	Otez en descendant.			
	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0 00	5 38	9 51	30
1	0 12	5 49	9 58	29
2	0 24	6 00	10 4	28
3	0 36	6 09	10 10	27
4	0 47	6 19	10 15	26
5	0 59	6 29	10 20	25
6	1 10	6 39	10 25	24
7	1 22	6 49	10 30	23
8	1 34	6 58	10 35	22
9	1 46	7 8	10 39	21
10	1 56	7 16	10 44	20
11	2 8	7 25	10 48	19
12	2 20	7 34	10 52	18
13	2 31	7 43	10 57	17
14	2 42	7 51	11 2	16
15	2 54	8 0	11 4	15
16	3 5	8 9	11 7	14
17	3 17	8 18	11 10	13
18	3 29	8 26	11 12	12
19	3 40	8 34	11 14	11
20	3 51	8 41	11 17	10
21	4 3	8 49	11 20	9
22	4 14	8 57	11 22	8
23	4 24	9 5	11 24	7
24	4 35	9 13	11 25	6
25	4 46	9 20	11 27	5
26	4 56	9 27	11 28	4
27	5 7	9 32	11 29	3
28	5 18	9 39	11 30	2
29	5 28	9 45	11 31	1
30	5 38	9 51	11 31	0
	V.	IV.	III.	
	Ajoutez en montant.			
	XI.	X.	IX.	

Otez en montant.

ARG. II. *Distance moyenne du Soleil à l'Apogée moyen de la Lune.*

Otez en descendant.

	0ˢ. VI.	I. VII.	II. VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0 0	2 9	2 9	30
1	0 6	2 12	2 6	29
2	0 11	2 14	2 3	28
3	0 17	2 16	2 1	27
4	0 21	2 18	1 58	26
5	0 26	2 20	1 55	25
6	0 32	2 21	1 52	24
7	0 36	2 22	1 48	23
8	0 42	2 23	1 44	22
9	0 46	2 24	1 40	21
10	0 52	2 25	1 36	20
11	0 56	2 26	1 32	19
12	1 1	2 27	1 28	18
13	1 5	2 27	1 23	17
14	1 11	2 28	1 19	16
15	1 14	2 28	1 14	15
16	1 19	2 28	1 11	14
17	1 23	2 27	1 5	13
18	1 28	2 27	1 1	12
19	1 32	2 26	0 56	11
20	1 36	2 25	0 52	10
21	1 40	2 24	0 46	9
22	1 44	2 23	0 42	8
23	1 48	2 22	0 36	7
24	1 52	2 21	0 32	6
25	1 55	2 20	0 26	5
26	1 58	2 18	0 21	4
27	2 1	2 16	0 17	3
28	2 3	2 14	0 11	2
29	2 6	2 12	0 6	1
30	2 9	2 9	0 0	0
	XI. V.	X. IV.	IX. III.	

Ajoutez en montant.

ARG III. Distance moyenne du Soleil au lieu moyen du Nœud.

Otez en descendant.

	Os. VI.	I. VII.	II. VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0 0	1 1	1 1	30
1	2	1 1	1 0	29
2	4	1 3	58	28
3	7	1 4	57	27
4	9	1 4	55	26
5	12	1 5	54	25
6	15	1 6	53	24
7	17	1 6	51	23
8	18	1 6	48	22
9	23	1 7	47	21
10	24	1 8	45	20
11	26	1 8	43	19
12	28	1 8	41	18
13	30	1 8	39	17
14	32	1 8	38	16
15	35	1 8	35	15
16	38	1 8	32	14
17	39	1 8	30	13
18	41	1 8	28	12
19	43	1 8	26	11
20	45	1 8	24	10
21	47	1 7	23	9
22	48	1 6	18	8
23	51	1 6	17	7
24	53	1 6	15	6
25	54	1 5	12	5
26	55	1 4	9	4
27	57	1 4	7	3
28	58	1 3	4	2
29	1 0	1 1	0	1
30	1 1	1 1	0	0
	XI. V.	X. IV.	IX. III.	

Ajoutez en montant.

ARG. IV. Anomalie moyenne de la Lune, plus l'Anomalie moyenne du Soleil.

Otez en descendant.

	Os.	I.	II.	
	Ajoutez en descendant.			
	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	47	1 22	30
1	1	48	1 23	29
2	2	50	1 24	28
3	3	51	1 24	27
4	5	52	1 25	26
5	8	54	1 26	25
6	9	55	1 27	24
7	10	56	1 28	23
8	11	58	1 28	22
9	13	59	1 29	21
10	14	1 0	1 30	20
11	17	1 1	1 31	19
12	18	1 2	1 31	18
13	19	1 3	1 32	17
14	21	1 5	1 33	16
15	22	1 6	1 33	15
16	25	1 7	1 34	14
17	26	1 8	1 34	13
18	27	1 9	1 34	12
19	29	1 10	1 35	11
20	30	1 11	1 35	10
21	33	1 13	1 36	9
22	34	1 14	1 36	8
23	35	1 15	1 35	7
24	37	1 16	1 37	6
25	39	1 17	1 37	5
26	42	1 18	1 38	4
27	43	1 19	1 38	3
28	44	1 20	1 38	2
29	46	1 21	1 38	1
30	47	1 22	1 38	0
	V.	IV.	III.	
	Otez en montant.			
	XI.	X.	IX.	

Ajoutez en montant.

ARG. V. Anomalie moyenne de la Lune, moins l'Anomalie moyenne du Soleil.

Ajoutez en descendant.

0ᶠ. I. II.

Otez en descendant.

	VI.	VII.	VIII.	
	M. S.	M. S.	M. S.	
0	0	1 10	2 1	30
1	2	1 12	2 2	29
2	5	1 14	2 4	28
3	7	1 16	2 5	27
4	10	1 18	2 6	26
5	12	1 20	2 7	25
6	15	1 22	2 8	24
7	17	1 24	2 9	23
8	19	1 26	2 10	22
9	22	1 28	2 11	21
10	24	1 30	2 12	20
11	27	1 32	2 12	19
12	29	1 34	2 13	18
13	31	1 35	2 14	17
14	34	1 38	2 15	16
15	36	1 39	2 15	15
16	39	1 41	2 16	14
17	41	1 42	2 16	13
18	43	1 44	2 17	12
19	46	1 46	2 17	11
20	48	1 47	2 18	10
21	50	1 49	2 18	9
22	52	1 50	2 19	8
23	55	1 52	2 19	7
24	57	1 53	2 19	6
25	59	1 55	2 20	5
26	1 2	1 56	2 20	4
27	1 4	1 58	2 20	3
28	1 6	1 59	2 20	2
29	1 8	2 0	2 20	1
30	1 10	2 1	2 20	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

XI. X. IX.

Otez en montant.

ARG. VI. Distance moy. de la Lune au Soleil, plus l'Anom. moy. du Soleil

Otez en descendant.

0ᶠ. I. II.

Otez en descendant.

	VI.	VII.	VIII.	
	S.	S.	S.	
0	0	9	16	30
1	0	9	16	29
2	0	9	16	28
3	0	10	16	27
4	1	10	16	26
5	1	10	17	25
6	1	10	17	24
7	2	11	17	23
8	2	11	17	22
9	2	11	17	21
10	3	12	17	20
11	3	12	17	19
12	3	12	17	18
13	4	12	17	17
14	4	13	17	16
15	4	13	18	15
16	5	13	18	14
17	5	13	18	13
18	5	13	18	12
19	6	13	18	11
20	6	14	18	10
21	6	14	18	9
22	6	14	18	8
23	7	14	18	7
24	7	14	18	6
25	7	14	18	5
26	8	14	18	4
27	8	15	18	3
28	8	15	18	2
29	9	16	18	1
30	9	16	18	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI. X. IX.

Ajoutez en montant.

ARG. VII. Double dist. moy. de la Lune au Soleil, plus l'An. moy. du Sol.

Ajoutez en descendant.

0ᶠ. I. II.

Otez en descendant.

	VI.	VII.	VIII.	
	S.	S.	S.	
0	0	11	20	30
1	0	11	20	29
2	0	12	20	28
3	1	12	20	27
4	1	13	21	26
5	2	13	21	25
6	2	13	21	24
7	2	13	21	23
8	2	14	21	22
9	3	14	11	21
10	3	15	22	20
11	4	15	22	19
12	4	15	22	18
13	5	15	22	17
14	5	16	22	16
15	5	16	22	15
16	6	16	22	14
17	6	17	22	13
18	7	17	23	12
19	7	17	23	11
20	7	17	23	10
21	8	18	23	9
22	8	18	23	8
23	9	18	23	7
24	9	19	23	6
25	9	19	23	5
26	10	19	23	4
27	10	19	23	3
28	11	19	23	2
29	11	20	23	1
30	11	20	23	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

XI. X. IX.

Otez en montant.

ARG. VIII. Doubl. distance moy. de la Lune au Soleil, moins l'Anomalie moyenne du Soleil.

Otez en descendant.

0s. I. II.

Ajoutez en descendant.

D.	VI. M. S.	VII. M. S.	VIII. M. S.	D.
0	0	1 5	1 53	30
1	2	1 7	1 54	29
2	4	1 9	1 55	28
3	7	1 11	1 56	27
4	9	1 13	1 57	26
5	11	1 14	1 58	25
6	13	1 16	1 59	24
7	16	1 18	2 0	23
8	18	1 20	2 1	22
9	20	1 22	2 1	21
10	22	1 23	2 2	20
11	25	1 25	2 3	19
12	27	1 27	2 3	18
13	29	1 29	2 4	17
14	31	1 30	2 5	16
15	34	1 32	2 5	15
16	36	1 34	2 6	14
17	38	1 35	2 7	13
18	40	1 37	2 7	12
19	42	1 38	2 8	11
20	44	1 40	2 8	10
21	47	1 41	2 8	9
22	49	1 42	2 9	8
23	51	1 44	2 9	7
24	53	1 45	2 9	6
25	55	1 47	2 9	5
26	57	1 48	2 10	4
27	59	1 49	2 10	3
28	1 1	1 50	2 10	2
29	1 3	1 51	2 10	1
30	1 5	1 53	2 10	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI. X. IX.

Ajoutez en montant.

ARG. IX. Double distance moyenne de la Lune au Soleil, plus l'Anomalie moyenne de la Lune.

Otez en descendant.

0s. I. II.

Ajoutez en descendant.

D.	VI. M. S.	VII. M. S.	VIII. M. S.	D.
0	0	1 30	2 36	30
1	3	1 33	2 37	29
2	6	1 35	2 38	28
3	11	1 38	2 40	27
4	13	1 41	2 41	26
5	15	1 42	2 42	25
6	18	1 45	2 44	24
7	23	1 48	2 45	23
8	26	1 50	2 47	22
9	28	1 53	2 47	21
10	31	1 54	2 48	20
11	35	1 57	2 49	19
12	38	2 0	2 49	18
13	41	2 3	2 51	17
14	43	2 5	2 52	16
15	47	2 7	2 52	15
16	50	2 10	2 53	14
17	53	2 11	2 54	13
18	56	2 14	2 54	12
19	58	2 15	2 55	11
20	1 1	2 18	2 55	10
21	1 5	2 19	2 55	9
22	1 8	2 20	2 56	8
23	1 11	2 23	2 56	7
24	1 14	2 25	2 56	6
25	1 17	2 28	2 57	5
26	1 19	2 30	2 57	4
27	1 21	2 31	2 58	3
28	1 24	2 32	2 58	2
29	1 27	2 33	2 59	1
30	1 30	2 36	2 59	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI. X. IX.

Ajoutez en montant.

ARG. X. Argument VII, moins l'Anomalie moyenne de la Lune.

Otez en descendant.

	0ˢ.	I.	II.	
	Ajoutez en descendant.			
	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	31	54	30
1	1	32	54	29
2	2	33	55	28
3	3	34	55	27
4	4	35	56	26
5	6	36	56	25
6	7	37	56	24
7	8	38	57	23
8	9	38	57	22
9	10	39	58	21
10	11	40	58	20
11	12	41	58	19
12	13	42	59	18
13	14	42	59	17
14	15	43	1 0	16
15	16	44	1 0	15
16	17	45	1 0	14
17	18	45	1 0	13
18	19	46	1 1	12
19	20	47	1 1	11
20	21	48	1 1	10
21	22	48	1 1	9
22	23	49	1 1	8
23	24	50	1 1	7
24	25	50	1 2	6
25	26	51	1 2	5
26	27	51	1 2	4
27	28	52	1 2	3
28	29	52	1 2	2
29	30	53	1 2	1
30	31	54	1 2	0
	V.	IV.	III.	
	Otez en montant.			
	XI.	X.	IX.	

Ajoutez en montant.

ARG. XI. Argument VIII, moins l'Anomalie moyenne de la Lune.

Ajoutez en descendant.

	0ˢ.	I.	II.	
	Otez en descendant.			
	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	1 46	3 3	30
1	3	1 49	3 5	29
2	7	1 52	3 7	28
3	11	1 55	3 9	27
4	15	1 58	3 10	26
5	18	2 1	3 12	25
6	23	2 4	3 13	24
7	26	2 7	3 15	23
8	29	2 10	3 16	22
9	34	2 13	3 18	21
10	37	2 16	3 19	20
11	41	2 19	3 20	19
12	45	2 22	2 21	18
13	48	2 24	3 23	17
14	52	2 28	3 24	16
15	55	2 30	3 25	15
16	0 59	2 33	3 26	14
17	1 3	2 35	3 27	13
18	1 6	2 37	3 28	12
19	1 10	2 40	3 28	11
20	1 13	2 42	3 29	10
21	1 16	2 45	3 30	9
22	1 20	2 47	3 30	8
23	1 24	2 49	3 31	7
24	1 27	2 51	3 31	6
25	1 30	2 54	3 32	5
26	1 34	2 55	3 32	4
27	1 37	2 58	3 32	3
28	1 40	3 0	3 32	2
29	1 43	3 1	3 32	1
30	1 46	3 3	3 32	0
	V.	IV.	III.	
	Ajoutez en montant.			
	XI.	X.	IX.	

Otez en montant.

ARG XII. Double distance moyenne de la Lune au Nœud, moins l'Anomalie moyenne de la Lune.

Ajoutez en descendant.

0s. I. II.

Otez en descendant.

	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	31	54	30
1	1	32	54	29
2	2	33	55	28
3	3	34	55	27
4	4	35	56	26
5	6	36	56	25
6	7	37	56	24
7	8	38	57	23
8	9	38	57	22
9	10	39	58	21
10	11	40	58	20
11	12	41	58	19
12	13	42	59	18
13	14	42	59	17
14	15	43	1 0	16
15	16	44	1 0	15
16	17	45	1 0	14
17	18	45	1 0	13
18	19	46	1 1	12
19	20	47	1 1	11
20	21	48	1 1	10
21	22	48	1 1	9
22	23	49	1 1	8
23	24	50	1 1	7
24	25	50	1 2	6
25	26	51	1 2	5
26	27	51	1 2	4
27	28	52	1 2	3
28	29	52	1 2	2
29	30	53	1 2	1
30	31	54	1 2	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

XI. X. IX.

Otez en montant.

ARG. XIII. Argument VII, plus Argument XI.

Otez en descendant.

O. I. II.

Ajoutez en descendant.

	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	36	1 2	30
1	1	37	1 3	29
2	2	38	1 3	28
3	4	39	1 4	27
4	5	40	1 4	26
5	6	41	1 5	25
6	8	42	1 5	24
7	9	43	1 6	23
8	10	44	1 6	22
9	12	45	1 7	21
10	13	46	1 7	20
11	14	47	1 8	19
12	16	48	1 8	18
13	17	49	1 9	17
14	18	50	1 9	16
15	19	51	1 10	15
16	20	52	1 10	14
17	22	52	1 10	13
18	23	53	1 11	12
19	24	54	1 11	11
20	25	55	1 11	10
21	26	56	1 11	9
22	28	56	1 11	8
23	29	57	1 11	7
24	30	58	1 12	6
25	31	59	1 12	5
26	32	59	1 12	4
27	33	1 0	1 12	3
28	34	1 1	1 12	2
29	35	1 1	1 12	1
30	36	1 2	1 12	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI. X. IX.

Ajoutez en montant.

ARGUMENT XIV.
EQUATION DU CENTRE.
ANOMALIE MOYENNE DE LA LUNE + A.

N. B. J'appelle *A* la somme des Equations précédentes.

Otez en descendant.

	0 s.		I.		II.		
		Differ.		Differ.		Differ.	
D.	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D.*
0	0 0 0		2 58 22		5 16 8		30
1	0 6 11	6 11	3 3 50	5 28	5 19 35	3 27	29
2	12 21	6 10	3 9 14	5 24	5 22 57	3 22	28
3	18 31	6 10	3 14 36	5 22	5 26 14	3 17	27
4	24 41	6 10	3 19 54	5 18	5 29 25	3 11	26
5	30 51	6 10	3 25 11	5 17	5 32 32	3 7	25
6	37 0	6 9	3 30 25	5 14	5 35 33	3 1	24
7	43 8	6 8	3 35 35	5 10	5 38 28	2 55	23
8	49 16	6 8	3 40 41	5 6	5 41 17	2 49	22
9	55 23	6 7	3 45 44	5 3	5 44 0	2 43	21
10	1 1 30	6 7	3 50 42	4 58	5 46 36	2 36	20
11	1 7 35	6 5	3 55 38	4 56	5 49 7	2 31	19
12	1 13 40	6 5	4 0 30	4 52	5 51 33	2 26	18
13	1 19 42	6 2	4 5 19	4 49	5 53 53	2 20	17
14	1 25 44	6 2	4 10 3	4 44	5 56 7	2 14	16
15	1 31 46	6 2	4 14 44	4 41	5 58 15	2 8	15
16	1 37 45	5 59	4 19 21	4 37	6 0 17	2 2	14
17	1 43 43	5 58	4 23 53	4 32	6 2 12	1 55	13
18	1 49 39	5 56	4 28 21	4 28	6 4 1	1 49	12
19	1 55 34	5 55	4 32 45	4 24	6 5 44	1 43	11
20	2 1 27	5 53	4 37 5	4 20	6 7 20	1 36	10
21	2 7 17	5 50	4 41 20	4 15	6 8 50	1 30	9
22	2 13 6	5 49	4 45 31	4 11	6 10 14	1 24	8
23	2 18 52	5 46	4 49 37	4 6	6 11 32	1 18	7
24	2 24 38	5 46	4 53 38	4 1	6 12 42	1 10	6
25	2 30 22	5 44	4 57 36	3 58	6 13 47	1 5	5
26	2 36 3	5 41	5 1 29	3 53	6 14 45	0 58	4
27	2 41 41	5 38	5 5 17	3 48	6 15 36	0 51	3
28	2 47 15	5 34	5 9 0	3 43	6 16 20	0 44	2
29	2 52 50	5 35	5 12 36	3 36	6 16 57	0 37	1
30	2 58 21	5 31	5 16 8	3 32	6 17 27	0 30	0
	XI.		X.		IX.		

Ajoutez enmontant

ARGUMENT XIV.
EQUATION DU CENTRE.
ANOMALIE MOYENNE DE LA LUNE + A.

Otez en descendant.

	III.		IV.		V.		
		Differ.		Differ.		Differ.	
D.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D.
0	6 17 27		5 38 40		3 20 53		30
1	6 17 51	0 24	5 35 33	3 7	3 14 53	6 0	29
2	6 18 8	0 17	5 32 21	3 12	3 8 50	6 3	28
3	6 18 18	0 10	5 29 1	3 20	3 2 44	6 6	27
4	6 18 21	0 3	5 25 34	3 27	2 56 33	6 11	26
5	6 18 17	0 4	5 22 2	3 32	2 50 19	6 14	25
6	6 18 6	0 11	5 18 23	3 39	2 44 0	6 19	24
7	6 17 48	0 18	5 14 38	3 45	2 37 38	6 22	23
8	6 17 23	0 25	5 10 46	3 52	2 31 13	6 25	22
9	6 16 51	0 32	5 6 47	3 59	2 24 43	6 30	21
10	6 16 13	0 38	5 2 42	4 5	2 18 11	6 32	20
11	6 15 27	0 46	4 58 30	4 12	2 11 35	6 36	19
12	6 14 34	0 53	4 54 12	4 18	2 4 57	6 38	18
13	6 13 35	0 59	4 49 48	4 24	1 58 17	6 40	17
14	6 12 28	1 7	4 45 20	4 28	1 51 33	6 44	16
15	6 11 14	1 14	4 40 45	4 35	1 44 47	6 46	15
16	6 9 53	1 21	4 36 4	4 41	1 37 58	6 49	14
17	6 8 25	1 28	4 31 18	4 46	1 31 7	6 51	13
18	6 6 50	1 35	4 26 24	4 54	1 24 14	6 53	12
19	6 5 7	1 43	4 21 25	4 59	1 17 19	6 55	11
20	6 3 17	1 50	4 16 19	5 6	1 10 24	6 55	10
21	6 1 21	1 56	4 11 9	5 10	1 3 26	6 58	9
22	5 59 17	2 05	4 5 53	5 16	56 28	6 58	8
23	5 57 7	2 10	4 0 33	5 20	49 27	7 1	7
24	5 54 50	2 17	3 55 8	5 25	42 25	7 2	6
25	5 52 25	2 25	3 49 38	5 30	35 21	7 3	5
26	5 49 55	2 30	3 44 3	5 35	28 18	7 3	4
27	5 47 18	2 37	3 38 24	5 39	21 14	7 4	3
28	5 44 27	2 41	3 32 38	5 46	14 10	7 4	2
29	5 41 40	2 47	3 26 49	5 49	7 5	7 5	1
30	5 38 40	3 0	3 20 53	5 56	0 0	7 5	0
	VIII.		VII.		VI.		

Ajoutez en montant.

ARGUMENT XV.

VARIATION.

DISTANCE MOYENNE DE LA LUNE AU SOLEIL, + A.

	O.		Differ.	I.		Differ.	II.		Differ.	
D.	*M.*	*S.*	*M. S.*	*M.*	*S.*	*M. S.*	*M.*	*S.*	*M. S.*	*D.*
0	+ 0	0	1 23	+ 34	14	34	+ 32	46	47	30
1	+ 1	23	1 23	+ 34	48	37	+ 31	59	47	29
2	+ 2	46	1 23	+ 35	20	33	+ 31	12	49	28
3	+ 4	9	1 22	+ 35	52	29	+ 30	23	0 51	27
4	+ 5	31	1 22	+ 36	21	28	+ 29	32	0 53	26
5	+ 6	53	1 21	+ 36	49	25	+ 28	39	0 56	25
6	+ 8	14	1 20	+ 37	14	22	+ 27	43	1 0	24
7	+ 9	34	1 19	+ 37	36	18	+ 26	43	1 1	23
8	+ 10	43	1 18	+ 37	54	17	+ 25	42	1 2	22
9	+ 12	1	1 15	+ 38	11	13	+ 24	40	1 4	21
10	+ 13	26	1 15	+ 38	24	10	+ 23	36	1 5	20
11	+ 14	41	1 14	+ 38	34	8	+ 22	31	1 7	19
12	+ 15	55	1 13	+ 38	42	3	+ 21	24	1 8	18
13	+ 17	18	1 13	+ 38	45	1	+ 20	16	1 12	17
14	+ 18	31	1 10	+ 38	46	1	+ 19	4	1 13	16
15	+ 19	41	1 10	+ 38	45	4	+ 17	51	1 14	15
16	+ 21	1	1 8	+ 38	41	9	+ 16	37	1 14	14
17	+ 22	9	1 8	+ 38	32	11	+ 15	23	1 16	13
18	+ 23	17	1 6	+ 38	21	15	+ 14	7	1 17	12
19	+ 24	23	1 3	+ 38	6	18	+ 13	50	1 18	11
20	+ 25	26	1 4	+ 37	48	20	+ 11	32	1 18	10
21	+ 26	30	1 0	+ 37	28	22	+ 9	14	1 20	9
22	+ 27	30	0 58	+ 37	6	24	+ 8	54	1 21	8
23	+ 28	28	0 56	+ 36	42	27	+ 7	33	1 21	7
24	+ 29	24	0 54	+ 36	15	31	+ 6	12	1 22	6
25	+ 30	18	0 52	+ 35	54	33	+ 4	50	1 23	5
26	+ 31	10	0 50	+ 35	21	35	+ 3	27	1 23	4
27	+ 32	0	0 48	+ 34	46	36	+ 2	04	1 23	3
28	+ 32	48	0 46	+ 34	10	41	+ 0	41	1 23	2
29	+ 33	34	40	+ 33	29	43	— 0	42	1 23	1
30	+ 34	14		+ 32	46		— 2	5		0
	XI.			X.			IX.			

Signe contraire en montant.

ARGUMENT XV.

VARIATION.

DISTANCE MOYENNE DE LA LUNE AU SOLEIL, + A.

	III.		Differ.		IV.		Differ.		V.		Differ.		
D.	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	
0	— 2	5	1	23	— 36	28		39	— 36	10		44	30
1	— 3	28	1	23	— 37	7		39	— 35	26		47	29
2	— 4	51	1	22	— 37	46		34	— 34	39		48	28
3	— 6	13	1	21	— 38	20		31	— 33	51		50	27
4	— 7	34	1	21	— 38	51		31	— 33	01		52	26
5	— 8	55	1	20	— 39	22		27	— 32	9		59	25
6	— 10	15	1	20	— 39	49		24	— 31	10	1	0	24
7	— 11	35	1	20	— 40	3		24	— 30	10	1	4	23
8	— 12	55	1	19	— 40	37		23	— 29	6	1	4	22
9	— 14	14	1	19	— 40	50		15	— 28	2	1	6	21
10	— 15	33	1	18	— 41	5		13	— 26	56	1	7	20
11	— 16	51	1	17	— 41	18		13	— 25	49	1	12	19
12	— 18	8	1	16	— 41	31		7	— 24	37	1	12	18
13	— 19	24	1	15	— 41	38		7	— 23	25	1	12	17
14	— 20	39	1	12	— 41	45		0	— 22	13	1	17	16
15	— 21	51	1	11	— 41	45		1	— 20	56	1	14	15
16	— 23	02	1	10	— 41	44		6	— 19	42	1	20	14
17	— 24	12	1	10	— 41	38		4	— 18	22	1	20	13
18	— 25	22	1	7	— 41	34		12	— 17	2	1	21	12
19	— 26	29	1	5	— 41	22		14	— 15	41	1	21	11
20	— 27	34	1	2	— 41	8		17	— 14	20	1	23	10
21	— 28	36	1	0	— 40	51		19	— 12	59	1	23	9
22	— 29	36	0	59	— 40	32		22	— 11	36	1	24	8
23	— 30	35	0	58	— 40	10		26	— 10	12	1	25	7
24	— 31	33	0	56	— 39	44		29	— 8	47	1	26	6
25	— 32	29	0	51	— 39	15		32	— 7	21	1	27	5
26	— 33	20		51	— 38	43		33	— 5	54	1	27	4
27	— 34	11		46	— 38	10		37	— 4	27	1	28	3
28	— 34	57		46	— 37	33		40	— 2	59	1	28	2
29	— 35	43		45	— 36	53		43	— 1	31	1	31	1
30	— 36	28			— 36	10			— 0	0			0
	VIII.				*VII.*				VI.				

Signe contraire en montant.

ARGUMENT XVI.

DOUBLE ARGUMENT XV,

moins l'anomalie moyenne de la Lune.

Otez en descendant.

	0s.		I.		II.		
		Differ.		Differ.		Differ.	
D.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D.
0	0 0		37 48		1 6 1		30
1	1 20	1 20	38 58	1 10	1 6 41	40	29
2	2 40	1 20	40 7	1 9	1 7 19	38	28
3	3 59	1 19	41 15	1 8	1 7 57	38	27
4	5 18	1 19	42 22	1 7	1 8 34	37	26
5	6 36	1 18	43 28	1 6	1 9 9	35	25
6	7 54	1 18	44 33	1 5	1 9 43	34	24
7	9 12	1 18	45 38	1 5	1 10 16	33	23
8	10 30	1 18	46 41	1 3	1 10 48	32	22
9	11 48	1 18	47 43	1 2	1 11 18	30	21
10	13 06	1 18	48 45	1 2	1 11 48	30	20
11	14 24	1 18	49 47	1 2	1 12 18	30	19
12	15 42	1 18	50 47	1 0	1 12 45	27	18
13	16 59	1 17	51 45	0 58	1 13 10	25	17
14	18 16	1 17	52 44	0 59	1 13 33	23	16
15	19 32	1 16	53 41	0 57	1 13 56	23	15
16	20 48	1 16	54 38	0 57	1 14 19	23	14
17	22 4	1 16	55 33	0 55	1 14 41	22	13
18	23 20	1 16	56 27	0 54	1 14 59	18	12
19	24 35	1 15	57 21	0 54	1 15 17	18	11
20	25 50	1 15	58 14	0 53	1 15 34	17	10
21	27 4	1 14	59 5	0 51	1 15 49	15	9
22	28 17	1 13	59 56	0 51	1 16 1	12	8
23	29 30	1 13	1 0 45	0 49	1 16 13	12	7
24	30 42	1 12	1 1 33	48	1 16 25	12	6
25	31 54	1 12	1 2 21	48	1 16 35	10	5
26	33 5	1 11	1 3 8	47	1 16 43	8	4
27	34 16	1 11	1 3 54	46	1 16 49	6	3
28	35 27	1 11	1 4 38	44	1 16 54	5	2
29	36 38	1 11	1 5 20	42	1 16 58	4	1
30	37 48	1 10	1 6 1	41	1 17 0	2	0
	XI.		X.		IX.		

Ajoutez en montant.

ARGUMENT XVI.
DOUBLE ARGUMENT XV,
moins l'Anomalie moyenne de la Lune.

Otez en descendant.

	III.		IV.		V.		
		Differ.		Differ.		Differ.	
D.	D M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D.
0	1 17 0		1 7 21		0 39 09		30
1	1 17 0	0 0	1 6 40	0 41	37 59	1 10	29
2	1 17 0	0 0	1 5 58	0 42	36 48	1 11	28
3	1 16 58	0 2	1 5 16	0 42	35 37	1 11	27
4	1 16 55	0 3	1 4 32	0 44	34 25	1 12	26
5	1 16 51	0 4	1 3 47	0 45	33 13	1 12	25
6	1 16 43	0 8	1 3 1	0 46	32 00	1 13	24
7	1 16 35	0 8	1 2 13	0 48	30 46	1 14	23
8	1 16 27	0 8	1 1 24	0 49	29 31	1 15	22
9	1 16 17	0 10	1 0 35	0 49	28 15	1 16	21
10	1 16 6	0 11	59 44	0 51	26 58	1 17	20
11	1 15 51	0 15	58 51	0 53	25 41	1 17	19
12	1 15 36	0 15	57 58	0 53	24 23	1 18	18
13	1 15 21	0 15	57 5	0 53	23 04	1 19	17
14	1 15 4	0 17	56 10	0 55	21 44	1 20	16
15	1 14 45	0 19	55 13	0 57	20 24	1 20	15
16	1 14 24	0 21	54 16	0 57	19 04	1 20	14
17	1 14 2	0 22	53 17	0 59	17 43	1 21	13
18	1 13 39	0 23	52 19	0 58	16 22	1 21	12
19	1 13 16	0 23	51 17	1 2	15 01	1 21	11
20	1 12 51	0 25	50 15	1 2	13 40	1 21	10
21	1 12 25	0 26	49 13	1 2	12 19	1 21	9
22	1 11 55	0 30	48 10	1 3	10 57	1 22	8
23	1 11 24	0 31	47 6	1 4	9 35	1 22	7
24	1 10 53	0 31	46 0	1 6	8 13	1 22	6
25	1 10 21	0 32	44 54	1 6	6 51	1 22	5
26	1 9 48	0 33	43 47	1 7	5 29	1 22	4
27	1 9 13	0 35	42 38	1 9	4 07	1 22	3
28	1 8 37	0 36	41 29	1 9	2 45	1 22	2
29	1 8 1	0 36	40 19	1 10	1 23	1 22	1
30	1 7 21	0 40	39 9	1 10	0 0	1 22	0
	VIII.		VII.		VI.		

Ajoutez en montant.

RE'DUCTION A L'E'CLIPTIQUE.

Longitude vraie de la Lune, moins la longitude moyenne du Nœud.

Otez en descendant.

	Os. VI.		I. VII.		II. VIII.		
D.	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*D.*
0	0	0	5	59	5	59	30
1	0	14	6	7	5	52	29
2	0	29	6	13	5	44	28
3	0	43	6	19	5	36	27
4	0	58	6	26	5	27	26
5	1	12	6	31	5	18	25
6	1	26	6	36	5	7	24
7	1	40	6	40	4	57	23
8	1	54	6	44	4	47	22
9	2	8	6	47	4	37	21
10	2	21	6	50	4	27	20
11	2	34	6	52	4	16	19
12	2	47	6	54	4	3	18
13	3	1	6	55	3	52	17
14	3	14	6	56	3	40	16
15	3	27	6	56	3	27	15
16	3	40	6	56	3	14	14
17	3	52	6	55	3	1	13
18	4	3	6	54	2	47	12
19	4	16	6	52	2	34	11
20	4	27	6	50	2	21	10
21	4	37	6	47	2	8	9
22	4	47	6	44	1	54	8
23	4	57	6	40	1	40	7
24	5	7	6	36	1	26	6
25	5	18	6	31	1	12	5
26	5	27	6	26	0	58	4
27	5	36	6	19	0	43	3
28	5	44	6	13		29	2
29	5	52	6	7		14	1
30	5	59	5	59		0	0
	XI.	*V.*	*X.*	*IV.*	*IX.*	*III.*	

Ajoutez en montant.

ÉQUATION DU NŒUD.

ANOMALIE MOYENNE DU SOLEIL.

Ajoutez en descendant.

0s. I. II.

Otez en descendant.

	VI.		VII.		VIII.		
D.	M.	S.	M.	S.	M.	S.	D.
0	0	0	4	40	8	9	30
1		9	4	48	8	14	29
2		19	4	57	8	19	28
3		29	5	5	8	24	27
4		39	5	13	8	28	26
5		48	5	21	8	32	25
6		58	5	29	8	36	24
7	1	8	5	37	8	40	23
8	1	18	5	45	8	44	22
9	1	27	5	53	8	48	21
10	1	37	6	00	8	52	20
11	1	46	6	8	8	55	19
12	1	56	6	15	8	58	18
13	2	5	6	22	9	2	17
14	2	15	6	30	9	5	16
15	2	24	6	37	9	7	15
16	2	34	6	44	9	10	14
17	2	43	6	50	9	12	13
18	2	53	6	57	9	15	12
19	3	2	7	4	9	17	11
20	3	11	7	11	9	19	10
21	3	20	7	17	9	21	9
22	3	29	7	23	9	22	8
23	3	38	7	29	9	24	7
24	3	47	7	35	9	25	6
25	3	56	7	41	9	26	5
26	4	5	7	46	9	27	4
27	4	14	7	52	9	28	3
28	4	23	7	58	9	29	2
29	4	31	8	4	9	29	1
30	4	40	8	9	9	30	0
	V.		IV.		III.		

Ajoutez en montant.

XI. X. IX.

Otez en descendant.

LATITUDE DE LA LUNE.

ARGUMENT I.

(*) *Longitude vraie de la Lune, moins la longitude du Nœud, corrigée par l'équation précéd.*

	O. Boreal.		*I. Boreal.*		*II. Bor.*		
	VI. auſt.	Differ.	VII. auſt.	Differ.	VIII. auſt.	Differ.	
D.	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D.*
0	0 0 0		2 34 02		4 26 57		30
1	5 23	5 23	2 38 41	4 39	4 29 37	2 40	29
2	10 46	5 23	2 43 15	4 34	4 32 11	2 34	28
3	16 8	5 22	2 47 47	4 32	4 34 40	2 29	27
4	21 30	5 22	2 52 17	4 30	4 37 05	2 25	26
5	26 51	5 21	2 56 43	4 26	4 39 24	2 19	25
6	32 12	5 21	3 01 06	4 23	4 41 38	2 14	24
7	37 33	5 21	3 05 25	4 19	4 43 47	2 09	23
8	42 53	5 20	3 09 41	4 16	4 45 51	2 04	22
9	48 12	5 19	3 13 54	4 13	4 47 49	1 58	21
10	53 31	5 19	3 18 03	4 09	4 49 43	1 54	20
11	58 47	5 16	3 22 09	4 06	4 51 30	1 47	19
12	1 04 02	5 15	3 26 15	4 06	4 53 13	1 43	18
13	1 09 17	5 15	3 30 10	3 55	4 54 50	1 37	17
14	1 14 32	5 15	3 34 04	3 54	4 56 22	1 32	16
15	1 19 44	5 12	3 37 55	3 51	4 57 49	1 27	15
16	1 24 54	5 10	3 41 41	3 46	4 59 09	1 20	14
17	1 30 04	5 10	3 45 24	3 43	5 00 25	1 16	13
18	1 35 11	5 7	3 49 02	3 38	5 01 35	1 10	12
19	1 40 16	5 5	3 52 37	3 35	5 02 38	1 03	11
20	1 45 21	5 5	3 56 06	3 29	5 03 37	59	10
21	1 50 22	5 1	3 59 31	3 25	5 04 31	54	9
22	1 55 23	5 1	4 02 52	3 21	5 05 19	48	8
23	2 0 22	4 59	4 06 10	3 18	5 06 01	42	7
24	2 5 18	4 56	4 09 22	3 12	5 06 39	39	6
25	2 10 12	4 54	4 12 29	3 07	5 07 10	31	5
26	2 15 01	4 49	4 15 33	3 04	5 07 34	24	4
27	2 19 50	4 49	4 18 31	2 58	5 07 54	20	3
28	2 24 37	4 47	4 21 25	2 54	5 08 08	14	2
29	2 29 21	4 44	4 24 13	2 48	5 08 16	8	1
30	2 34 02	4 41	4 26 57	2 44	5 08 19	3	0
	V. Bor.		IV Bor.		III. Bor.		
	XI. Auſt.		*X. Auſt.*		*IX. Auſt.*		

(*) N. B. Cette longitude vraie de la Lune eſt celle qu'on trouve avant la réduction à l'Ecliptique, qui ne doit point entrer ici en ligne de compte.

LATITUDE DE LA LUNE.

ARGUMENT II.

Distance moyenne de la Lune au Soleil, plus la dernière équation du lieu de la Lune, moins la distance moyenne du Soleil au lieu moyen du Nœud.

	O. Bor.	I. Bor.	II. Bor.	
	VI. aust.	VII. aust.	VIII aust.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0 0	4 45	8 19	30
1	9	4 52	8 23	29
2	19	5 02	8 29	28
3	29	5 10	8 34	27
4	39	5 18	8 38	26
5	48	5 27	8 43	25
6	59	5 35	8 46	24
7	1 08	5 43	8 50	23
8	1 19	5 52	8 54	22
9	1 28	6 00	8 59	21
10	1 38	6 07	9 02	20
11	1 47	6 15	9 05	19
12	1 58	6 23	9 08	18
13	2 06	6 29	9 13	17
14	2 16	6 38	9 15	16
15	2 26	6 44	9 17	15
16	2 34	6 52	9 20	14
17	2 45	6 58	9 22	13
18	2 55	7 05	9 25	12
19	3 05	7 12	9 28	11
20	3 13	7 18	9 29	10
21	3 23	7 25	9 31	9
22	3 32	7 32	9 32	8
23	3 41	7 37	9 34	7
24	3 50	7 43	9 36	6
25	3 59	7 50	9 37	5
26	4 09	7 55	9 37	4
27	4 18	8 02	9 38	3
28	4 27	8 08	9 39	2
29	4 35	8 14	9 40	1
30	4 45	8 19	9 41	0
	V. Bor.	IV. Bor.	III. Bor.	
	XI. aust.	X. aust.	IX. aust.	

ARGUMENT III.

Double Argument XIV, moins l'Argument I. de la latitude.

	O. Bor.	I. Bor.	II. Bor.	
	VI aust.	VII. aust.	VIII. aust.	
D.	S.	S.	S.	D.
0	0	11	20	30
1	0	11	20	29
2	0	12	20	28
3	1	12	20	27
4	1	13	21	26
5	2	13	21	25
6	2	13	21	24
7	2	13	21	23
8	2	14	21	22
9	3	14	21	21
10	3	15	22	20
11	4	15	22	19
12	4	15	22	18
13	5	15	22	17
14	5	16	22	16
15	5	16	22	15
16	6	16	22	14
17	6	17	22	13
18	7	17	23	12
19	7	17	23	11
20	7	17	23	10
21	8	18	23	9
22	8	18	23	8
23	9	18	23	7
24	9	19	23	6
25	9	19	23	5
26	10	19	23	4
27	10	19	23	3
28	11	19	23	2
29	11	20	23	1
30	11	20	23	0
	V. Bor.	IV. Bor.	III. Bor.	
	XI. aust.	X. aust.	IX. aust.	

POUR LA PARALLAXE DE LA LUNE.

Longitude vraie de la Lune, moins la longitude moyenne de l'Apogée.

	O^s.	I.	II.	III.	IV.	V.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	54 4	54 24	55 23	56 52	58 31	59 50	30
1	54 4	54 26	55 26	56 55	58 34	59 52	29
2	54 4	54 27	55 28	56 59	58 37	59 54	28
3	54 4	54 29	55 31	57 2	58 40	59 56	27
4	54 4	54 30	55 33	57 6	58 43	59 58	26
5	54 5	54 32	55 36	57 9	58 46	59 59	25
6	54 5	54 33	55 39	57 13	58 49	60 1	24
7	54 5	54 35	55 41	57 16	58 52	60 2	23
8	54 5	54 36	55 44	57 19	58 55	60 4	22
9	54 6	54 38	55 47	57 23	58 58	60 5	21
10	54 6	54 40	55 50	57 26	59 1	60 7	20
11	54 6	54 42	55 53	57 29	59 4	60 8	19
12	54 7	54 43	55 56	57 32	59 7	60 9	18
13	54 7	54 45	55 59	57 36	59 10	60 10	17
14	54 8	54 47	56 2	57 39	59 12	60 11	16
15	54 9	54 49	56 5	57 42	59 15	60 12	15
16	54 9	54 51	56 8	57 45	59 17	60 12	14
17	54 10	54 53	56 11	57 49	59 20	60 13	13
18	54 11	54 55	56 14	57 52	59 23	60 14	12
19	54 12	54 57	56 17	57 55	59 25	60 15	11
20	54 13	54 59	56 20	57 58	59 28	60 16	10
21	54 14	55 1	56 23	58 2	59 30	60 16	9
22	54 15	55 3	56 26	58 5	59 33	60 17	8
23	54 16	55 6	56 30	58 8	59 35	60 18	7
24	54 17	55 8	56 33	58 12	59 38	60 19	6
25	54 18	55 11	56 36	58 15	59 40	60 19	5
26	54 19	55 13	56 39	58 18	59 42	60 20	4
27	54 20	55 16	56 43	58 22	59 44	60 20	3
28	54 22	55 18	56 46	58 25	59 46	60 20	2
29	54 23	55 21	56 49	58 28	59 48	60 20	1
30	54 24	55 23	56 52	58 31	59 50	60 20	0
	XI.	X.	IX.	VIII.	VII.	VI.	

CORRECTIONS DE LA PARALLAXE.

I. CORRECTION.

ARG XVI. De la longitude.

Otez en descendant.

0s.	I.	II.

Ajoutez en descendant.

D.	VI. S.	VII. S.	VIII. S.	D.
0	40	35	20	30
1	40	35	19	29
2	40	34	19	28
3	40	34	18	27
4	40	34	17	26
5	40	33	17	25
6	40	33	16	24
7	40	32	15	23
8	40	32	15	22
9	39	31	14	21
10	39	31	13	20
11	39	30	13	19
12	39	30	12	18
13	39	29	11	17
14	39	29	11	16
15	39	28	10	15
16	38	28	9	14
17	38	27	9	13
18	38	27	8	12
19	38	26	7	11
20	38	26	7	10
21	38	25	6	9
22	37	24	6	8
23	37	24	5	7
24	37	23	4	6
25	37	23	4	5
26	36	22	3	4
27	36	21	2	3
28	36	21	2	2
29	35	20	1	1
30	35	20	0	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

XI.	X.	IX.

Otez en montant.

II. CORRECTION.

DOUBLE ARG. XV. De la longitude.

Ajoutez en descendant.

0s.	I.	II.

Otez en descendant.

D.	VI. S.	VII. S.	VIII. S.	D.
0	30	25	15	30
1	30	25	15	29
2	30	25	15	28
3	30	24	14	27
4	30	24	14	26
5	30	24	13	25
6	30	24	13	24
7	30	24	12	23
8	30	23	12	22
9	30	23	11	21
10	30	23	11	20
11	29	22	10	19
12	29	22	10	18
13	29	21	9	17
14	29	21	9	16
15	29	21	8	15
16	29	20	8	14
17	28	20	7	13
18	28	19	6	12
19	28	19	6	11
20	28	19	5	10
21	27	18	5	9
22	27	18	4	8
23	27	18	4	7
24	27	17	3	6
25	26	17	3	5
26	26	17	2	4
27	26	17	1	3
28	26	16	1	2
29	26	16	0	1
30	25	15	0	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI.	X.	IX.

Ajoutez en montant.

EXEMPLE

Pour faire uſage de ces Tables.

SOIT propoſé de trouver la longitude de la Lune, le 18 Mai 1761 à 10 heures 22 minutes 12 ſecondes de de tems moyen au Méridien de Paris.

On ajoutera aux époques le moyen mouvement pour le dernier jour du mois d'Avril, celui qui répond à 18 jours pour le mois de Mai, & celui de $10^h 22' 12''$, de la maniere ſuivante.

	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de l'Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud aſcendant rétrograde.
	Sig. D. M. S.	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*
1761.	09 10 20 07	06 01 32 39	07 01 01 57	08 18 37 10	10 12 24 47	02 07 38 33
Avril.	3 28 16 39	3 28 16 18	4 21 10 03	00 13 22 09	4 07 47 54	00 06 21 17
18 jour.	17 44 30	17 44 27	7 27 10 30	2 00 19	7 25 10 11	57 11
10 heur.	24 38	24 38	5 29 24	2 47	5 26 37	1 19
22 min.	54	54	12 05	6	11 57	3
12 ſec.	1	1	7	0	7	0
						00 07 19 50
	01 26 46 49	10 17 58 57	07 25 04 06	09 04 02 31	10 21 01 33	02 00 18 43

Le nœud étant rétrograde, il faut, pour avoir ſa longitude moyenne $2^s. 0^d. 18' 43''$, ſouſtraire de l'époque $2^s. 7^d. 38' 33''$ la ſomme $7^d 19' 50''$ des moyens mouvemens qui répondent au mois, au jour du mois, &c.

I. Equation. Avec l'Anomalie moyenne du Soleil $10^s\ 17^\circ\ 58'\ 57''$, on trouvera l'équation $-\ 7'\ 34''$.

II. Equation. De la Longitude moyenne du Soleil, si on retranche celle de l'Apogée de la Lune, on a $4^s\ 22^\circ\ 44'\ 17''$, distance moyenne du Soleil à l'apogée moyen de la Lune, ou l'Argument II, avec lequel on trouve cette équation $+\ 2'\ 22''\ 20'''$.

III. Equation. De la Longitude moyenne du Soleil, ôtant celle du Nœud, on a $11^s\ 26^\circ\ 28'\ 05''$, distance moyenne du Soleil au lieu moyen du Nœud, ou l'Argument III, avec lequel on trouve cette équation $+\ 8''$.

IV. Equation. L'Argument IV. $9^s\ 09^\circ\ 00'\ 28''$, est la somme de l'Anomalie moyenne de la Lune & de celle du Soleil. Il sert à trouver cette équation $+\ 1'\ 36''$.

V. Equation. De l'Anomalie moyenne de la Lune, ôtant celle du Soleil, il vient pour l'Argument V, $00^s\ 03^\circ\ 02'\ 36''$, avec lequel on trouve cette équation $+\ 7''$.

VI. Equation. De la Longitude moyenne de la Lune, ôtant celle du Soleil, on a $05^s\ 28^\circ\ 17'\ 17''$, distance moyenne de la Lune au Soleil: on ajoute à cette distance l'Anomalie moyenne du Soleil; ce qui donne $04^s\ 16^\circ\ 16'\ 13''$, ou l'Argument VI, avec lequel on trouve cette équation $-\ 13''$.

VII. Equation. Au double de la distance moyenne de la Lune au Soleil, ajoutant l'Anomalie moyenne du Soleil, la somme est l'Argument VII $10^s\ 14^\circ\ 33'\ 30''$, avec lequel on trouve cette équation $-\ 16''$.

VIII. Equation. Du double de la distance moyenne de la Lune au Soleil, ôtant l'Anomalie moyenne du Soleil, la différence est l'Argument VIII, 1ˢ 08° 35′ 38″, qui sert à trouver cette équation — 1′ 21″.

IX. Equation. Au double de la distance moyenne de la Lune au Soleil, ajoutant l'Anomalie moyenne de la Lune, la somme est l'Argument IX. 10ˢ 17° 36′ 6″, qui sert à trouver cette équation + 2′ 2″.

X. Equation. L'Argument VII, moins l'Anomalie moyenne de la Lune, donne pour l'Arg. X. 11ˢ 23° 31′ 58″, avec lequel on trouve cette équation + 8″.

XI. Equation. L'Argument VIII, moins l'Anomalie moyenne de la Lune, donne pour l'Argument XI. 02ˢ 17° 34′ 06″, avec lequel on trouve cette équation + 3′ 27″ 30‴. . . . .

XII. Equation. La distance moyenne de la Lune au Nœud égale la longitude moyenne de la Lune, moins celle du Nœud. Or si du double de cette distance l'on ôte l'Anomalie moyenne de la Lune, la différence est l'Argument XII. 0ˢ 28° 29′ 12″, avec lequel on trouve cette équation + 29″ 30‴.

XIII. Equation. L'Argument VII, plus l'Argument XI donne l'Argument XIII. 01ˢ 02° 07′ 36″, qui sert à trouver cette équation — 38″.

Somme des équations positives	10′	19″	40‴
Somme des équations négatives	10	02	
Eqution *A* positive	00	17	40

Si la ſomme des équations négatives avoit ſurpaſſé la ſomme des équations poſitives, l'équation *A* auroit été négative.

XIV. Equation. A l'Anomalie moyenne de la Lune, il faut ajouter l'équation *A* pour avoir l'Argument XIV. $10^s 21^\circ 01' 50''$, avec lequel on trouve l'équation du centre de $3^\circ 45' 41''$ poſitive.

XV. Equation. A la diſtance moyenne de la Lune au Soleil, il faut ajouter l'équation *A*. Cela donne l'Arg. XV. $5^s 28^\circ 17' 35''$, qui ſert à trouver la variation de $-2' 33''$.

XVI. Equation. Du double de l'Argument XV, ôtant l'Anomalie moyenne de la Lune, on a l'Argument XVI. $1^s 05^\circ 33' 36''$, qui fait trouver la derniere équation de $44' 25''$.

Equation du centre poſitive	$3^\circ 45' 41'' 0'''$
Equation *A*	17 40
Somme des équations poſitives . . .	3 45 58 40
Equation de la variation négative . . .	$2' 33''$
XVI. Equation auſſi négative	44 25
Somme des équations négatives	46 58.

La ſomme des équations poſitives eſt plus grande que celle des négatives : ainſi leur différence doit être ajoutée à la longitude moyenne de la Lune, pour avoir la longitude vraie de cet Aſtre dans ſon orbite.

Longitude moyenne de la Lune . . .	$7^s 25^\circ 04' 06''$
Equation additive	2 59 01
Long. vraie de la Lune dans ſon orbite	7 28 03 07

Réduction à l'Ecliptique. De la longitude vraie de la Lune, ôtant la longitude moyenne du Nœud, il vient 5ˢ 27° 44′ 16″. Avec cet Argument on trouvera la réduction de + 33″. Ainsi la longitude vraie de la Lune réduite à l'Ecliptique, & comptée de l'Equinoxe, sera de 7ˢ 28° 03′ 40″, dont il faudra retrancher 15″ à cause de l'équation de la *précession* en longitude.

Correction du Nœud. L'Anomalie moyenne du Soleil donnera pour l'équation du nœud — 5′ 53″; la longitude du nœud corrigée sera donc de 02ˢ 00° 12′ 50″.

Latitude. I. Equation. Si de la longitude vraie de la Lune dans son orbite, on ôte la longitude du nœud corrigée, on aura l'Argument premier de la latitude de 5ˢ 27° 50′ 17″. Avec cet Argument on trouve la latitude de 11′ 37″ boréale. . . . . .

II. Equation. Retranchant la distance moyenne du Soleil au lieu moyen du Nœud, de la distance moyenne de la Lune au Soleil, & y ajoutant la derniere équation du lieu de la Lune, on a le second Argument de la latitude de 6ˢ 01° 04′ 47″. Cet Argument fait trouver une seconde latitude de 10″ australe.

III. Equation. Otant du double de l'Argument XIV, l'Argument I. de la latitude, il vient un troisiéme Argument qui sert à trouver une troisiéme latitude de 22″ boréale.

La latitude vraie de la Lune sera donc boréale, & de 11′ 49″.

Parallaxe. La longitude vraie de la Lune, moins la

longitude moyenne de l'Apogée, nous fera trouver pour la parallaxe 54′ 33″.

I. Correction. L'Argument XV. de la longitude donne pour cette premiere correction — 40″.

II. Correction. Le double de l'Argument XIV de la longitude, fait trouver pour cette seconde correction + 30″.

Ainsi la vraie Parallaxe de la Lune se trouve être de 54′ 23″.

Si on s'en rapporte aux calculs faits dans la *Connoissance des Tems* sur les Tables de M. Mayer, on aura,

La longitude vraie sur l'orbite de . . .	7ˢ 28° 04′ 16″
La longit. vraie réd. à l'Ecliptique de	7 28 04 46
La latitude vraie boréale de	10 37
La Parallaxe de	54′ 40″

Fin des nouvelles Tables de la Lune.



QUINZIÉME

QUINZIÉME MÉMOIRE.

De la Libration de la Lune.

I.

LA figure non circulaire de l'orbite de la Lune, & l'irrégularité du mouvement de la Lune dans cette orbite, ne ſont pas les ſeules cauſes de la libration que l'on obſerve dans cette Planète. Cette libration vient auſſi en partie de deux autres cauſes; 1°. de ce que l'axe de la Lune n'eſt pas perpendiculaire à l'orbite de cette Planète; 2°. de ce que les nœuds de cette orbite, & probablement l'axe même de la Lune, ont un mouvement de rotation autour des pôles de l'Ecliptique.

I I.

Le mouvement des nœuds de l'orbite lunaire eſt conſtaté par les obſervations & par la théorie, & on en connoît aſſez éxactement la valeur. A l'égard du mouvement de l'axe lunaire, ni la théorie, ni les obſervations ne nous ont encore preſque rien appris à ce ſujet. Cependant ſi la Lune, comme on n'en ſauroit douter,

tourne autour de son axe, il s'ensuit qu'elle doit être un sphéroïde applati, & dès-là il est démontré par la théorie de la précession des équinoxes, que cet axe ne sauroit demeurer éxactement parallèle à lui-même.

III.

Ce n'est pas tout; la Lune nous présentant toujours à-peu-près la même face, il est visible que l'action de la Terre doit allonger cette Planète dans le sens de la ligne qui joint la Lune & la Terre; or comme l'axe de la Lune fait un angle de près de 90 degrés avec l'Ecliptique, la ligne qui joint les centres de la Terre & de la Lune, est à-peu-près dans le plan de l'équateur de cette derniere Planète. L'équateur de la Lune doit donc être allongé dans le sens du diametre qui va de la Lune à la Terre, & par conséquent avoir la figure d'une Ellipse, dont le grand axe soit à-peu-près dans la direction de la Lune à la Terre. D'un autre côté la rotation de la Lune autour de son axe, doit renfler l'équateur, & rendre les méridiens des Ellipses; ainsi dans la Lune les méridiens, l'équateur & les parallèles doivent être des Ellipses.

IV.

J'ai donné dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1754, une méthode pour trouver les mouvemens de l'axe dans de pareils sphéroïdes. Voici le résultat de cette méthode, qu'il est nécessaire de rap-

peller ici. Supposons qu'on fasse passer un méridien par l'axe de la Planète, & par un des deux axes de l'équateur, n'importe lequel; soit le demi axe de la Planète (celui qui est commun à tous les méridiens) $= 1$, & un des demi-axes de l'équateur $1 + \alpha$, α étant positif ou négatif; soit aussi l'autre demi axe de l'équateur $1 + \alpha + \rho$, ρ étant aussi positif ou négatif; les phénomenes de la précession des équinoxes seront les mêmes que si l'équateur étoit circulaire, & que son demi diametre fût $1 + \alpha + \frac{\rho}{2}$, le demi axe de la Planète étant toujours supposé égal à l'unité.

V.

Si on avoit fait passer le méridien par les demi axes 1, & $1 + \alpha + \rho$, l'autre demi axe $1 + \alpha$ auroit été $1 + \alpha + \rho - \rho$; & le demi diametre de l'équateur, supposé circulaire, auroit été, suivant la Proposition précédente, $1 + \alpha + \rho - \frac{\rho}{2} = 1 + \alpha + \frac{\rho}{2}$, comme ci-dessus; ce qui prouve ce que nous disions il n'y a qu'un moment, qu'il n'importe par lequel des deux axes de l'équateur on fasse passer le méridien supposé, & que le résultat sera toujours le même.

VI.

Or en supposant la Lune homogene (car c'est la seule supposition que nous puissions faire ici) & en regardant

d'abord l'équateur comme circulaire, soit la masse de la Terre . . . . θ,

Celle de la Lune . . . . λ,

Le tems de la révolution de la Terre autour de son axe . . . . t,

Le tems de la révolution de la Lune autour de son axe . . . . t',

Le rayon de la Terre . . . . r,

Celui de la Lune . . . . r',

Et on aura, comme il est aisé de conclure de la seconde Partie de nos *Recherches sur le Systême du Monde*, art. 346;

$$\alpha = \frac{\theta\, r'^3\, t^2}{230\, \lambda\, r^3\, t'^2};$$

quantité dans laquelle le rapport $\frac{\theta}{\lambda}$ de la masse de la Terre à celle de la Lune = à-peu-près 75, $\frac{r'}{r} = \frac{100}{365}$, & $\frac{t}{t'} = \frac{23^h.\ 56'}{27^j.\ 7^h.\ 43'}$; ce qui donne,

$$\alpha = \frac{1}{111936,\ 6720}.$$

VII.

Faisons présentement abstraction de la rotation de la Lune; & n'ayons égard qu'à l'action de la Terre, qui doit allonger cette Planète dans le sens de son équateur: soit ρ la quantité dont le demi axe de l'équateur de la Lune, qui est à-peu-près dans la même ligne que le centre de la Terre, surpasse l'autre demi axe; & on aura

par les formules que j'ai données dans mes *Recherches ſur la Cauſe des Vents* (art. 31.), en nommant δ la diſtance de la Terre à la Lune,

$$\rho = \frac{3\,\theta\, r'^3}{2\,\lambda\,\delta^3} \times \frac{5}{2}.$$

Et par conſéquent,

$$\frac{\rho}{2} = \frac{15\,\theta\, r'^3}{8\,\lambda\,\delta^3};$$

Donc ſuppoſant $\delta = 60$ fois le rayon de la Terre, on trouvera $\frac{\rho}{2} = \frac{1}{74691,2640}$.

VIII.

Maintenant, puiſque α eſt la quantité dont le Globe de la Lune ſeroit applati par la rotation, & ρ celle dont il ſeroit allongé par l'action de la Terre; il s'enſuit, comme il a été démontré dans les *Recherches ſur la Cauſe des Vents*, art. 62, que ces deux cauſes conjointes produiront ſenſiblement le même effet ſur le ſphéroïde lunaire; enſorte que le demi axe étant ſuppoſé $= 1$, le demi axe de l'équateur lunaire qui paſſe par le centre de la Terre, ſera à-très-peu-près $1 + \alpha + \rho$, & l'autre demi axe, diſtant de celui-là de 90 degrés, ſera $1 + \alpha$.

IX.

Donc en regardant la Lune comme homogene, le mouvement de ſon axe autour des poles de l'Ecliptique ſera le même que ſi le demi axe étant $= 1$, l'équateur

étoit circulaire, & avoit pour rayon $1 + \alpha + \frac{\varrho}{2} = 1 + \frac{1}{111936,6720} + \frac{1}{74691,2640} = 1 + \frac{1}{42806,1634}$.

Voyons ce qui résulte de cette supposition.

X.

Nous nous rappellerons d'abord, que suivant l'art. 345 de la seconde Partie des *Recherches sur le Système du Monde*, si on fait

l'angle de l'axe de la Lune avec l'Ecliptique $= \pi$;

$1 + 6 = 178 \frac{3}{4} = 179$ à-très-peu-près;

$k = -\frac{27^j.7^h.43'}{365^j.6^h.9'}$;

le mouvement rétrograde des points équinoxiaux lunaires pendant une année solaire, sera

$$\tfrac{3}{2}\left(\alpha + \frac{\varrho}{2}\right) \times \frac{2+6}{-k} \times 360^\circ \times \text{sin. } \pi.$$

Et comme l'angle de l'axe de la Lune avec l'Ecliptique est de près de 90 degrés, si on regarde sin. π comme $= 1$, on aura le mouvement rétrograde cherché égal à

$$\tfrac{3}{2}\left(\alpha + \frac{\varrho}{2}\right) \times \frac{2+6}{-k} \times 360^\circ = \text{environ } 11'\, 8''$$

dans le cours d'une année solaire.

XI.

Dans le cours d'un mois périodique lunaire, qui n'est que de $27^j\, 7^h\, 43'$, il faudra, pour avoir la précession des points équinoxiaux lunaires, multiplier la quantité pré-

cédente par $\frac{27^{j}.7^{h}.43'}{365^{j}.6^{h}.9'}$; ce qui donnera la préceſſion pendant un mois lunaire, égale à $50''$, préciſément comme celle qu'on obſerve dans les points équinoxiaux de la Terre pendant le tems d'une révolution de cette Planète.

Ainſi, en ſuppoſant la Lune homogene, ſes points équinoxiaux rétrograderoient pendant le tems d'une révolution de la Lune autour de la Terre, préciſément de la même quantité que les points équinoxiaux de la Terre rétrogradent pendant le tems d'une révolution de la Terre autour du Soleil. Propoſition qui m'a paru digne d'être remarquée; quoique je ne prétende d'ailleurs en tirer aucune conſéquence. Car outre que nous ignorons ſi la Lune eſt homogene, & ſi par conſéquent la préceſſion de ſes points équinoxiaux eſt réellement de $50''$ dans l'eſpace d'un mois périodique, il eſt certain que ſi la Terre étoit homogene, la préceſſion annuelle de ſes points équinoxiaux, ſeroit de beaucoup plus de $50''$; en effet par l'action ſeule du Soleil, cette préceſſion ſeroit d'environ $21''\ 13'''$, & la préceſſion par l'action ſeule de la Lune ſeroit environ $21''\ 13''' \times (\frac{179}{75}) = 21''\ 13''' \times (2 + \frac{29}{75}) = 21''\ 13''' \times (2 + \frac{2}{5})$ à-très-peu-près. Ainſi la préceſſion totale des points équinoxiaux de la Terre ſeroit d'environ $1'\ 12''$, ſi la Terre étoit homogene (*a*).

(*a*) Dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſeconde Partie art. 374 à la fin, nous avons remarqué une autre analogie ſinguliere entre la rotation

XII.

Outre cette précession, l'axe de la Lune aura un mouvement de nutation répondant au mouvement des nœuds de la Lune, & qui s'achevera dans le même tems; & si on appelle m' la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire au plan de l'Ecliptique, n' le rapport du mouvement annuel des nœuds de la Lune à l'arc de 360°; on trouvera (art. 345 des *Recherches sur le Systême du Monde, seconde Partie*) 1°. que la nutation de l'axe sera $\frac{3}{2}\left(\alpha + \frac{\varrho}{2}\right) \times \frac{1 + \epsilon}{- k} \times \frac{\text{sin.}\, \pi \times m'}{n' - M}$, M étant $= \frac{11'\ 8''}{360°}$; c'est-à-dire, égal au rapport du mouvement annuel des points équinoxiaux lunaires à l'arc de 360 degrés.

2°. Que l'équation de la précession sera $\frac{3}{2}\left(\alpha + \frac{\varrho}{2}\right) \times \frac{1 + \epsilon}{- k} \times \frac{m'}{n' - M} \times \frac{\text{cos.}\, 2\,\pi}{\text{cos.}\, \pi} \times 57° 17' 44''$.

XIII.

Or comme les nœuds de la Lune parcourent environ 19° 21' par an, on aura $n' = \frac{19°\ 21'}{360°} =$ environ $\frac{29}{540}$; & il est clair que cette fraction étant considérablement plus grande que $M = \frac{11'\ 8''}{360°}$, on peut dans la formule

de la Terre & celle de la Lune, supposées toutes deux homogenes. Nous y renvoyons le Lecteur.

précédente mettre ſimplement n' au lieu de $n' - M$; de plus la tangente m' de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire $= \text{tang.}\ 5^\circ\ 9' = \frac{901273}{10000000}$. Donc en ſuppoſant ſin. $\pi =$ au ſinus total $= 57^\circ\ 17'\ 44''$, on trouvera (à cauſe de $1 + 6 = 179$) la nutation de l'axe de la Lune $= 2'\ 48''$ environ.

XIV.

A l'égard de l'équation de la préceſſion, comme π eſt à-peu-près 90 degrés, coſ. 2π ſera à-peu-près = au ſinus total; mais pour coſ. π nous prendrons le coſinus de 88 degrés, l'angle de l'axe lunaire avec l'Ecliptique étant à-peu-près de cette quantité, ſuivant les obſervations de M. Caſſini. Donc on aura coſ. $\pi = \frac{348995}{10000000}$; & pour avoir l'équation de la préceſſion, il faudra multiplier la quantité de la nutation, trouvée dans l'article précédent, par $\frac{1}{\text{coſ.}\ \pi}$, ou $\frac{10000000}{348995}$; ce qui donnera pour cette équation, $1^\circ\ 20'\ 13''$.

XV.

Donc, en récapitulant tout ce qui vient d'être trouvé, on voit que ſi la Lune eſt ſuppoſée homogene,

Ses points équinoxiaux rétrograderont pendant une année ſolaire d'environ . . . . $11'\ 8''$,

Et pendant un mois périodique lunaire, d'environ $50''$.

Que de plus le mouvement des points équinoxiaux

sera sujet à une équation d'environ 1° 20′, tantôt additive, & tantôt soustractive, pendant le tems d'une révolution des nœuds de la Lune, c'est-à-dire, en dix-huit ans & sept mois.

Qu'enfin pendant ce même-tems de dix-huit ans & sept mois, l'axe de la Lune sera sujet à une nutation d'environ 2′ 48″, tantôt pour s'approcher, tantôt pour s'éloigner de l'Ecliptique; & par conséquent à une nutation totale d'environ deux fois 2′ 48″, c'est-à-dire, de 5′ 36″.

XVI.

Tels sont les phénomenes de la nutation de l'axe de la Lune & de la précession des points équinoxiaux de la Lune, dans l'hypothèse que cette Planète soit homogène. Mais comme cette supposition est absolument gratuite, les conséquences qui en résultent par rapport au mouvement de l'axe Lunaire, le sont aussi. Cependant j'ai cru que les Mathématiciens verroient avec plaisir cet essai sur les mouvemens de l'axe de la Lune, dans l'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire à ce sujet, & par laquelle on peut au moins donner quelque idée de ces mouvemens.

XVII.

Pour déterminer par la théorie les loix du mouvement de l'axe lunaire, il faudroit connoître par observation; 1°. le rapport de cet axe aux deux axes de l'équateur; 2°. le rapport des deux axes de l'équateur; 3°. la

difpofition intérieure des parties qui compofent la maffe de la Lune; car la variété de cette difpofition doit faire varier les mouvemens de l'axe, comme il eft aifé de le conclure des formules que nous avons données fur cela dans les Mém. de l'Académie de 1754, p. 421.

Or quant à ce dernier article, aucune obfervation, ni aucune théorie ne peuvent nous le faire connoître. Quant au fecond, comme un des axes de l'équateur lunaire eft à-peu-près dans la ligne qui joint la Lune & la Terre, il n'eft pas poffible non plus de connoître cet axe par l'obfervation, ni par conféquent le rapport des axes de l'équateur lunaire. Quant au troifiéme, la différence de l'axe de la Lune & de celui des axes de l'équateur que nous pouvons voir & mefurer, eft fi petite qu'elle échappe à une mefure éxacte. M. Mayer laiffant à part le diametre de la Lune qui paffe par la Terre, & qu'on ne fauroit mefurer, a obfervé la différence des deux diametres vifibles; il l'a trouvée tantôt en plus, tantôt en moins, & raffemblant enfuite les différences par une efpéce de milieu, il juge que l'axe de la Lune eft plus petit d'environ 2″ à 3″, que le diametre vifible de l'équateur lunaire. Mais cet habile Aftronome ne diffimule pas lui-même combien ces déterminations font peu certaines.

XVIII.

Au refte il n'eft pas étonnant, vû la lenteur du mouvement de rotation de la Lune, que la différence de

ſes deux diametres viſibles ſoit ſi petite ; la théorie hypothétique que nous avons expoſée ci-deſſus, ne donne pour la différence de ces deux diametres qu'environ $\frac{1}{112000}$, ce qui eſt fort au-deſſous de 1″ ; car le diametre de la Lune étant ſuppoſé d'environ 34′, une ſeconde de différence dans les deux diametres donneroit $\frac{1}{2040}$ pour cette différence, quantité fort au-deſſus de $\frac{1}{112000}$ que nous a donné la théorie. Et quand même la différence des deux diametres de la Lune ſeroit de $\frac{1}{2040}$, il ſeroit très-difficile, ſuivant la remarque de M. Mayer, de s'en aſſurer ; puiſque les erreurs qu'on peut commettre dans l'obſervation des diametres de la Lune, ſont de 1″ au moins, & par conſéquent au moins égales à la fraction $\frac{1}{2040}$.

XIX.

Il réſulte de tout ce qu'on vient de dire, qu'on ne peut connoître par la théorie le mouvement de l'axe de la Lune, faute d'élémens ſuffiſans pour le déterminer. Ce ne peut donc être que par les obſervations, qu'on peut eſpérer d'y parvenir. M. Mayer a publié ſur ce ſujet un ſavant Ecrit dans les Ephémérides de Nuremberg ; & un habile Géometre Italien ayant cherché une

méthode (*a*) pour trouver la position de l'axe de la Lune par trois observations d'une tache, trouve, d'après les observations de M. Mayer, que la position de l'axe de la Lune est variable, que son inclinaison est, suivant les circonstances, de 2° 8', de 1° 22", de 1° 38"; d'où il conclud que l'inclinaison moyenne est de 1° 43'; ce qui est fort différent de l'inclinaison fixée par M. Cassini à deux degrés $\frac{1}{2}$. Il trouve aussi que par une des observations, le nœud de l'équateur lunaire, son point d'intersection avec l'Ecliptique, est de 12° plus oriental que le nœud de l'orbite lunaire; dans une seconde observation il le trouve de 4° plus oriental; & enfin dans une troisiéme de 21°. plus occidental; d'où il conclud que les nœuds de l'équateur lunaire ont un mouvement rétrograde beaucoup plus prompt que les nœuds de l'orbite de la Lune; ce qui suffiroit pour renverser, s'il étoit nécessaire, la prétention de quelques Astronomes, qui ont supposé, sans aucune preuve tirée des observations ni de la théorie, que les nœuds de l'équateur lunaire, & ceux de l'orbite lunaire, ont le même mouvement. Au reste le Géometre dont nous venons de parler, convient que toutes les déterminations précédentes sont assez incertaines, parce qu'une légere erreur dans les observations, en produit une fort grande dans le résultat

(*a*) Cette méthode que M. Delisle a bien voulu me communiquer, ainsi que la traduction françoise de l'Ouvrage de M. Mayer, n'est, je crois, encore que manuscrite; je ne la donne point ici, afin de laisser à l'Auteur l'avantage de la publier lui-même, s'il le juge à propos.

qu'on cherche. Ce n'eſt donc que par des obſervations multipliées & réitérées, qu'on pourra parvenir à quelques connoiſſances certaines ſur les vrais mouvemens de l'axe de la Lune.

XX.

Il eſt d'autant plus néceſſaire de connoître exactement ces mouvemens, que c'eſt le ſeul moyen de décider ſi la rotation de la Lune autour de ſon axe eſt exactement égale à ſon mouvement moyen autour de la Terre. En effet nous avons déja fait voir dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, II. Partie art. 374, que ſi l'axe de la Lune n'eſt pas ſuppoſé toujours parallèle à lui-même, l'égalité prétendue entre le mouvement de rotation de la Lune, & ſon mouvement moyen autour de la Terre, n'eſt pas rigoureuſement vraie; ce qui ne doit pas paroître ſurprenant; car le mouvement conique de l'axe autour du centre, produit dans le reſte du globe une ſorte de rotation qui doit ſe combiner avec la rotation autour de ce même axe, & d'où il réſulte une ſeule & unique rotation qui ſe fait à chaque inſtant autour d'un axe mobile & variable, & qui elle-même n'eſt pas uniforme.

XXI.

Avant que de finir ce Mémoire, je ferai quelques obſervations ſur la ſolution du Problême de la préceſſion des Equinoxes, dans l'hypothèſe des Méridiens ſembla-

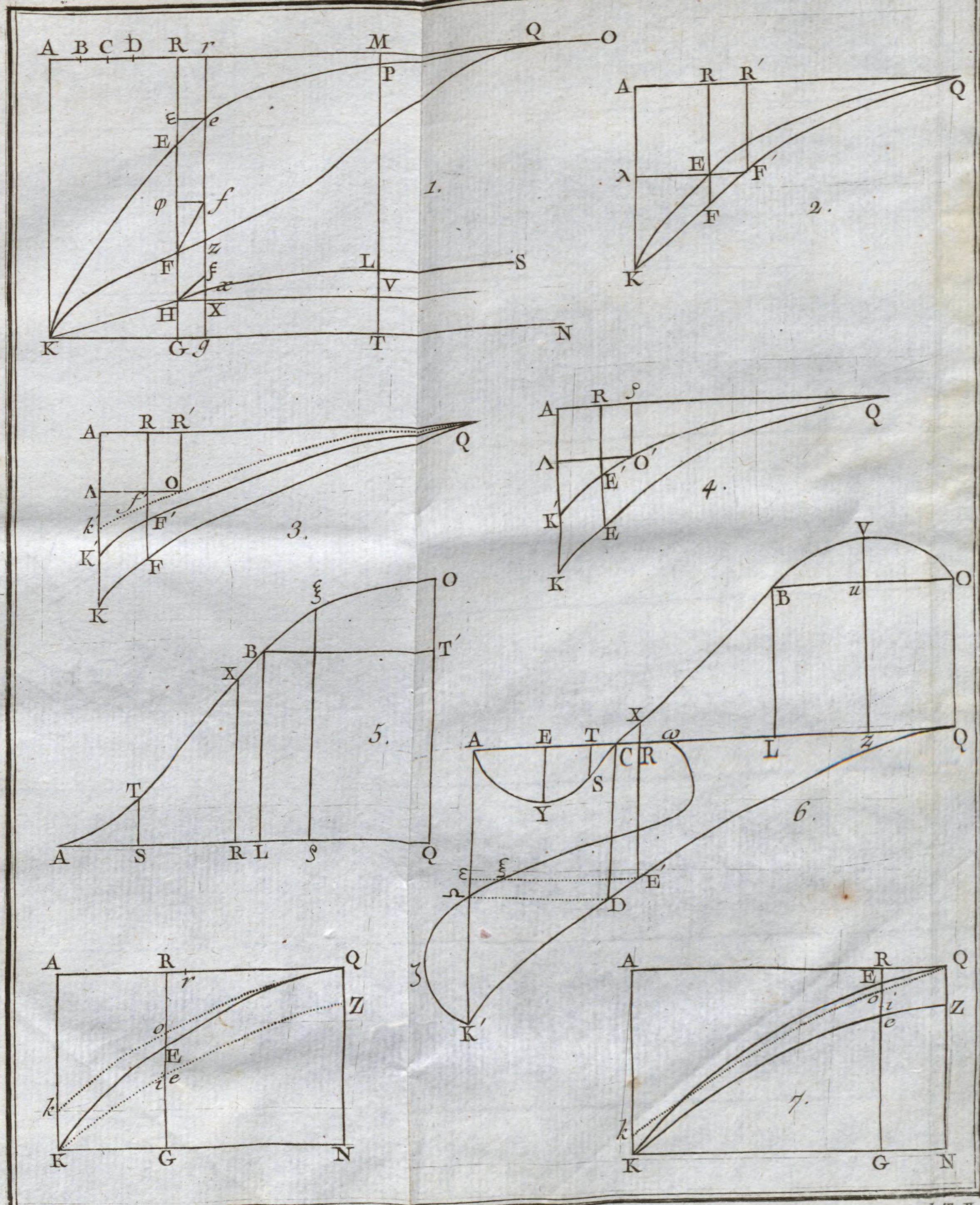
bles ou dissemblables entr'eux. Nous avons trouvé dans les Mémoires de l'Académie de 1754, $dP = -d\epsilon$ sin. $\pi + kdz$, dP exprimant le mouvement de rotation du sphéroïde, $d\epsilon$ le mouvement de rotation de l'axe projetté sur le plan de l'Ecliptique, π l'angle de l'axe avec l'Ecliptique, & kdz une constante. Or il est aisé de voir que tandis que la projection de l'axe parcourt l'angle $d\epsilon$, le point de l'équateur qui se trouve dans le plan passant par l'axe, & perpendiculaire à l'Ecliptique, décrit dans le plan même de l'équateur un angle $= + d\epsilon$ sin. π; & cela en vertu du seul mouvement de l'axe, tel que nous l'avons supposé dans la solution de ce Problême, & dans le second Mémoire imprimé au *Tome I.* de ces Opuscules. Donc combinant ce mouvement $+ d\epsilon$ sin. π avec le mouvement dP, il en résulte que le point de l'équateur dont il s'agit, décrit réellement un angle $= + d\epsilon$ sin. $\pi - d\epsilon$ sin. $\pi + kdz$, c'est-à-dire, un angle constant kdz. D'où il s'ensuit que si au lieu de supposer mobile avec l'axe, comme nous l'avons fait, le rayon de l'équateur qui est perpendiculaire à la commune section de l'équateur & de l'Ecliptique, on suppose d'abord ce rayon immobile à cet égard pendant l'instant dt, & qu'on appelle dP le mouvement de rotation que cet axe auroit ensuite dans le plan de l'équateur, on trouveroit alors simplement $dP = kdz$, ou $ddP = o$; ce qui pourroit rendre les équations plus simples, au moins à certains égards. C'est une vûe que nous proposons à ceux qui voudront

dans la suite résoudre par une méthode semblable à la nôtre, le Problême de la précession des Equinoxes; & même celui qui est résolu dans le second Mémoire de ces Opuscules, *Tome I.* Peut-être pourrai-je moi-même revenir sur cette matiere dans quelqu'autre occasion, si je ne suis là-dessus prévenu par personne.

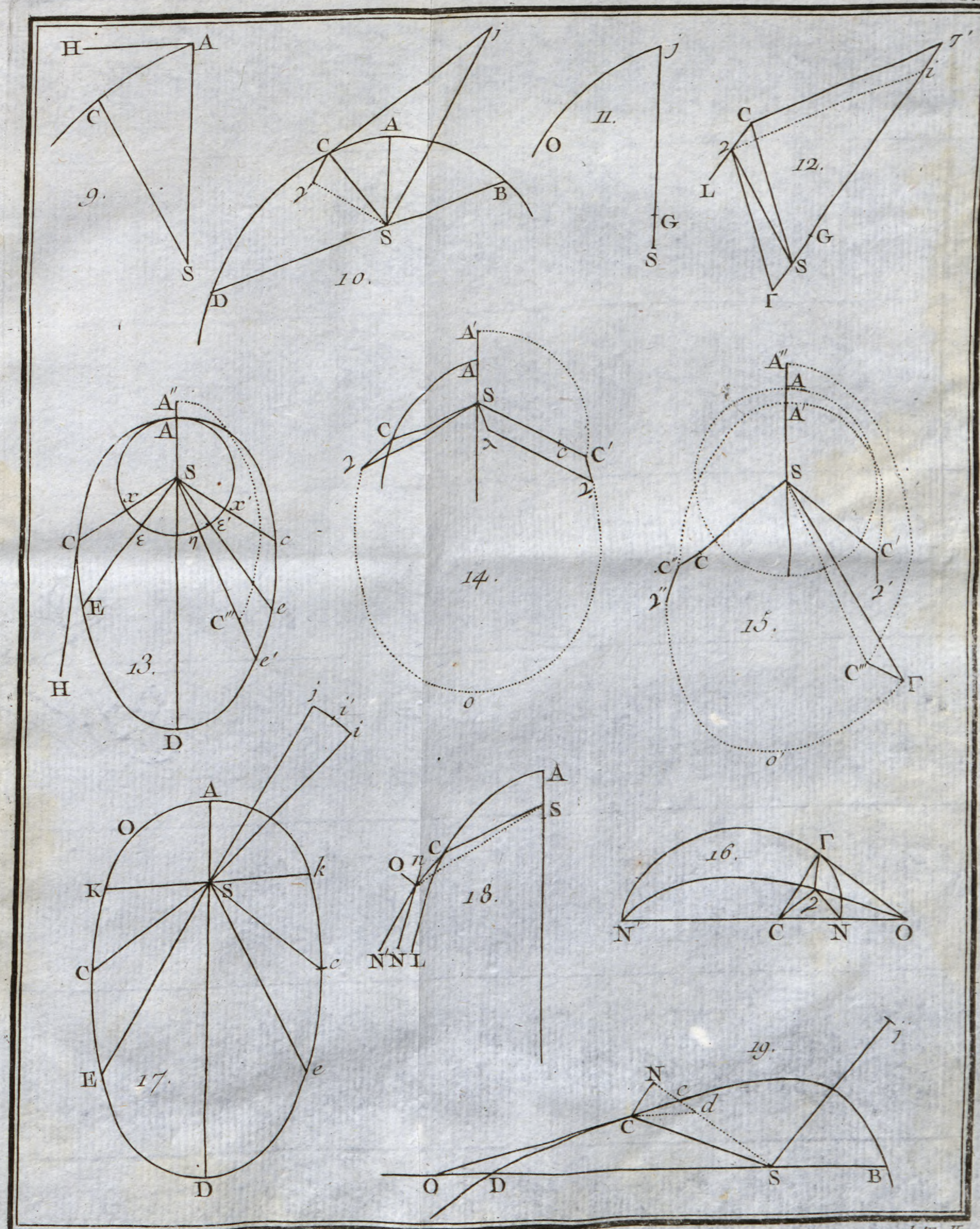
XXII.

Une autre remarque que je ne dois pas omettre, c'est que la solution du Problême de la précession des Equinoxes, dans l'hypothèse des Méridiens dissemblables, cesseroit d'être éxacte, & peut-être possible, si k n'étoit pas un nombre assez grand par rapport à l'unité. Car, comme je l'ai remarqué, p. 418 des Mémoires de l'Académie de 1754, cette solution demande que l'on puisse négliger dans l'intégration les termes qui contiendroient sin. kz, ou cos. kz; & pour cela il faut que la quantité kk qui se trouve au dénominateur de ces termes après la double intégration, soit beaucoup plus grande que l'unité. Or cela arrive en effet; 1°. dans le mouvement de rotation de la Terre, où k est $= 366\frac{1}{4}$; 2°. dans celui de la Lune, où $k = 13\frac{1}{2}$ à-peu-près, & où $kk =$ environ 180. Mais si k étoit, par exemple, $= 1$, c'est-à-dire, si le tems de la rotation de la Lune autour de son axe étoit de $365^j\frac{1}{4}$, alors la solution ne pourroit plus être admise.

Fin du Tome second.


A B C D R r M Q O
P
ε e
E
φ f
z
F
ʃ
L S
a
V
H X
K G g T N
1.
A R R′ Q
λ E F′
F
K
2.
A R R′
Λ f O
k F′
K′
F
K
3.
Q
A R ρ Q
Λ E′ O′
K′
E
K
4.
ξ O
B T′
X
5.
T
A S R L ρ Q
V
B u O
X
A E T C R ω L z Q
Y S
6.
ε ξ
E′
D
K′
A R Q
r
Z
o
E
i e
k
K G N
A E R Q
o i
e Z
7.
k
K G N


BIBLIOTEKA
CENTRALNA


9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.

FAUTES À CORRIGER.

Dans ce ſecond Tome.

Page 80, lig. 8, au lieu de plus grand, *liſez* plus petit; & *lig. 9, au lieu de* plus petit, *liſez* plus grand.

Page 110, lig. 19. au lieu de nous y avions, *liſez* nous avions.

Page 125, lig. 6, au lieu de $-QX$, liſez $+QX$; & au lieu de $+\int X\,dQ$, liſez $-\int X\,dQ$.

Page 160, lig. 3, au lieu de 4″, *liſez* 44″.

Page 166, lig. 8, au lieu de coſ. $\alpha' = \frac{-2000000+\delta}{\delta - a}$, *liſez*

coſ. $\alpha' = \frac{\theta}{2000000} - g$.

Page 175, lig. 10, au lieu de Y, liſez Y''.

Page 246, lig. 15, après $\frac{u}{\text{coſ.}\, z}$ *mettez* une virgule.

EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Du 17 Juin 1761.

MEssieurs LE MONNIER & BEZOUT, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. D'ALEMBERT, intitulé *OPUSCULES MATHÉMATIQUES*, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris le 17 Juin 1761.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand'Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien amés LES MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait exposer qu'ils auroient besoin de nos Lettres de Privilége pour l'impression de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Exposans, nous leur avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choisir, toutes les Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon leur semblera, & de les faire vendre & débiter partout notre Royaume, pendant le tems de vingt années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci-dessus spécifiés, il puisse en être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie: faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers ausdits Exposans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un en celle de notre

Château du Louvre, & un en celle de notre-dit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France; le tout à peine de nullité desdites Présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires; CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le dix-neuviéme jour du mois de Mars, l'an de grace mil sept cens cinquante, & de notre Régne le trente-cinquiéme. Par le Roi en son Conseil. MOL.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, No. 430. fol. 309. conformément au Réglement de 1723, qui fait défenses, article IV, à toutes personnes, de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires de chacun, prescrits par l'art. CVIII. du même Réglement. A Paris le 5 Juin 1750.

Signé, LE GRAS, *Syndic.*

De l'Imprimerie de J. CHARDON.

